

专题: 兰州大学物理学科 80 周年

有限温度临界性增强的量子计量*

辛鲜坤 吴威†

(兰州大学物理科学与技术学院, 量子理论及应用基础教育部重点实验室, 国家自然科学基金委兰州理论物理中心,

甘肃省理论物理重点实验室, 甘肃省量子物理基础学科研究中心, 兰州 730000)

(2026 年 4 月 30 日收到; 2026 年 5 月 26 日收到修改稿)

量子计量是利用量子力学原理与量子资源来实现高精度量子参数估计的科技. 临界性是一种最常见的量子资源, 被广泛应用于各种量子计量方案. 然而, 热噪声通常会削弱甚至完全消除量子临界性带来的优势, 导致现有方案往往局限于零温或极低温环境. 为克服这一局限, 本文提出了一种基于有限温度热力学相变的量子临界计量方案. 该方案建立在探针与待测系统构成的复合整体的热平衡态上, 无需精确的动力学调控手段. 该方案有效地拓展了临界量子计量的适用范围, 并为实现无需超低温冷却的高精度量子计量提供了一条可能的路径.

关键词: 临界计量, 量子温度计, 量子费舍尔信息**DOI:** 10.7498/aps.75.20260624**CSTR:** 32037.14.aps.75.20260624

1 引言

量子计量是利用探针来实现对待测系统中目标参数高精度测量的科技^[1,2], 被广泛应用于暗物质探测^[3,4]、引力波检测^[5]、量子雷达及导航定位^[6-8]等领域. 量子计量旨在利用量子力学原理及特定的量子资源来突破经典的散粒噪声极限并逼近、超越海森伯极限. 常见的量子资源有量子纠缠^[9-11]、量子压缩^[12,13]以及量子相变或者量子临界性^[14,15]. 其中, 量子临界性利用临界点处系统状态对目标参数变化的高敏感性来提高计量精度. 理论上, 运用这些量子资源可使计量精度超越经典的散粒噪声极限^[16-19], 然而在真实的物理系统中, 探针总是不可避免地会与其周围环境相互作用. 这种相互作用会诱发退相干, 导致量子资源带来的优势被削弱甚至完全丧失. 为了抑制退相干的不利影响并保

护各类珍贵的量子资源, 通常需要在计量方案中加入如周期性外场或者连续脉冲这样的动力学调控手段^[20-25].

另一方面, 根据探针的动力学特性, 量子计量方案可分为平衡态探针方案^[26,27]和非平衡态探针方案^[28-30]. 若退相干时间相较于探针-待测系统相互作用时间很短, 则探针将完全热化^[31,32], 处于平衡的长时稳态. 此时可以直接从探针的平衡态中获取目标参数的信息. 反之, 若相互作用时间很短, 量子相干性得到部分保留, 则通常从探针的动力学实时信号中读取信息, 这便是非平衡态探针方案. 平衡态探针方案因具有无需精确动力学控制的优点而被广泛应用^[26,33]. 然而探测器平衡态的解析表达式通常难以得到, 在先前的研究中, 人们通常假设探针与待测系统之间的相互作用很弱^[34,35]. 在弱耦合近似下, 虽可得到解析的表达式, 但存在很大的局限性: 它无法正确描述强耦合区间的非马尔科

* 国家自然科学基金 (批准号: 12375015, 12247101)、中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: lzujbky-2025-jdzz07)、甘肃省科技领军人才专项 (批准号: 26RCKA011)、甘肃省自然科学基金 (批准号: 22JR5RA389, 25JRRA799) 和高等学校学科创新引智计划 (“111 计划”) (批准号: B20063) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wuw@lzu.edu.cn

夫记忆效应与反常的非正则热化现象^[28,36,37], 这极大地限制了量子计量的发展.

针对上述问题, 本文提出了一种适用于强耦合区间的计量方案. 可以发现, 探针与热库间的强相互作用会诱导出有限温度临界性. 在临界点处, 探针的热力学量对温度变化十分敏感. 利用这一特性, 可以显著提高温度计量的精度.

本文的结构安排如下: 首先在第 2 节, 简要回顾量子参数估计理论中的相关基础知识, 介绍信噪比和量子费舍尔信息; 第 3 节详细展示本文的计量方案并与传统的弱耦合近似的结果进行对比; 第 4 节展示数值结果, 并讨论具体测量方案. 最后第 5 节给出结论并做展望. 为简化表述, 在本文中, 取 $\hbar = k_B = 1$.

2 量子参数估计理论

本节首先简要回顾量子参数估计理论中的基本概念, 并引出刻画计量精度的两个关键物理量: 信噪比与量子费舍尔信息. 为探测待测系统中某一感兴趣的参数 θ , 需使用初始时制备于输入态 ϱ_{in} 的量子探针, 并使其与待测系统耦合. 通过探针-待测系统相互作用, 关于 θ 的信息便可通过依赖于 θ 的参数化过程 $\varrho_{\text{out}} = \mathcal{M}_\theta(\varrho_{\text{in}}) = \varrho_\theta$ 编码到探针的输出态中. 此类编码过程可在无噪声情况下通过么正转动实现^[38,39]; 在噪声环境中, 则需要使用非么正约化动力学方法^[40]. 在实际测量场景中, 需选定探针的某一个可观测量, 通过测量选定的可观测量算符 $\hat{O}$ 来获取参数 θ 的信息. 该测量方案对应的信噪比由误差传递公式给出:

$$R_\theta = \frac{|\partial_\theta \text{Tr}(\varrho_\theta \hat{O})|^2}{\text{Tr}(\varrho_\theta \hat{O}^2) - \text{Tr}(\varrho_\theta \hat{O})^2}. \quad (1)$$

