

塞曼晶格中自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚的基态和元激发 *

刘科验¹⁾ 赵雨婕¹⁾ 程海玉¹⁾ 戴婷¹⁾ 何华鑫^{2)†}

1) (嘉兴南湖学院机电工程学院, 嘉兴 314001)

2) (嘉兴大学全省多模态感知与智能系统重点实验室, 嘉兴 314001)

本文系统研究了一维塞曼晶格中拉曼诱导自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的基态性质及其元激发。通过分析单粒子能带结构, 揭示了晶格势与自旋轨道耦合之间的竞争如何导致准动量分布的非平庸重构, 并发现准动量随拉曼耦合强度演化过程中呈现显著的复归行为, 同时阐明了布里渊区边界处由对称性保护的能带简并机制。在考虑多体相互作用时, 结合变分方法与 Gross-Pitaevskii 方程, 系统刻画了包括带边态、单动量布洛赫态、条纹态及带中心态在内的完整基态相图。进一步基于 Bogoliubov-de Gennes 理论计算元激发谱, 并获得对应的密度与自旋结构因子。上述结果为理解人造规范场中超冷原子体系的量子相变及其集体激发提供了理论依据。

关键词: 塞曼晶格, 自旋轨道耦合, 玻色-爱因斯坦凝聚, 基态, 元激发

PACS: 67.85.Hj, 03.75.Kk, 71.70.Ej

1 引言

周期势与自旋轨道耦合是现代凝聚态物理的两大基石, 二者的相互作用催生了包括合成规范场^[1-5]、光通量晶格^[6]、拓扑量子物态^[7-9] 以及超固体^[10,11] 在内的诸多前沿研究方向。超冷原子量子模拟平台的迅速发展, 使得在高度纯净、可精确操控的环境中研究这些基本物理效应成为可能^[12-14]。尤其是合成规范场技术的突破性进展, 克服了中性原子无法直接耦合电磁场的限制, 实现了人工自旋轨道耦合, 从而为在原子气体中模拟拓扑绝缘体、拓扑超导体等新奇量子相提供了全新的途径^[15-18]。依托这一高度可控的

† 通信作者. E-mail: xinphysics@zjxu.edu.cn (通信作者)

第一作者. E-mail: liukeyan@jxnhu.edu.cn (第一作者)

* 浙江省教育厅科研项目 (批准号: Y202558526)、国家级大学生创新创业训练计划项目 (批准号: 202513291018).

平台，近期的研究更是将自旋轨道耦合玻色气体的探索边界，从基态相图拓展到了涵盖超固体激发、非厄米动力学以及量子多模传感等在内的前沿领域^[10,19-23]。

在这些由人工规范场主导的晶格系统中，自旋轨道耦合与粒子间相互作用及晶格势的竞争诱导了极为丰富的物理现象^[24]。在强关联的莫特绝缘体区域，自旋轨道耦合通过重整原子间的隧穿动力学，深刻改变了体系的量子磁性^[25]。这种由人工规范场诱导的各向异性相互作用打破了传统的自旋旋转对称性，致使玻色-哈伯德模型中涌现出螺旋磁序、手性磁纹等新奇量子相^[26,27]。除强关联效应外，自旋轨道耦合对布洛赫能带结构的重塑作用同样显著：通过调节晶格深度与耦合强度，最低能带可趋于平坦或演化出多重能量极小值，导致有效质量发散并伴随分数化电荷等奇异效应^[28-32]。这种能带工程为基态相图的丰富性奠定了物理基础。此时体系中存在平面波相、条纹相以及公度—非公度超固态等多种竞争有序相，它们之间复杂的量子相变往往伴随着独特的磁结构特征^[33-38]。在这些非平庸基态之上，体系的元激发与动力学性质也呈现出独特行为：一方面，元激发谱中出现的赝戈德斯通模式及多重旋子能隙，直接关联于超流各向异性或平移对称性的破缺^[39-42]；另一方面，布洛赫振荡表现出显著的反常动力学特征，已成为探测晶格几何与能带拓扑性质的重要手段^[43-45]。实验方面也取得了突破性进展：利用移动光晶格技术，验证了自旋轨道耦合导致的伽利略不变性破缺^[4]；同时，通过精确耦合最低能带的动量谷，实验上成功观测到了长寿命的条纹超流态^[11]，并探测了动量空间中新奇的约瑟夫森隧穿动力学^[46]。

不同于传统光晶格方案，塞曼晶格通过对不同自旋组分施加反相周期性调制，引入了全新的自旋依赖势场结构，这使其在探索新奇量子效应方面展现出不可替代的实验优势^[2,3]。特别是在基于几何泵浦的拓扑电荷输运^[47]、利用 Floquet 工程动力学调控能带拓扑^[8]，以及最近关于伽利略不变性的动力学恢复实验^[48]中，塞曼晶格均展现出独特的物理价值与实验优势。此外，得益于灵活的实验操控技术，包括调节有效晶格势、引入脉冲梯度磁场或双拉曼耦合方案等^[49-52]，该体系已被成功推广，用于构筑更为复杂的高维光通量几何与人工规范场结构。这些实验突破进一步激发了广泛的理论关注，相关研究已深入到塞曼晶格中受对称性保护的拓扑边缘态^[7]、非公度耦合诱导的安德森局域化效应^[53]以及螺旋耦合背景下具有自旋织构的孤子动力学^[54]等。尽管当前对该类体系的基态相图与元激发已有初步认识，但现有工作主要聚焦于依赖拉曼耦合强度空间调制（即 σ_x 或 σ_y 耦合）形成的晶格结构^[55]。这类晶格本质上通过空间依赖的自旋翻转项实现分量间的相干耦合，其系统通常受横向自旋空间中的连续或离散旋转对称性主导。相比之下，以 σ_z 势场调制为特征的塞曼晶格呈现出截然不同的物理图像：它本身并不驱动自旋翻转，而是通过提供空间周期性的有效纵向磁场，直接调制两自旋分量的局域能量劈裂。这种周期性的有效失谐与拉

曼诱导的自旋轨道耦合相互竞争，不仅赋予了系统有别于前者的对称性结构（如时间反演与晶格平移的特定复合对称性），还将导致能带简并机制、准动量分布及多体基态相图的显著改变。然而，目前针对该类基于 σ_z 调制的塞曼晶格体系，其基态性质与动力学激发仍缺乏系统的理论研究。

本文系统研究了一维塞曼晶格中拉曼诱导自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的基态性质与元激发动力学。首先在单粒子层面，揭示了 σ_z 调制下由 PT 对称性与扩展反射对称性共同保护的布里渊区边界能带简并机制。该对称性特征导致基态准动量随参数演化呈现出非单调的复归行为，其本质源于能带极小值在动量空间中的重构。其次在多体层面，结合变分法与 Gross-Pitaevskii (GP) 方程构建了完整的基态量子相图。结果表明，系统可稳定存在带边态、单动量布洛赫态、带中心态及条纹态，各相之间的竞争与转变不仅受相互作用调控，亦受制于底层能带结构与对称性约束。最后，基于 Bogoliubov-de Gennes (BdG) 理论计算了各相的低能元激发谱。通过系统分析静态密度结构因子与自旋结构因子，阐明了不同量子相的动力学响应特征及其在布拉格谱学实验中的可观测信号。上述结果为实验上探测并区分不同量子相提供了系统的理论支撑。

2 模型

我们研究了一个位于沿 x 方向的自旋相关周期势（即塞曼晶格）中的双组分玻色-爱因斯坦凝聚体。系统的两个内态通过双光子拉曼跃迁耦合，同时在 x 方向产生有效的自旋轨道耦合，其单粒子哈密顿量可写为^[43,56]：

$$H_{\text{sin}} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{\hbar k_R}{m} p_x \sigma_z + \frac{\Omega_R}{2} \sigma_x + V_{\text{ZL}} \cos(2k_L x) \sigma_z, \quad (1)$$

其中 $p_x = -i\hbar\nabla_x$ 为沿 x 方向的动量算符， $\hbar$ 为约化普朗克常数， $\hbar k_R$ 为拉曼过程产生的反冲动量。有效拉曼耦合强度 $\Omega_R = \Omega_1 \Omega_2 / (2\hbar\Delta)$ 来源于两个拉比频率为 Ω_1 和 Ω_2 的拉曼光束之间的相干干涉，并通过单光子失谐 Δ 调控，通常取拉比频率为实数。对应的反冲能量定义为 $E_R \equiv \hbar^2 k_R^2 / (2m)$ ，其中 m 为原子质量。哈密顿量最后一项表示系统所感受到的周期势，可通过施加自旋依赖的光学晶格实现，此时两种自旋分量感受到相位相反的周期结构， V_{ZL} 表示塞曼晶格的势强度^[57,58]。以 ^{87}Rb 原子的超精细态为例，晶格的自旋相关性由激光线偏振方向之间的夹角控制：夹角不为零时晶格具有自旋相关性；夹角为零则晶格变为自旋无关^[57]。为了简化分析，我们选择双组分失谐为零。

塞曼晶格中自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚的基态和动力学可由 GP 方程描述^[15-17]：

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [H_{\text{sin}} + H_{\text{non}}] \Psi, \quad (2)$$

其中 $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ 为两个超精细态的波函数。该波函数在晶格原胞内满足归一化条件 $\int_{\text{cell}} dx (|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2) = N$, N 表示原胞内的原子数。非线性项 H_{non} 表征了原子间的接触相互作用:

$$H_{\text{non}} = \begin{pmatrix} g_{11}|\Psi_1|^2 + g_{12}|\Psi_2|^2 & 0 \\ 0 & g_{22}|\Psi_2|^2 + g_{12}|\Psi_1|^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中 $g_{ij} = 2\hbar a_{ij} N \sqrt{\omega_y \omega_z}$ 是一维有效相互作用强度, a_{ij} 为 s 波散射长度, ω_y 和 ω_z 是横向约束频率, 令 $\omega_x \ll \omega_y \approx \omega_z$, 这可使系统有效简化为准一维形式。

为了便于数值计算, 我们对方程 (1) 进行无量纲化, 具体单位为: 长度单位 $x_{\text{unit}} = (2k_L)^{-1}$, 时间单位 $t_{\text{unit}} = (8\omega_L)^{-1}$, 能量单位 $E_{\text{unit}} = 8E_L$, 其中 $E_L = \hbar^2 k_L^2 / (2m)$ 为晶格反冲能量, $\omega_L = E_L / \hbar$ 为对应频率。经过无量纲化后, 单粒子哈密顿量为:

$$H_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \sigma_z + \frac{\Omega}{2} \sigma_x + V \cos(x) \sigma_z, \quad (4)$$

其中 $\gamma = k_R / (2k_L)$ 描述自旋轨道耦合的相对强度, $\Omega = \Omega_R / E_{\text{unit}}$ 和 $V = V_{\text{ZL}} / E_{\text{unit}}$ 分别为无量纲化后的拉曼耦合强度和晶格势强度。同时我们令散射长度 $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a$ 以方便数值求解。这一简化在物理上是合理的, 因为在许多超冷原子实验 (最典型的如 ^{87}Rb) 中, 组分间与组分内的散射长度差异很小。此时非线性项简化为 $H_{\text{non}} = g(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)I$, 其中 I 为单位矩阵, ψ_1, ψ_2 为无量纲波函数, 无量纲相互作用强度为 $g = \frac{Nm\sqrt{\omega_y \omega_z}}{\hbar k_L} a$ 。

3 单粒子效应

3.1 对称性保护的简并

在未引入拉曼耦合 ($\Omega_R = 0E_R$) 的均匀自旋轨道耦合系统中, 其能带结构如图 1(a) 和 1(c) 中的红色与绿色曲线所示, 表现为两条因自旋轨道耦合而发生相对平移的抛物线, 各自最小值点平移至 $k = \pm k_R$ 处 (红色垂直实线)。这两条能带在布里渊区 (Brillouin zone, BZ) 中心 ($k = 0$) 处相交, 形成一处简并点。当引入周期性的塞曼晶格 $H_{\text{ZL}} = V_{\text{ZL}} \cos(2k_L x) \sigma_z$, 其中 $V_{\text{ZL}} = 1E_R$, 系统的连续平移对称性被破缺, 仅保留离散平移对称性。这一对称性破缺直接导致了能带折叠效果, 同时伴随着能带交叉处简并的打开: 如图中黑色弯曲箭头所示, 原本连续的能谱被折叠进以 $k = \pm k_{\text{BZ}}$ 为边界的第一 BZ 中; 进一步, 由于自旋轨道耦合导致了两个组分能带的平移, 折叠后出现能及交叉的地方出现在了 BZ 中心处 (相对于无自旋轨道耦合情况首先发生在 BZ 边界处); 如图 1(a) 和 1(c) 中蓝色箭头所示, 塞曼晶格势作为一种在实空