不同的测量方案, 即不同的可观测量算符 $\hat{O}$, 将给出不同的信噪比. 这些结果受限于著名的量子 Cramér-Rao 不等式:

$$R_\theta \leq \mathcal{F}_\theta, \quad (2)$$

其中 $\mathcal{F}_\theta \equiv \text{Tr}(\varrho_\theta \hat{L}_\theta^2)$ 为量子费舍尔信息^[41,42], 它刻画了参数化密度矩阵 ρ_θ 中所包含的待估参数的全部信息, 代表参数估计的精度极限, 即穷尽所有可能的测量方案所能达到的最高精度, 式中的 $\hat{L}_\theta$ 称为对称对数导数, 由下式定义:

$$\frac{\partial \varrho_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{2}(\hat{L}_\theta \varrho_\theta + \varrho_\theta \hat{L}_\theta). \quad (3)$$

本文主要关注从吉布斯态

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \quad (4)$$

中提取有关温度信息的参数估计情形, 其中 $\beta = 1/T$ 为逆温度, $Z = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}})$ 为配分函数. 一般而言, 哈密顿量 $\hat{H}$ 不显含温度, 在这种情况下

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{(\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle) \rho}{T^2}, \quad (5)$$

其中, $\langle \cdot \rangle \equiv \text{Tr}(\rho \cdot)$. 由 (5) 式可以很容易得到这种情况下关于温度的对称对数导数表达式为

$$\hat{L}_T = \frac{\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle}{T^2}, \quad (6)$$

进一步计算出关于温度的量子费舍尔信息为^[43]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T &= \text{Tr} \left[\rho \left(\frac{\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle}{T^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{C_V}{T^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $C_V = T \partial_T^2 (T \ln Z)$ 为热容. 因此, 只要知道了配分函数 Z 的表达式, 关于温度计量的量子费舍尔信息 $\mathcal{F}_T$ 便可相应地得到.

3 计量方案

考虑一个复合系统, 它由一个自旋链 $\hat{H}_s$ 与一个玻色热库 $\hat{H}_b$ 组成. 其中, 自旋链 $\hat{H}_s$ 由 N 个具有最近邻短程自旋相互作用的二能级系统构成, 自旋链与热库之间的相互作用哈密顿量为 $\hat{H}_{\text{int}}$. 在本文中以自旋链作为探针, 总的探针-热库哈密顿量由如下广义的自旋-玻色模型来描述:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{tot}} &= \hat{H}_s + \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_b \\ &= -J \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_{i+1}^x + \hat{S}_x \sum_k g_k (\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k) \\ &\quad + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\hat{S}_\nu \equiv \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^\nu$, $\nu \in \{x, y, z\}$, 算符 $\hat{\sigma}_i^\nu$ 为标准的泡利矩阵, $\hat{a}_k^\dagger$ 和 $\hat{a}_k$ 分别为热库中频率为 ω_k 的第 k 个玻色子模式对应的产生和湮灭算符, 探针和热库间的耦合强度由参数 g_k 表征.

在常见的热库温度计量任务中, 编码过程通常

需要让探针与处于热平衡态的热库耦合. 探针-热库耦合时间足够长后, 探针与热库会共同弛豫到复合系统的吉布斯态. 假设上述编码过程已经完成, 复合系统处于温度为 $T = 1/\beta$ 的热平衡态

$$\rho_{\text{tot}} = \frac{e^{-\beta \hat{H}_{\text{tot}}}}{Z_{\text{tot}}}, \quad (9)$$

其中 $Z_{\text{tot}} = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_{\text{tot}}})$ 为复合系统的配分函数, 温度 T 是我们想要计量的参数. 然而, 由于 ρ_{tot} 同时包含自旋与玻色子两种自由度, 直接从 ρ_{tot} 中读取关于温度的信息比较困难. 因此, 首先将热库的自由度偏迹掉

$$\rho_s = \text{Tr}_b \left(\frac{e^{-\beta \hat{H}_{\text{tot}}}}{Z_{\text{tot}}} \right), \quad (10)$$

从而得到自旋探针的约化密度矩阵 ρ_s , 并从中提取关于温度 T 的信噪比与量子费舍尔信息.

若自旋探针与热库之间的耦合很弱, 或者温度 T 很高, 则可将 $e^{-\beta \hat{H}_{\text{tot}}}$ 按耦合强度或逆温度做微扰展开, 仅保留最低阶贡献. 此时, (10) 式可近似表示为

$$\rho_s^{\text{weak}} = \frac{e^{-\beta \hat{H}_s}}{Z_s}. \quad (11)$$

其中 $Z_s = \text{Tr}_s(e^{-\beta \hat{H}_s})$ 为 $\hat{H}_s$ 对应的配分函数. (11) 式是探针裸哈密顿量对应的吉布斯态, 由此进一步计算热容和量子费舍尔信息可以得到

$$C_V^{\text{weak}} = \frac{NJ^2\beta^2}{\cosh^2(\beta J)}, \quad (12)$$

$$\mathcal{F}_T^{\text{weak}} = \frac{NJ^2\beta^4}{\cosh^2(\beta J)}. \quad (13)$$

弱耦合近似虽可得到解析表达式, 但其适用条件极大地限制了应用范围. 更重要的是, 弱耦合近似下的量子费舍尔信息 $\mathcal{F}_T^{\text{weak}}$ 在整个温度轴上平滑变化并无奇异性, 即便在最大值处, 计量精度也相当有限.

为突破弱耦合条件的限制, 同时提高计量精度, 这里采用文献 [44] 提出的么正变换方法. 注意到 $[\hat{H}_s, \hat{S}_x] = 0$, 可通过一个么正的极化子变换对 $\hat{H}_{\text{int}}$ 进行解耦, 将自旋自由度与玻色热库的自由度分离开来, 从而方便地计算自旋探针的约化密度矩阵.