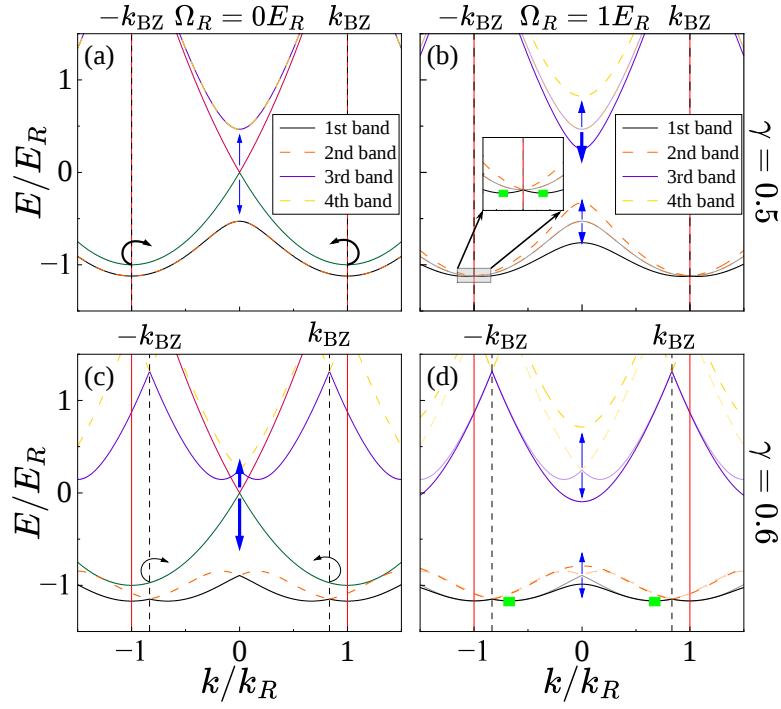


图 1: 对称性保护简并示意图。(a)(c) 绿色和红色实曲线表示自由空间单粒子自旋轨道耦合色散关系, 即 $V_{ZL} = 0E_R$ 。不同颜色和线形表示引入塞曼晶格 $V_{ZL} = 1E_R$ 后的能带结构, 黑色弯曲箭头表示能带折叠示意, 蓝色箭头表示简并被打开; (b)(d) 中表示分别进一步引入拉曼耦合 $\Omega_R = 1E_R$ 后, 能带结构的前后变化, 蓝色箭头表示, 能带简并被进一步打开, 绿色方块表示最低能带上极小值出现的位置。

间周期性的耦合, 能够在倒空间中原本简并的布里渊区中心 ($k = 0$) 处解除简并。特别的, 同时注意到, 不同的 γ 显著影响着能带形状, 图 1(a) 中给出了 $\gamma = 0.5$ 这等效于塞曼晶格周期性和自旋轨道耦合的完美匹配, 即 $k_R = k_L = k_{BZ}$, 塞曼晶格波矢恰好补偿自旋轨道耦合对应的动量差, 在未引入耦合前不会发生自旋混合, 所以在图中折叠后第 1 与第 2 支能带、第 3 与第 4 支能带完全重合简并; 而图 1(c) 所示为 $\gamma = 0.6$ 的情况, 此时 $k_L = k_{BZ} < k_R$, 能带的形状发生了复杂的折叠, 但高对称点 (BZ 中心和 BZ 边界) 处始终简并在一起。

进一步地, 如图 1(b) 和 1(d) 中的蓝色箭头所示, 引入拉曼耦合 ($\Omega_R = 1E_R$) 将会导致 BZ 中心处的高对称点打开简并, 而 BZ 边界处始终保持简并状态。对于 $\gamma = 0.5$ 情况, 可以看出非高对称点处的简并也被打破, 且伴随极小值点偏离高对称点。这一现象归因于单粒子色散关系的极小值点满足 $k_{\min}/2k_L \approx \gamma(1 - \Omega^2/8\gamma^4)$ 。已有研究表明^[43,59], 这种简并保护塞曼晶格的独特性在于其非平庸的内部对称性。哈密顿量 H_{sin} 不仅具有 σ_z 耦合项, 还因此继承了复杂的非点空间群对称性。此系统存在两个关键的对称性算符:

1 PT 对称性: $\alpha_1 = PT$ 。此处 P 为宇称算符 ($P\Psi(x) = \Psi(-x)$) 表示进行在 $x = 0$ 处的反射操作; T 为非线性的复共轭算符 ($T\Psi(x) = \Psi^*(x)$), 表示了单组份系统的时间反演, 并未考虑自旋交换性。此对称性 α_1 是自旋轨道耦合项、拉曼耦合项以及塞曼晶格项, 这三个自旋相关项在 PT 联合变换下保持不变的结果, 即满足与系统哈密顿量的对易关系 $[H_0, \alpha_1] = 0$ 。

2 扩展反射对称性: $\tilde{\alpha}_2 = \sigma_x \tilde{P}$ 。此处 $\tilde{P}$ 是一个空间反射算符, 其反射中心位于 $x = \pi/2$ (即晶格势能的“反节点”)。 $\tilde{\alpha}_2$ 之所以是一个对称性, 是因为 σ_z 耦合的晶格势 H_{ZL} 在 $\tilde{P}$ 反射下会反号 ($\tilde{P}H_{ZL}\tilde{P}^{-1} = -H_{ZL}$), 而这个反号恰好被 σ_x 算符的自旋反转变换所抵消 ($\sigma_x H_{ZL} \sigma_x^{-1} = -H_{ZL}$)。

在 BZ 的任意 k 点, 两种对称性都成立。然而, 在 BZ 边界 $k = k_{BZ}$ 处, 一个额外的约束——Floquet 定理——开始生效。此时波函数必须满足平移一个晶格周期 $L = 2\pi$ 的反周期条件:

$$T_{2\pi}\Psi_{k_{BZ}}(x) = \Psi_{k_{BZ}}(x + 2\pi) = -\Psi_{k_{BZ}}(x) \quad (5)$$

这导致了对称性之间的不兼容。正如参考文献^[43,59]指出: 若假设 BZ 边界处的能态是非简并的, 则该本征态必须同时为 α_1 、 $\tilde{\alpha}_2$ 与 $T_{2\pi}$ 的共同本征态。然而, 这三个对称操作 ($\alpha_1, \tilde{\alpha}_2, T_{2\pi}$) 所对应的代数约束相互冲突, 使得任何非零波函数 $\Psi(x)$ 无法同时满足所有条件。这一矛盾说明, 原先的非简并假设并不成立。因此, 系统在 BZ 边界 $k = k_{BZ}$ 处必然存在简并。在此, 我们进一步指出, 该简并实际起源于 BZ 边界处, 由联合对称操作 $S = \alpha_1 \tilde{\alpha}_2$ 所触发的克莱默斯定理 ($S^2 = T_{2\pi} = -1$), 从而形成一种对称性保护的简并态。

3.2 基态动量的分布区域

为了理解塞曼晶格系统中通过能带极小值的变化进行相分类的机制, 我们首先考虑在均匀空间中单粒子能带的特点。通过对角化其单粒子哈密顿量 H_{sin} 可以获得最低支色散关系为^[56,60]

$$E_- = \frac{1}{2} \left(k^2 - \sqrt{4k^2\gamma^2 + \Omega^2} \right), \quad (6)$$

当 $\Omega_R < 4E_R = 2\gamma^2 \cdot E_{\text{unit}} = \Omega_c^{\text{IC}} \cdot E_{\text{unit}}$, 极小值点位于 $k_{\text{min}}/2k_L = \pm \frac{\sqrt{4\gamma^4 - \Omega^2}}{2\gamma}$ 。超过临界值 Ω_c^{IC} 后, 极小值固定到 $k_{\text{min}} = 0$ 处。

接下来考虑塞曼晶格存在情况下, 根据能带极小值位置 k_{min} , 我们绘制了如图 2 所示的基态相图。图中颜色映射表征了动量极小值的绝对值 $|k_{\text{min}}|/k_{BZ}$, 横纵坐标分别对应拉曼耦合强度 Ω_R 和塞曼晶格强度 V_{ZL} 。理论分析表明, 系统的相变行为主要由自旋轨道耦合参数 $\gamma = k_R/(2k_L)$ 决定, 该参数反映了自旋轨

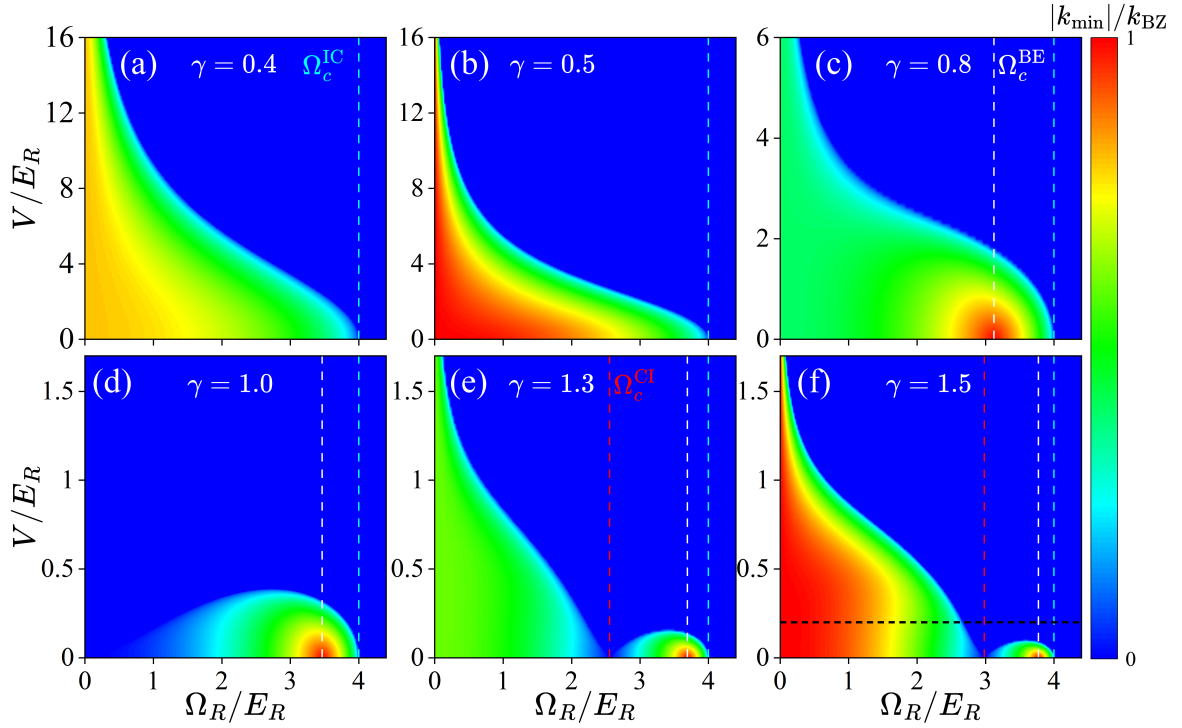


图 2: 单粒子塞曼晶格系统的基态动量分布。(a)-(f) 展示了不同周期性塞曼晶格下系统能带极小值 $k_{\min}/k_{\text{BZ}}$ 的分布特征。其中, (b) $\gamma = 0.5$ 、(d) $\gamma = 1.0$ 和 (f) $\gamma = 1.5$ 分别对应自旋轨道耦合效应与 H_{ZL} 完美匹配的三种特殊情形。图中垂直虚线标示了理论预测的临界转变点: 浅蓝色虚线 Ω_c^{IC} 表示系统从中间极小值区域 (Intermediate Minimum Region, IMR) 向中心极小值区域 (Center Minimum Region, CMR) 过渡的临界值; 白色虚线 Ω_c^{BE} 对应系统动量极小值无限趋近于边带极小值区域 (Band Edge Region, BER) 的位置; 红色虚线 Ω_c^{CI} 表示系统从 CMR 重入 IMR 的临界值。

道耦合动量转移与晶格倒格矢之间的匹配程度。以 $\gamma = 0.5$ 和 $\gamma = 1$ 为临界点, 系统展现出三个截然不同的物理区域。

首先考察有限塞曼晶格强度 $V_{\text{ZL}} \approx 0$ 附近的相变行为。在弱自旋轨道耦合区域 ($\gamma \leq 0.5$, 即 $k_{\text{R}} \leq k_{\text{L}}$), 自旋轨道耦合效应相对较弱。随着拉曼耦合强度 Ω_{R} 的增加, 拉曼项 $\Omega_{\text{R}}\sigma_x/2$ 诱导的自旋交换作用倾向于压低能带中心, 导致系统从基态动量位于第一布里渊区内部的中间极小值区域 (Intermediate Minimum Region, IMR) 逐渐过渡到被锁定在 $k_{\min} = 0$ 的中心极小值区域 (Center Minimum Region, CMR)。根据单粒子能带理论, 这一相变发生的临界拉曼耦合强度由 $\Omega_c^{\text{IC}} = 2\gamma^2$ 给出 [图 2(a) 中浅蓝色垂直虚线标志]。特别地, 对于 $\gamma = 0.5$ 的情形, 塞曼晶格周期性与自旋轨道耦合动量偏移完全匹配。尽管系统此时不受额外能带折叠的影响, 但仍遵循从双极小值向单极小值转变的规律。在此过程中, 极小值位置逐渐趋近布里渊区边界 ($k_{\min} \rightarrow k_{\text{BZ}}$)。值得注意的是, 由于能带在边界处存在简并, 当拉曼耦合 Ω_{R} 与塞曼晶格 V_{ZL}