对复合系统哈密顿量做如下么正转动:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} = \hat{\mathcal{U}} \hat{H}_{\text{tot}} \hat{\mathcal{U}}^\dagger, \quad (14)$$

其中

$$\hat{\mathcal{U}} = \exp \left[\hat{S}_x \sum_k (\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k) g_k / \omega_k \right]. \quad (15)$$

经简单计算可得

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} = -J \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_{i+1}^x - \hat{S}_x^2 \sum_k g_k^2 / \omega_k + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (16)$$

由于 (14) 式中的么正算符 $\hat{\mathcal{U}}$ 与本文要计量的待估参数温度 T 无关, 因此引入么正转动不会改变量子费舍尔信息的数值 [41]. 经过么正转动后, 自旋链与玻色热库已经解耦, 故可将复合系统的状态写为自旋部分与热库部分的直积形式:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{tot}} &= \frac{e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}}}{Z_{\text{tot}}} \\ &= \frac{e^{-\beta \hat{H}_{\text{eff}}} e^{-\beta \hat{H}_b}}{\text{Tr}_s(e^{-\beta \hat{H}_{\text{eff}}}) \text{Tr}_b(e^{-\beta \hat{H}_b})} \\ &= \rho_{\text{eff}} \rho_b, \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_s - \hat{S}_x^2 \sum_k \frac{g_k^2}{\omega_k} \quad (18)$$

为探针的有效哈密顿量,

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{e^{-\beta \hat{H}_{\text{eff}}}}{Z_{\text{eff}}} \quad (19)$$

为探针有效哈密顿量对应的吉布斯态, $Z_{\text{eff}} = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_{\text{eff}}})$ 为相应的有效配分函数.

取热库的谱函数为 $J(\omega) \equiv \sum_k g_k^2 \delta(\omega - \omega_k) = \alpha(N) \omega^t e^{-\omega/\omega_{\text{cutoff}}}$, 其中 $\alpha(N)$ 代表耦合强度; t 是欧姆系数, $0 < t < 1$ 对应亚欧姆谱, $t = 1$ 对应欧姆谱, $t > 1$ 对应超欧姆谱; ω_{cutoff} 是截止频率. 为了简便, 取 $\omega_{\text{cutoff}} = 1$. 考虑到相互作用的强度通常是反比于自旋的总数目 N [44], 这里进一步假设 $\alpha(N) = \alpha/N$. 利用该谱密度计算可得

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{g_k^2}{\omega_k} &= \int_0^\infty \frac{J(\omega)}{\omega} d\omega \\ &= \frac{\alpha}{N} \Gamma(t), \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\Gamma(t)$ 为欧拉伽马函数. 因此 (18) 式可重新写为

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_s - \frac{\alpha}{N} \Gamma(t) \hat{S}_x^2. \quad (21)$$

4 临界性增强的量子计量

探针的有效哈密顿量 (21) 式包含了集体自旋 $\hat{S}_x$ 的二次型, 在计算对应的有效配分函数时很难直接将 $e^{-\beta\hat{H}_{\text{eff}}}$ 对角化. 为解决这一问题, 可以插入一个高斯积分, 将 $\hat{S}_x^2$ 转化为对 $\hat{S}_x$ 的积分 [44]:

$$\begin{aligned} Z_{\text{eff}} &= \text{Tr} \left\{ e^{-\beta\hat{H}_s + \beta\alpha\Gamma(t)\hat{S}_x^2/N} \sqrt{\frac{\beta N}{4\pi\alpha\Gamma(t)}} \right. \\ &\quad \times \left. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\sqrt{\frac{\beta N}{4\pi\alpha\Gamma(t)}} \left(x - 2\frac{\alpha\Gamma(t)}{N}\hat{S}_x\right)\right]^2} dx \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\beta N}{4\pi\alpha\Gamma(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr} \left[e^{-\beta(\hat{H}_s - x\hat{S}_x)} \right] \\ &\quad \times e^{-\frac{\beta N}{4\alpha\Gamma(t)}x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\beta N}{4\pi\alpha\Gamma(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_0(x) e^{-\frac{\beta N}{4\alpha\Gamma(t)}x^2} dx, \quad (22) \end{aligned}$$

式中, $Z_0(x)$ 是外场为 x 时的伊辛模型配分函数, 可相继运用约当-维格纳变换、傅里叶变换和博戈留博夫变换计算得到其表达式为 [45,46]

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= \left[e^{\beta J} \cosh \beta x + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta x) + e^{-2\beta J}} \right]^N. \quad (23) \end{aligned}$$

为得到更简洁的表达式, 再利用拉普拉斯方法对 (22) 式进行化简. 对形如

$$h(x) = \int_a^b \phi(x) e^{\lambda g(x)} dx \quad (24)$$

的积分, 若有 $\lambda \rightarrow +\infty$, 且函数 $g(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 处取得最大值, 即 $g'(x_0) = 0$, $g''(x_0) < 0$, 则积分可近似表示为

$$h(x) \approx \phi(x_0) e^{\lambda g(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |g''(x_0)|}}. \quad (25)$$

假设 N 很大, 该热力学极限使得应用拉普拉斯方法的条件得到满足. 在这种情况下可得 [47]

$$Z_{\text{eff}} \approx \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha\Gamma(t)|\Phi''(x_0)|}} e^{N\Phi(x_0)}, \quad (26)$$

式中

$$\Phi(x) = f(x) - \frac{\beta x^2}{4\alpha\Gamma(t)}, \quad (27)$$

其中 $f(x) = \ln Z_0(x)/N$, x_0 是函数 $\Phi(x)$ 的极大值点, 由方程 $\Phi'(x) = 0$ 决定. 从 Z_{eff} 的表达式可以看出, 总的自旋个数 N 在拉普拉斯方法处理下只是一个参数, 热力学极限 $N \rightarrow \infty$ 的要求并不会带来额外的计算困难.