共同作用时，边界附近的简并被打开，使得该区域转化为能带极小值点。这在动量分布图中表现为显著的红色区域，但严格来说，动量分布图中并不存在精确满足 $k_{\min} = k_{\text{BZ}}$ 的点，即不存在严格意义上的带边极小值区域 (Band Edge Region, BER)，这是系统极小值处于布里渊区边界的情况。所以此情况下系统在 $\Omega_R \rightarrow 0E_R$ 附近始终处于向边界态逼近的过程中，即 $k_{\min} \approx k_{\text{BZ}}$ 。

在中等自旋轨道耦合区域 ($0.5 < \gamma < 1$)，单粒子能带极小值点初始位于第一布里渊区外侧，但未超过第二布里渊区中心。增强拉曼耦合强度 Ω_R 驱使极小值点向 $k = 0$ 移动，在此过程中必然穿越布里渊区边界 $k = k_{\text{BZ}}$ 。结合前述关于简并点打开的讨论，这一穿越过程在相图中对应于一团红色区域 [如图 2(c) 中 $\gamma = 0.8$ 所示]，表示了 $k_{\min} \rightarrow k_{\text{BZ}}$ 的 BER 区域。理论推导表明，此穿越过程对应的临界拉曼耦合强度为 $\Omega_c^{\text{BE}} \approx \gamma\sqrt{(2\gamma+1)(2\gamma-1)}$ [图 2(c) 中白色垂直虚线标志]。随着 Ω_R 进一步增大并超过 Ω_c^{IC} ，系统最终进入零动量相。

当进入强自旋轨道耦合区域 ($\gamma \geq 1$) 时，相变机制更为丰富。对于 $\gamma = 1$ 的情况，单粒子极小值初始位于第二布里渊区中心。考虑到能带折叠效应，此时均匀空间色散关系中的 $k_{\min}$ 经过能带折叠效应等效为 $k = 0$ 处，满足 CMR 条件，对应的临界点为 $\Omega_c^{\text{CI}} = 2\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}$ [图 2(e,f) 中红色垂直虚线标志]。随着 Ω_R 增大，极小值点从第二布里渊区中心向第一布里渊区演化，系统重演了 $0.5 < \gamma < 1$ 区间的变化规律，依次经过临界点 Ω_c^{BE} 和 Ω_c^{IC} ，呈现出如图 2(d) 所示的结构。以 $\gamma = 1.3$ 为例，随着 Ω_R 的增加，能带极小值点经历了一系列复杂的迁移：从第二布里渊区中心附近出发，移向第一布里渊区边界，穿越边界后最终抵达第一布里渊区中心。这一过程分别对应了三个关键临界点 Ω_c^{CI} 、 Ω_c^{BE} 和 Ω_c^{IC} ，形象地展示了不同动量分布区域的重入特性。最后，在 $\gamma = 1.5$ 的情况下，由于系统初始状态即处于第二布里渊区边界，相图中呈现出大面积的红色区域，即 BER，随后重复上述的演化路径。

综合观察图 2 可以发现，较强的塞曼晶格势 ($V_{\text{ZL}} \gg 0$) 会显著打开布里渊区中心的第一重简并，进一步压低中心处能带能量。这种效应导致系统在较小的拉曼耦合下即可进入 CMR 阶段，从而压缩了其他动量类型的存在范围。

综上所述，能带折叠效应使得动量分布图展现出丰富的重入现象。这些结果清晰地表明，通过调节拉曼耦合强度和塞曼晶格深度，可以灵活调控塞曼晶格系统中的基态动量，同时也深刻揭示了晶格周期性与自旋轨道耦合之间非平庸的相互作用机制。

4 多体相图与元激发

4.1 多体相图

系统的基态量子相对应于玻色原子凝聚在最低布洛赫能带能量极小值处的布洛赫态。为了描述这些量子态，我们采用如下变分波函数拟设：

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} = e^{ik_c x} u_{+k_c}(x) + e^{-ik_c x} u_{-k_c}(x). \quad (7)$$

其中， $u_{\pm k_c}(x)$ 表示准动量为 $\pm k_c$ 的布洛赫态的周期部分，在平面波基底上可以展开成以下形式：

$$u_k(x) = \sum_{n=-L}^L \begin{pmatrix} a_{n,k} \\ b_{n,k} \end{pmatrix} e^{i2n k_R x}, \quad (8)$$

这里 L 为平面波展开的截断阶数， $a_{n,k}$ 和 $b_{n,k}$ 为展开系数。变分波函数中的未知参数 k_c 、 $a_{n,\pm k_c}$ 和 $b_{n,\pm k_c}$ 需通过最小化与 GP 方程相关的能量泛函 $\mathcal{E}$ 来确定：

$$\mathcal{E} = \int dx \left\{ \Psi^\dagger H_{\text{sin}} \Psi + \frac{g}{2} \sum_{i,j=1}^2 |\Psi_i|^2 |\Psi_j|^2 \right\}. \quad (9)$$

将变分波函数代入能量方程，我们通过求解 $\partial \mathcal{E} / \partial \Lambda = 0$ 来确定系统的基态构型，这里的 Λ 指的是所有的变分参数 $\{k_c, a_{n,\pm k_c}, b_{n,\pm k_c}\}$ 。尽管这里的拟设将两个布洛赫态写为直接求和的形式，但系统在两个动量分支上的布居数分布并非固定的。实际上，系数 $a_{n,\pm k_c}$ 和 $b_{n,\pm k_c}$ 在变分过程中会自发调整，从而在数值上吸收了两个分量之间可能存在的振幅差异。这保证了我们可以用统一的框架描述满足不同对称性的量子相。

对量子相的界定，既需要解析其变分波函数的数学形式，又需要识别其内在的对称性破缺机制。鉴于自旋极化能够直接反映系统的磁序与对称性，为了提取直观的物理图景并精确刻画相变行为，我们进一步考察了系统的自旋极化特性 [33,55,60]

$$\langle \sigma_{x,z} \rangle = \int_{\text{cell}} \Psi^\dagger \sigma_{x,z} \Psi dx. \quad (10)$$

若量子相满足时间反演对称性 $\mathcal{T}$ ，则 $\langle \sigma_z \rangle = 0$ 。利用 Hellmann-Feynman 定理，我们有 $\partial \mathcal{E} / \partial \Omega_R = \langle \partial H_{\text{sp}} / \partial \Omega_R \rangle = \langle \sigma_x \rangle / 2$ 。这为我们提供了一个极其便利的判据：通过计算横向自旋极化 $\langle \sigma_x \rangle$ 随参数变化的轨迹，若 $\langle \sigma_x \rangle$ 表现出跳跃性中断，系统即发生一级相变；若其保持连续，则表明发生了连续相变。

因此，我们可以定义以下四类基态相 [33,55]。(1) 带边态对应于凝聚发生在布洛赫能带的边界处，动量分布属于 BER，即 $k_c = k_R$ ，其自旋极化 $\langle \sigma_z \rangle = 0$ ，保持时间反演对称性；(2) 带中心态对应于凝聚发生

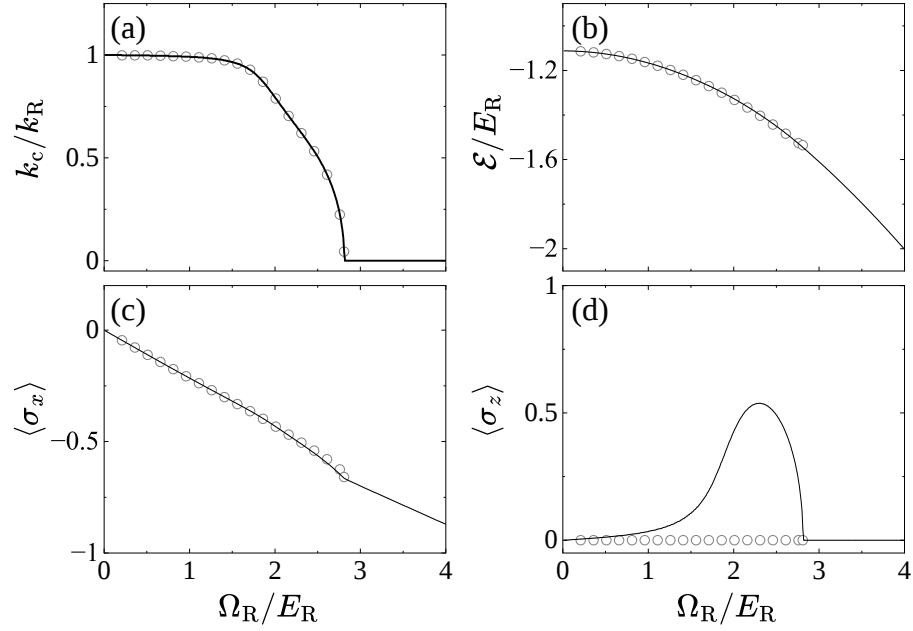


图 3: 在固定塞曼晶格深度 $V_{\text{ZL}}/E_R = 0.2$ 且相互作用强度 $gk_R/E_R = 0.1$ 的条件下, 各物理量随拉曼耦合 Ω_R 的变化关系。(a) 凝聚准动量 k_c 随 Ω_R 的变化, 其中 $k_c/k_R = 1$ 和 $k_c/k_R = 0$ 分别对应带边态和带中心态, 中间区域为单动量布洛赫态。(b)-(d) 分别显示能量 E 、极化强度 $\langle\sigma_x\rangle$ 和 $\langle\sigma_z\rangle$ 随 Ω_R 的变化。(a)-(d) 中, 灰色圆圈对应的是条纹态的情况。

在能带中心 $k_c = 0$, 动量分布属于 CMR, 同样满足 $\langle\sigma_z\rangle = 0$, 在该区域中拉曼耦合占主导, 使得体系具有确定的横向自旋极化; (3) 单动量布洛赫态是指凝聚于某一有限但非零、非带边的准动量 $k_c \neq 0, k_R$, 动量分布属于 IMR, 其基态由单一准动量布洛赫态构成, 从而自发破缺时间反演对称性并产生非零的 $\langle\sigma_z\rangle$; (4) 条纹态则是由时间反演相关联的两个布洛赫态, 其动量分布也属于 IMR, 即 $\pm k_c$ 等权叠加形成。此条纹态整体保持时间反演对称性, 自旋极化为零, 但由于两种动量分量的相干叠加, 密度呈现出空间周期调制的条纹结构。

应用前述变分方法并结合量子相分类, 在晶格深度固定为 $V_{\text{ZL}}/E_R = 0.2$ 、 $\gamma = 1.5$ 的条件下, 我们系统研究了通过调节拉曼耦合强度 Ω_R 所诱导的基态相结构演化与相变行为。该参数扫描对应于图 2(f) 所示 $(\Omega_R, V_{\text{ZL}})$ 相图中的一条水平黑色虚线, 其数值结果汇总于图 3。其中, 实线表示带边态、单动量布洛赫态以及带中心态的变分结果, 而空心圆对应条纹态。由于相互作用强度取相等且较弱的数值, 条纹态与单动量布洛赫态在凝聚动量与能量上几乎完全重合。

如图 3(a) 所示, 在小 Ω_R 区域, 体系的最优凝聚动量始终锁定在布里渊区边界, 满足 $k_c/k_R = 1$, 表明基态处于带边态。此时, 两自旋组分的密度分布完全相同, 即 $n_1(x) = n_2(x)$, 从而 $\langle\sigma_z\rangle = 0$, 时间反演对称性得以保持。该相的空间周期性与 ZL 相一致, 反映出晶格势在这一参数区域内占据主导作用。随着