我们注意到 (21) 式的第二项是一个长程相互作用项 [48,49], 它是由探针与热库之间的耦合所诱导的. 该项的引入会导致两种不同类型自旋相互作用的竞争, 进而出现有限温度热力学相变 [44]. 接下来基于朗道序参量理论分析这一相变行为.

由 (22) 式可知, x_0 是插入高斯积分时引入的辅助参数, 作为 $\hat{S}_x$ 的共轭变量, 其大小决定了沿 x 方向自旋的有序度, 因此可视为序参量. 如图 1 所示, 在温度轴上 x_0 存在两种类型的解: 高温下, 自旋探针完全无序, 对应方程 $\Phi'(x_0) = 0$ 的平庸解 $x_0 = 0$; 当温度降低并越过临界点时, 自旋探针逐渐进入有序状态, 序参量从零连续地变为非零. 序参量的这种变化说明自旋探针经历了二级相变, 且伴随着全局 $\mathbb{Z}_2$ 对称性破缺. 在哈密顿量形式与 (21) 式相似的 Lipkin-Meshkov-Glick 模型中, 也可观察到类似的对称性自发破缺现象 [50]. 实际上, 考察自旋探针的有效哈密顿量 (21) 式可以发现, 其在绕 y 轴 (或 z 轴) 旋转 π 角度的变换下保持不变, 即

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}} \equiv \hat{P} \hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}} \hat{P}^\dagger = \hat{\mathcal{H}}_{\text{eff}}, \quad (28)$$

其中 $\hat{P} = e^{-i\pi\hat{S}_y/2}$ (或 $\hat{P} = e^{-i\pi\hat{S}_z/2}$). 当 $x_0 = 0$ 时, $\langle \hat{S}_x \rangle = 0$, 自旋探针保持对称性; 越过临界点后, x_0 有正负两个可能的取值 [51,52], $\langle \hat{S}_x \rangle$ 也相应地有两个值. 实际情形中自旋探针会自发选择 $\langle \hat{S}_x \rangle$ 的其中一个取值, 此时若将自旋探针旋转 π 角度, $\langle \hat{S}_x \rangle$ 便会取另一个值, 从而破坏原有的对称性.

上述相变的临界温度由 $\Phi''(0)|_{\beta=\beta_c} = 0$, 即

$$2\alpha\Gamma(t)\beta_c e^{2\beta_c J} = 1 \quad (29)$$

决定, 这一关系式的正确性可由自由能的性质得到验证. 注意到函数 $F = -T\Phi(x)$ 实际上表示自旋探针中平均每个自旋贡献的自由能, 其极小值点对应自旋探针的稳态解. 如图 2(a) 所示, 高温下自由能在 $x = 0$ 处取得极小值, 故 $x = 0$ 就是此时自旋探针的稳态解. 当温度降至由 (29) 式决定的临界点 $T = T_c$ 时, 自由能在 $x = 0$ 处变得平展. 温度继续降低并越过临界点后, $x = 0$ 转变为自由能的局域极大值点, 而极小值点向两侧移至非零位置, 相应

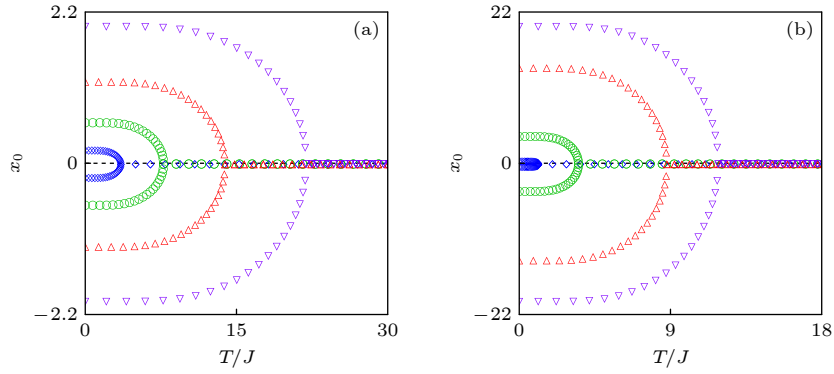


图 1 (a) 耦合强度分别为 $\alpha = 0.1$ (蓝色菱形), $\alpha = 0.3$ (绿色圆形), $\alpha = 0.6$ (红色上三角), $\alpha = 1$ (紫色下三角) 时方程 $\Phi'(x, \beta) = 0$ 可能的解, 其余参数为 $J = 0.1 \text{ cm}^{-1}$, $\Gamma(t) = 1$; (b) 与 (a) 相同, 但参数为 $\alpha = 0.1$ (蓝色菱形), $\alpha = 1$ (绿色圆形), $\alpha = 3.5$ (红色上三角), $\alpha = 5$ (紫色下三角), $J = 2 \text{ cm}^{-1}$, $\Gamma(t) = 2$

Fig. 1. (a) The possible solutions of $\Phi'(x, \beta) = 0$ with different coupling strengths: $\alpha = 0.1$ (blue rhombi), $\alpha = 0.3$ (green circles), $\alpha = 0.6$ (red upward-triangles) and $\alpha = 1$ (purple downward-triangles). Other parameters are $J = 0.1 \text{ cm}^{-1}$ and $\Gamma(t) = 1$. (b) The same with panel (a), but $\alpha = 0.1$ (blue rhombi), $\alpha = 1$ (green circles), $\alpha = 3.5$ (red upward-triangles) and $\alpha = 5$ (purple downward-triangles), $J = 2 \text{ cm}^{-1}$ and $\Gamma(t) = 2$.