Ω_R 的增大, 凝聚动量逐渐偏离带边并连续减小。在这一中间区域, 由于单粒子哈密顿量 H_{sin} 的最低能带出现两个对称且等价的能量极小值 [见图 1(c,d)], 体系中可能的状态, 即单动量布洛赫态和条纹态之间存在竞争。需要指出的是, 在种间和种内相互作用强度相等且较弱的条件下, 单动量布洛赫态与条纹态对应的最优凝聚动量 k_c 几乎完全一致, 其基态能量亦高度简并。因此, 在图 3 中, 条纹态 (空心圆) 与单动量布洛赫态 (实线) 在计算中基本重合, 这是自旋轨道耦合玻色体系弱相互作用极限下的典型特征。相比之下, 在种间和种内相互作用不相等的情况下, 该简并性会被显著破坏, 并导致相变边界发生明显偏移。当 Ω_R/E_R 进一步增大时, 凝聚动量连续地趋近于零, 体系转变为带中心态, 对应于布洛赫带中心凝聚。综上所述, 随着 Ω_R 的增加, 基态依次经历带边态、单动量布洛赫态/条纹态以及带中心态之间的连续演化过程, 并与图 2(f) 所示的单粒子相图边界保持良好一致性, 表明弱且相等的相互作用不会从根本上改变单粒子能带所决定的相结构。

此外, 如图 3(b-d) 所示, 基态能量 $\mathcal{E}$ 随 Ω_R 的变化始终保持连续, $\langle\sigma_x\rangle$ 亦随之平滑演化, 而有限的 $\langle\sigma_z\rangle$ 仅出现在具有动量简并的中间区域。这些结果清楚地表明, 上述不同量子相之间的转变均为二级相变, 这与自旋轨道耦合光晶格体系中已有的理论分析与实验观测结果相一致。

4.2 元激发

在系统分析了不同参数区域内的基态相结构及其相变行为之后, 进一步考察这些量子相在低能激发层面的动力学特征是十分必要的。元激发谱不仅反映了基态的稳定性与内在对称性, 而且决定了体系在外部扰动下的线性响应行为, 是刻画不同量子相的重要物理量 [35,61–63]。与此同时, 元激发所对应的结构因子在实验上可通过布拉格散射、调制谱以及时间飞行成像等手段直接测量, 从而为本文所讨论的相结构与相变性质提供了可实验验证的观测窗口 [64]。

根据前述基态相图, 体系中共存在带边态、单动量布洛赫态、带中心态以及条纹态四种不同的量子相。其中, 带边态、单动量布洛赫态和带中心态的密度分布均与外加光晶格具有相同的空间周期性, 而条纹态则源于两个动量极小值的相干占据, 其空间周期由体系自身形成的条纹周期与晶格周期共同调制, 呈现出更为复杂的多周期结构。在 BdG 理论框架下, 描述元激发的 BdG 哈密顿量继承了基态的空间对称性, 因此本质上是一个周期函数, 其本征解可以写成布洛赫态形式。对于带边态、单动量布洛赫态和带中心态而言, 由于其基态周期与晶格周期一致, BdG 矩阵的周期性可以自然固定, 相应的元激发谱能够在标准的布洛赫基中方便地求解与分析。相比之下, 条纹相由于同时涉及晶格调制与自发形成的条纹周期, 其 BdG

哈密顿量具有多重空间周期性，使得元激发问题在数值实现和物理解析上都比较复杂^[65]。

因此，我们将主要关注带边态、单动量布洛赫态和带中心态的低能元激发性质及其对应的结构因子特征。通过对这三类具有相同晶格周期的量子相进行系统比较，我们进一步揭示自旋轨道耦合光晶格体系中不同基态相的动力学响应差异及其可实验探测的物理信号。

为了获得体系的低能元激发谱，我们在基态波函数的基础上引入具有确定准动量的微小扰动。具体而言，体系的时间依赖波函数可改写为

$$\begin{aligned}\Psi_1(x, t) &= e^{-i\mu t + ikx} \left[\phi_1(x) + u_1(x)e^{iqx - i\omega t} + v_1^*(x)e^{-iqx + i\omega^* t} \right], \\ \Psi_2(x, t) &= e^{-i\mu t + ikx} \left[\phi_2(x) + u_2(x)e^{iqx - i\omega t} + v_2^*(x)e^{-iqx + i\omega^* t} \right],\end{aligned}\quad (11)$$

其中 $e^{-i\mu t + ikx} [\phi_1(x), \phi_2(x)]^T$ 为满足 GP 方程的基态解， k 和 μ 分别表示凝聚体的准动量与化学势； q 为元激发的准动量， ω 为相应的激发频率或激发能量。 $u_j(x)$ 和 $v_j(x)$ 表示微扰振幅，满足归一化条件 $\sum_{j=1,2} \int dx (|u_j(x)|^2 - |v_j(x)|^2) = 1$ 。将上述波函数代入时间依赖的 GP 方程 [方程 (2)]，并仅保留关于 u_j 和 v_j 的线性项，可以得到 BdG 方程：

$$\omega \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathcal{H}_{\text{BdG}} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其中 BdG 哈密顿量可以写为

$$\mathcal{H}_{\text{BdG}} = \mathcal{L} + \frac{\Omega_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

第一项 $\mathcal{L}$ 描述了单粒子动力学、自旋轨道耦合项以及平均场相互作用对元激发的贡献，其具体形式为

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1(k, q) & g\Phi_1^2 & g\Phi_2^* \Phi_1 & g\Phi_1 \Phi_2 \\ -g\Phi_1^{*2} & -\mathcal{L}_1(-k, q) & -g\Phi_2^* \Phi_1^* & -g\Phi_2 \Phi_1^* \\ g\Phi_1^* \Phi_2 & g\Phi_1 \Phi_2 & \mathcal{L}_2(k, q) & g\Phi_2^2 \\ -g\Phi_1^* \Phi_2^* & -g\Phi_1 \Phi_2^* & -g\Phi_2^{*2} & -\mathcal{L}_2(-k, q) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

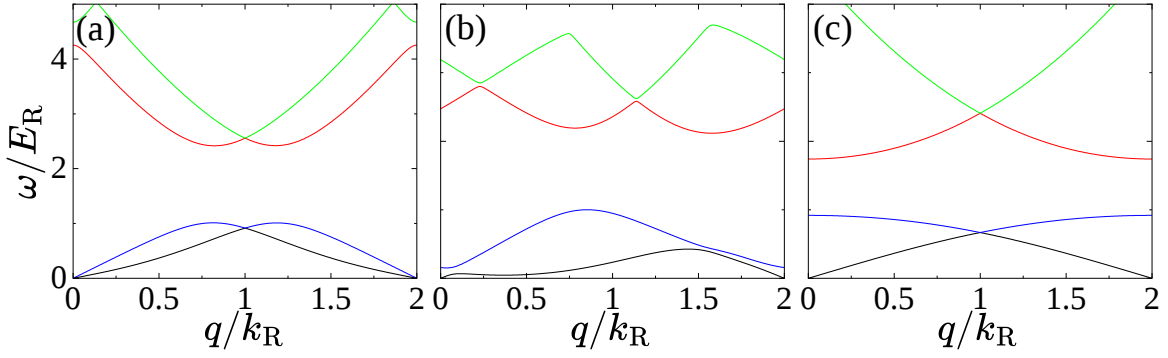


图 4: 元激发谱在不同凝聚态类型下的表现。(a) 带边态, 对应 $\Omega_R/E_R = 0.05$ 。图中展示了最低的四条能带。(b) 单动量布洛赫态, 对应 $\Omega_R/E_R = 2$ 。(c) 带中心态, 对应 $\Omega_R/E_R = 4$ 。其他参数均与图 3 相同。