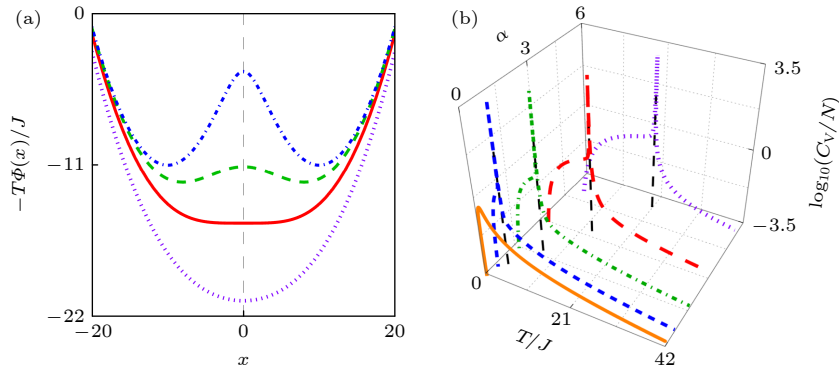


图 2 (a) 温度分别为 $T/J = 30$ (紫色点线), $T_c/J = 22$ (红色实线), $T/J = 16$ (绿色虚线), $T/J = 6$ (蓝色点划线) 时平均自由能 $F = -T\Phi(x)$. 其他参数为 $\alpha = 5$, $\Gamma(t) = 1$, $J = 0.5 \text{ cm}^{-1}$; (b) 耦合强度分别为 $\alpha = 0.5$ (蓝色短间隔虚线), $\alpha = 1.5$ (绿色点划线), $\alpha = 3$ (红色长间隔虚线), $\alpha = 5$ (紫色点线) 时的热容. 橙色实线是弱耦合近似下的结果, 即 (12) 式. 图中的黑色虚线标记临界温度的位置. 其他参数为 $\Gamma(t) = 1$, $J = 0.5 \text{ cm}^{-1}$ 以及 $N = 10^3$

Fig. 2. (a) The free energy per spin $F = -T\Phi(x)$ is plotted with different temperatures: $T/J = 30$ (purple dotted line), $T_c/J = 22$ (red solid line), $T/J = 16$ (green dashed line) and $T/J = 6$ (blue dot-dashed line). Other parameters are $\alpha = 5$, $\Gamma(t) = 1$ and $J = 0.5 \text{ cm}^{-1}$. (b) C_V versus T with different coupling strengths: $\alpha = 0.5$ (blue short-dashed line), $\alpha = 1.5$ (green dot-dashed line), $\alpha = 3$ (red long-dashed line) and $\alpha = 5$ (purple dotted lines). The orange solid line presents the weak-coupling result of Eq. (12). The black dashed lines highlight the positions of critical temperature. Other parameters are chosen as $\Gamma(t) = 1$, $J = 0.5 \text{ cm}^{-1}$ and $N = 10^3$.

的稳态解 (序参量) 随之变为非零. 由此可见, 序参量由零变为非零的临界点就是使得自由能在 $x = 0$ 处由取得极小值转变为取得极大值的温度, 即满足 (29) 式的临界点.

从有效哈密顿量可以看出, 当且仅当 $\alpha = 0$, 即探针与热库完全退耦时, 本文的结果退化为传统弱耦合近似的结果. 当 α 非常小时, $\hat{H}_s$ 与 $\hat{H}_{\text{eff}}$ 在高温区间的行为是一致的; 但在低温区间, $\hat{S}_x^2$ -项会诱导出一个二阶的连续相变, 这个结果是传统弱耦合近似无法解释的. 同样的物理结论也能

从 $x_0 = 0$ 时有效配分函数的表达式中得到. 将高温下的平庸解 $x_0 = 0$ 代入 (26) 式, 发现此时自旋探针的有效配分函数与弱耦合近似下的结果 $Z_{\text{weak}} = [2 \cosh(\beta J)]^N$ 相比, 仅相差一个比例系数 $1/\sqrt{1 - 2\alpha\Gamma(t)\beta e^{2\beta J}}$. 进一步地, 若 $\alpha\beta \rightarrow 0$, 则 $Z_{\text{eff}} \rightarrow Z_{\text{weak}}$, 这与文献 [53] 中的研究结论相符合. 图 2(b) 很好地展示了这一结论: 耦合强度 α 越小, 温度 T 越高, 所得到的自旋探针的有效热容就越贴近弱耦合近似的结果.

结合计量温度的量子费舍尔信息与定容热容

之间的关系 (7) 式, 很容易联想到计量温度的量子费舍尔信息也应在临界温度处发散, 可以利用这种临界性提高计量性能.

基于自旋部分的约化密度矩阵 ρ_{eff} , 利用 (7) 式便可计算出关于温度的量子费舍尔信息. 图 3 的左列展示了不同耦合强度下量子费舍尔信息随温度变化的图像, 发现在临界温度 $T = T_c$ 处 (黑色虚线标记处) 量子费舍尔信息出现了显著的峰值, 这说明计量性能得到了明显提高. 在临界温度附近, 发现量子费舍尔信息与温度之间具有幂律型的标度关系:

$$\mathcal{F}_T \propto |\tilde{t}|^{-2}, \quad (30)$$

其中 $\tilde{t} = (T - T_c)/T_c$ 为约化温度. 从 (30) 式可以看出, 当 $T \rightarrow T_c$ 时, $\mathcal{F}_T \rightarrow \infty$. 这之前量子临界计量领域的多项研究结果高度相似 [54,55].

如前所述, 量子费舍尔信息代表了计量精度的

理论上限. 在实际测量中, 可以选定 $\hat{S}_x^2$ 作为观测算符, 通过测量该算符以间接提取关于温度的信息. 基于 (19) 式, 可以很容易地计算出

$$\langle \hat{S}_x^2 \rangle = \frac{NT}{\Gamma(t)} \frac{\partial \ln Z_{\text{eff}}}{\partial \alpha}, \quad (31)$$

$$\langle \hat{S}_x^4 \rangle - \langle \hat{S}_x^2 \rangle^2 = \left[\frac{NT}{\Gamma(t)} \right]^2 \frac{\partial^2 \ln Z_{\text{eff}}}{\partial \alpha^2}. \quad (32)$$

将 (31) 式和 (32) 式代入 (1) 式, 即可得到此种计量方案下关于温度的信噪比 R_T , 结果如图 3 的右列所示. 可以看到, 在临界温度 $T = T_c$ 附近, 信噪比的标度关系与量子费舍尔信息完全相同, 区别在于远离临界点处信噪比较低. 这表明虽然我们选取的方案不是全局最优方案, 不能在整个温度区间上饱和到量子费舍尔信息的数值, 但依然可以在临界温度处实现最优测量.

虽然利用临界性增强计量性能的方案已有了

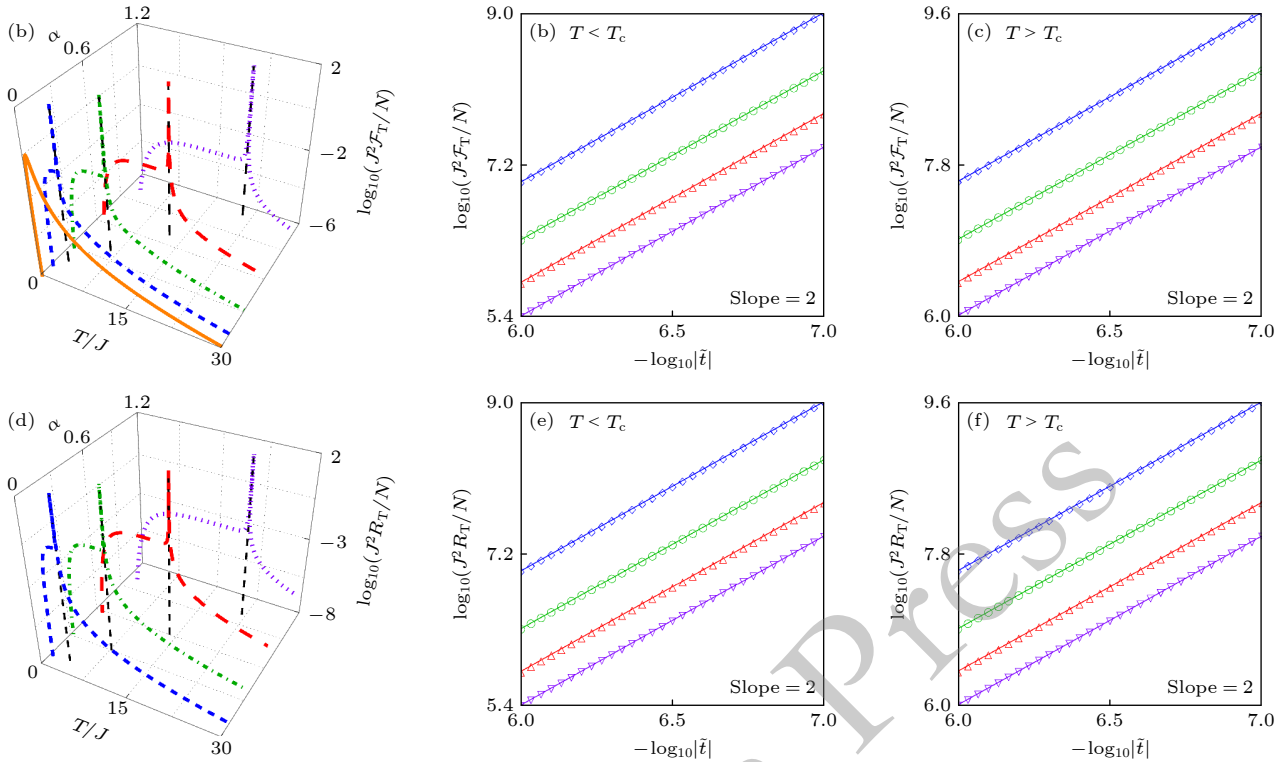


图 3 (a) 不同耦合强度下关于温度的量子费舍尔信息 $\mathcal{F}_T$, 其中橙色实线代表弱耦合近似下的结果, 黑色虚线标注了临界温度; (b), (c) 关系 $\mathcal{F}_T \propto |\tilde{t}|^{-2}$ 相应的对数-对数图, 所有直线均以斜率 2 进行拟合; (d) 不同耦合强度下关于温度的信噪比 R_T , 其中黑色虚线标注了临界温度; (e), (f) 关系 $R_T \propto |\tilde{t}|^{-2}$ 相应的对数-对数图, 所有直线均以斜率 2 进行拟合. 图中, 均取 $N = 10^3$, 其余参数与图 1(a) 一致

Fig. 3. (a) The quantum Fisher information of temperature $\mathcal{F}_T$ with different coupling strengths. And the orange solid line presents the weak-coupling result, while the black dashed line marks the critical temperature. (b), (c) The log-log plots reveal that $\mathcal{F}_T \propto |\tilde{t}|^{-2}$, where all the straight lines are fits with slope = 2. (d) The signal-to-noise ratio of temperature R_T with different coupling strengths. And the black dashed line marks the critical temperature. (e), (f) The log-log plots reveal that $R_T \propto |\tilde{t}|^{-2}$, where all the straight lines are fits with slope = 2. We set $N = 10^3$, and other parameters are the same as those in Fig.1(a).

广泛报道,但之前的研究都是基于探针^[56,57]或待测系统^[58,59]自身具有临界性的计量方案,这种临界性的存在不依赖于探针与待测系统之间的耦合. 本文的研究创新之处在于,即便探针与待测系统各自独立存在时都没有相变行为,也可通过它们之间的相互作用使整个复合系统出现有限温度下的相变行为,以此实现计量性能的提高. 需要强调的是,本文的计量方案中,临界性完全来自于探针与待测系统之间的耦合. 如图 3 所示,随着耦合强度降低,临界温度会逐渐趋近于绝对零度. 当探测器与待测系统之间完全没有耦合时, $T_c = 0$. 根据热力学第三定律,这意味着将不会出现热力学临界性. 除此之外,与之前的大多数计量方案中利用零温或极低温度下的量子相变^[15,60,61]来提高计量精度不同,本文方案是基于有限温度下的热力学相变,因此不需要超低温这样的苛刻条件,在实验上更容易实现.

5 总 结

本文提出了一种全新的临界量子温度计量方案,发现自旋探针与热库间的耦合会引入有效长程相互作用,进而在作为探针的自旋链中诱导出有限温度下的热力学相变,这种有限温度临界性可以有效提高量子计量的精度. 这个方案可以在如 $\text{CoCl}_2 \cdot 2\text{NC}_5\text{H}_5$ 等一维或准一维线性磁性材料中进行实验验证,这些材料存在由经典随机外场或无序引起的相变^[53,62],这种相变类似于本文中自旋探针与玻色热库的耦合所诱导的有限温度热力学相变. 此外,该计量方案也有望拓展至二维自旋链或电子组装体系的研究场景中^[44]. 本文只考虑了退相位型探针-热库耦合的情况,即 $[\hat{H}_s, \hat{S}_x] = 0$,后续可以进一步推广至耗散型耦合的情况 $[\hat{H}_s, \hat{S}_x] \neq 0$. 对于耗散耦合的情况,无法通过一个极化子变换进行解耦合,需要额外的技巧^[63]. 最后,本文的研究结果有望为在实际条件下实现高精度的温度计量提供理论支持.

参考文献

- [1] Degen C L, Reinhard F, Cappellaro P 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 035002
- [2] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005
- [3] Sushkov A O 2023 *PRX Quantum* **4** 020101
- [4] He S, He D, Li Y F, Gao L, Feng X N, Zheng H, Wei L F 2025 *Phys. Rev. D* **112** 063536
- [5] Quiñones D A, Oniga T, Varcoc B T H, Wang C H T 2017 *Phys. Rev. D* **96** 044018
- [6] Karsa A, Fletcher A, Spedalieri G, Pirandola S 2024 *Rep. Prog. Phys.* **87** 094001
- [7] Cai J M, Plenio M B 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 230503
- [8] Gao W L, Xu L P, Zhang H, Yan B, Li P X, Hu G T 2023 *Chin. Phys. B* **32** 050304
- [9] Hainzer H, Kiesenhofer D, Ollikainen T, Bock M, Kranzl F, Joshi M K, Yoeli G, Blatt R, Gefen T, Roos C F 2024 *Phys. Rev. X* **14** 011033
- [10] Lewis-Swan R J, Castro J C Z, Barberena D, Rey A M 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 163601
- [11] Ren Y L, Zhou T 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 050601 (in Chinese) [任亚雷, 周涛 2024 物理学报 **73** 050601]
- [12] Frérot I, Roscilde T 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 020402
- [13] Caves C M 1981 *Phys. Rev. D* **23** 1693
- [14] Chu Y M, Zhang S L, Yu B Y, Cai J M 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 010502
- [15] Garbe L, Bina M, Keller A, Paris M G A, Felicetti S 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 120504
- [16] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401
- [17] Braunstein S L 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 3598
- [18] Wineland D J, Bollinger J J, Itano W M, Moore F L, Heinzen D J 1992 *Phys. Rev. A* **46** R6797
- [19] Yu X H, Wei Y, Yang R, Song W H, Miao Y N, Zhou W, Li X H, Gao X Q, Gong Y X, Zhu S N 2025 *Chin. Phys. B* **34** 070305
- [20] Mann Z, Cao N P, Laflamme R, Zhou S S 2025 *PRX Quantum* **6** 030321
- [21] Liu R, Yang X D, Lv X, Long X Y, Liu H F, Lu D W, Dong Y, Li J 2025 *Phys. Rev. Lett.* **135** 250805
- [22] Bai S Y, An J H 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 050801
- [23] Tan Q S, Huang Y X, Yin X L, Kuang L M, Wang X G 2013 *Phys. Rev. A* **87** 032102
- [24] Long Z H, Pang S S 2025 *Chin. Phys. B* **34** 080301
- [25] Xin T, Zhang K, Li J 2024 *Chin. Phys. B* **33** 090302
- [26] Abiuso P, Sekatski P, Calsamiglia J, Perarnau-Llobet M 2025 *Phys. Rev. Lett.* **134** 010801
- [27] Zhang Z Z, Luo H G, Wu W 2025 *Phys. Rev. A* **111** 052623
- [28] Wu W, Bai S Y, An J H 2021 *Phys. Rev. A* **103** L010601
- [29] Ullah A, Cattaneo M, Müstecaplıoğlu Ö E 2025 *Phys. Rev. A* **111** 062201
- [30] Li Q, Ji Y L, Liu R, Suter D, Jiang M, Peng X H 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 117401 (in Chinese) [李庆, 季云兰, 刘然, Suter Dieter, 江敏, 彭新华 2025 物理学报 **74** 117401]
- [31] Subaşı Y, Fleming C H, Taylor J M, Hu B L 2012 *Phys. Rev. E* **86** 061132
- [32] Yang C J, An J H, Luo H G, Li Y, Oh C H 2014 *Phys. Rev. E* **90** 022122
- [33] Correa L A, Mehboudi M, Adesso G, Sanpera A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 220405
- [34] Paris M G A 2016 *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** 03LT02
- [35] Jørgensen M R, Potts P P, Paris M G A, Brask J B 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 033394
- [36] Wu W, Shi C 2020 *Phys. Rev. A* **102** 032607
- [37] Chin A W, Huelga S F, Plenio M B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 233601
- [38] Yu J, Qin Y, Qin J L, Wang H, Yan Z H, Jia X J, Peng K C 2020 *Phys. Rev. Appl.* **13** 024037
- [39] Tatsuta M, Matsuzaki Y, Shimizu A 2019 *Phys. Rev. A* **100** 032318

- [40] Wu W, Peng Z, Bai S Y, An J H 2021 *Phys. Rev. Appl.* **15** 054042
- [41] Liu J, Yuan H D, Lu X M, Wang X G 2020 *J. Phys. A: Math. Theor.* **53** 023001
- [42] Li J, Ding H T, Zhang D W 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 200601 (in Chinese) [李竞, 丁海涛, 张丹伟 2023 物理学报 **72** 200601]
- [43] Zanardi P, Campos Venuti L, Giorda P 2007 *Phys. Rev. A* **76** 062318
- [44] Shao J S 1997 *Europhys. Lett.* **38** 153
- [45] Pfeuty P 1970 *Ann. Phys.* **57** 79
- [46] Białończyk M, Gómez-Ruiz F J, del Campo A 2021 *SciPost Phys.* **11** 013
- [47] Bastarrachea-Magnani M A, Lerma-Hernández S, Hirsch J G 2016 *J. Stat. Mech.* 093105
- [48] Emch G G, Knops H J F 1970 *J. Math. Phys.* **11** 3008
- [49] Lebowitz J L, Penrose O 1966 *J. Math. Phys.* **7** 98
- [50] Kopylov W, Schaller G 2019 *Phys. Rev. A* **100** 063815
- [51] Kopylov W, Schaller G, Brandes T 2017 *Phys. Rev. E* **96** 012153
- [52] Ribeiro P, Vidal J, Mosseri R 2008 *Phys. Rev. E* **78** 021106
- [53] Shao J S, Schwarz W H E 1996 *Phys. Rev. B* **53** 12220
- [54] Jahnke T, Lanéry S, Mahler G 2011 *Phys. Rev. E* **83** 011109
- [55] Zhang N, Chen C, Bai S Y, Wu W, An J H 2022 *Phys. Rev. Appl.* **17** 034073
- [56] Salvatori G, Mandarino A, Paris M G A 2014 *Phys. Rev. A* **90** 022111
- [57] Yu M, Nguyen H C, Nimmrichter S 2024 *Phys. Rev. Res.* **6** 043094
- [58] Jaseem N, Omkar S, Shaji A 2018 *J. Phys. A: Math. Theor.* **51** 175309
- [59] Wu W, Shi C 2021 *Phys. Rev. A* **104** 022612
- [60] Zanardi P, Paris M G A, Campos Venuti L 2008 *Phys. Rev. A* **78** 042105
- [61] Invernizzi C, Korbman M, Campos Venuti L, Paris M G A 2008 *Phys. Rev. A* **78** 042106
- [62] Takeda K, Matsukawa S, Haseda T 1971 *J. Phys. Soc. Jpn.* **30** 1330
- [63] Xin X K, Zhang Z Z, Tan Q S, Wu W 2026 Under Review

SPECIAL TOPIC—The 80th Anniversary of Physics at Lanzhou University
Finite-temperature-criticality enhanced quantum metrology^{*}

XIN Xiankun WU Wei[†]

(*Gansu Provincial Research Center for Basic Disciplines of Quantum Physics, Key Laboratory of Theoretical Physics of Gansu Province, Lanzhou Center for Theoretical Physics, Key Laboratory of Quantum Theory and Applications of Ministry of Education, School of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*)

(Received 30 April 2026; revised manuscript received 26 May 2026)

Abstract

Quantum metrology exploits quantum-mechanical principles and certain non-classical resources to achieve high-precision parameter estimation that surpasses the classical shot-noise limit. Quantum criticality is one of the most common resources and is widely used in various protocols of quantum metrology. However, in practical settings, the quantum probe inevitably interacts with its environment, and the environmental thermal noise typically degrades or even completely destroys the quantum advantage established by criticality. As a consequence, most existing criticality-enhanced schemes are limited to zero or ultra-low temperatures, which severely restricts their experimental feasibility. To address this issue, we propose a unified critical metrology scheme based on a pure-dephasing-type probe-reservoir interaction, which is immune to the decoherence induced by thermal noise. In our scheme, we employ a spin-chain probe to sense the temperature of a dissipative bosonic reservoir. Going beyond the conventional approaches that rely on the weak-coupling approximation, we account for the strong probe-reservoir coupling effect via a polaron transformation, which fully decouples the probe and the reservoir. Our analysis reveals that the strong coupling induces a thermal phase transition within the standard framework of Landau mean-field theory. At the critical temperature, we find that both the quantum Fisher information and the signal-to-noise ratio exhibit a power-law divergence. Our criticality-enhanced scheme eliminates the stringent requirement for cooling and can be generalized to the case of dissipation-type interaction. These findings significantly broaden the scope of critical metrology and offer a practical route toward high-precision quantum metrology under realistic conditions.

Keywords: critical metrology, quantum thermometry, quantum Fisher information

DOI: [10.7498/aps.75.20260624](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260624)

CSTR: [32037.14.aps.75.20260624](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20260624)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12375015, 12247101), the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. lzujbky-2025-jdxx07), the Science and Technology Leading Talent Support Program of Gansu Province, China (Grant No. 26RCKA011), the Natural Science Foundation of Gansu Province, China (Grant Nos. 22JR5RA389, 25JRRA799), and the “111Center” (Grant No. B20063).

[†] Corresponding author. E-mail: wuw@lzu.edu.cn