其中对角元素

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(k, q) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i(k+q) \right)^2 - i\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + i(k+q) \right) + V \cos(x) \\ &\quad - \mu + 2g|\Phi_1|^2 + g|\Phi_2|^2, \\ \mathcal{L}_2(k, q) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i(k+q) \right)^2 + i\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + i(k+q) \right) - V \cos(x) \\ &\quad - \mu + 2g|\Phi_2|^2 + g|\Phi_1|^2,\end{aligned}$$

分别对应两个自旋组分在给定基态背景下的有效单粒子算符。通过对 BdG 哈密顿量 $\mathcal{H}_{\text{BdG}}$ 进行数值对角化, 可以获得体系在不同准动量 q 下的元激发谱 $\omega(q)$, 从而系统地刻画各个量子相的元激发的性质。

对带边态、单动量布洛赫态和带中心态而言, 由于其 BdG 哈密顿量具有与外加光晶格相同的空间周期性, 本征解可依照布洛赫定理表示为

$$\Phi(x) = \Phi_q(x)e^{iqx}, \quad (15)$$

其中 q 表示元激发的准动量, 而周期函数

$$\Phi_q(x) = [u_{1q}(x), u_{2q}(x), v_{1q}(x), v_{2q}(x)]^T, \quad (16)$$

满足与晶格势相同的空间周期性。基于这一布洛赫形式, 可以将周期函数 $\Phi_q(x)$ 进一步在平面波基中展开, 从而把原本的微分形式 BdG 方程转化为矩阵本征值问题。通过对该矩阵进行数值对角化, 即可获得体系在不同准动量 q 下的元激发能谱 $\omega(q)$, 进而系统刻画不同量子相的低能激发结构及其动力学响应特征。

图 4 给出了不同凝聚态构型下体系的元激发谱 $\omega(q)$: (a) 带边态, (b) 单动量布洛赫态, 以及 (c) 带中心态。各子图中展示了沿 x 方向准动量 q 的最低四条激发能带。值得注意的是, 在这三种凝聚态中, 最低激发分支在长波极限 $q \rightarrow 0$ 下均表现为无能隙的线性色散关系 $\omega(q) = cq$, 对应于全局 $U(1)$ 规范对称

性自发破缺所产生的声子型 Goldstone 模式，并可据此定义各相中的超流声速。对于带边态 [图 4(a)]，最低声子模之上还存在一条能量上非常接近但保持有限能隙的激发分支，其物理起源与自旋轨道耦合光学晶格体系中已实验观测到的带边态元激发结构一致^[11]。在相关工作中，该有隙模被解释为由近似连续对称性破缺所产生的伪 Goldstone 模式^[40]，并与最低声子模在有限动量处发生能量回避交叉，从而对动量空间中的动力学过程产生重要影响^[46,66]。在本文所考虑的参数区间内，带边态仅在较窄的参数范围内稳定存在，因此上述回避交叉结构在激发谱中并不十分显著，但其基本物理机制与已有自旋轨道耦合光学晶格体系中的结果是一致的。在单动量布洛赫态 [图 4(b)] 中，有限动量凝聚与自旋轨道耦合的共同作用显著改变了激发谱的对称性。可以看到，元激发能谱关于 $q \rightarrow -q$ 明显不对称，反映了该相基态中宇称和时间反演对称性的破缺。在长波极限下，最低激发分支依然保持声子型线性色散，但沿正、反方向传播的声子对应不同的声速，体现出低能激发的方向各向异性，这一特性与无晶格平面波相中的结果类似。此外，在有限 q 处出现旋子的极小值点，其能量在接近相变边界时逐渐降低，表明特定波矢处的集体模发生了软化。与无晶格体系相比，光学晶格的引入为调控声子模软化和旋转间隙的关闭提供了一种替代机制，这一点在多种自旋轨道耦合体系中已有相关讨论。相比之下，带中心态 [图 4(c)] 中的激发谱关于 q 保持对称，其低能行为与常规零动量超流体相似，仅体现为声子模的线性色散，显示出最为典型的超流元激发特征。

基本激发的性质在实验上可通过 Bragg 光谱学加以探测。该实验中，外加的周期性扰动能够选择性地激发具有确定准动量和能量的集体模，其激发效率由体系对密度或自旋密度扰动的线性响应所决定，并与结构因子成正比^[67]。因此，结构因子为连接 BdG 理论描述的元激发谱与实验可观测信号提供了关键桥梁。具体而言，在 BdG 理论框架下，对于准动量为 q 、能量为 ω_n 的第 n 条激发带，其对应的静态结构因子可定义为^[63,68]

$$\begin{aligned} S(q, \omega_n) &= \left| \int dx [\mathcal{P}(I \otimes I) \Phi_q^n(x)] \right|^2, \\ S_\sigma(q, \omega_n) &= \left| \int dx [\mathcal{P}(\sigma_z \otimes I) \Phi_q^n(x)] \right|^2, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 Φ_q^n [见方程 (16)] 表示具有准动量 q 和本征能量 ω_n 的 BdG 元激发本征态，指标 n 用以区分不同的激发能带。其中，算符 $\mathcal{P} = (\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_1, \phi_2)$ 。 I 表示 2×2 的单位矩阵，而符号 $\otimes$ 表示张量积。物理上， $S(q, \omega_n)$ 描述体系对标量密度扰动的响应，对应于密度型集体激发；而 $S_\sigma(q, \omega_n)$ 则刻画体系对自旋密度扰动的响应，反映自旋相关元激发的权重。这两类结构因子不仅决定了 Bragg 光谱实验中不同激发模的可见性，也为区分不同量子相及其低能激发特征提供了重要的实验判据。

图 5 展示了不同凝聚态构型下元激发谱对应的静态结构因子 $S(q, \omega_n)$ 与静态自旋结构因子 $S_\sigma(q, \omega_n)$ ，

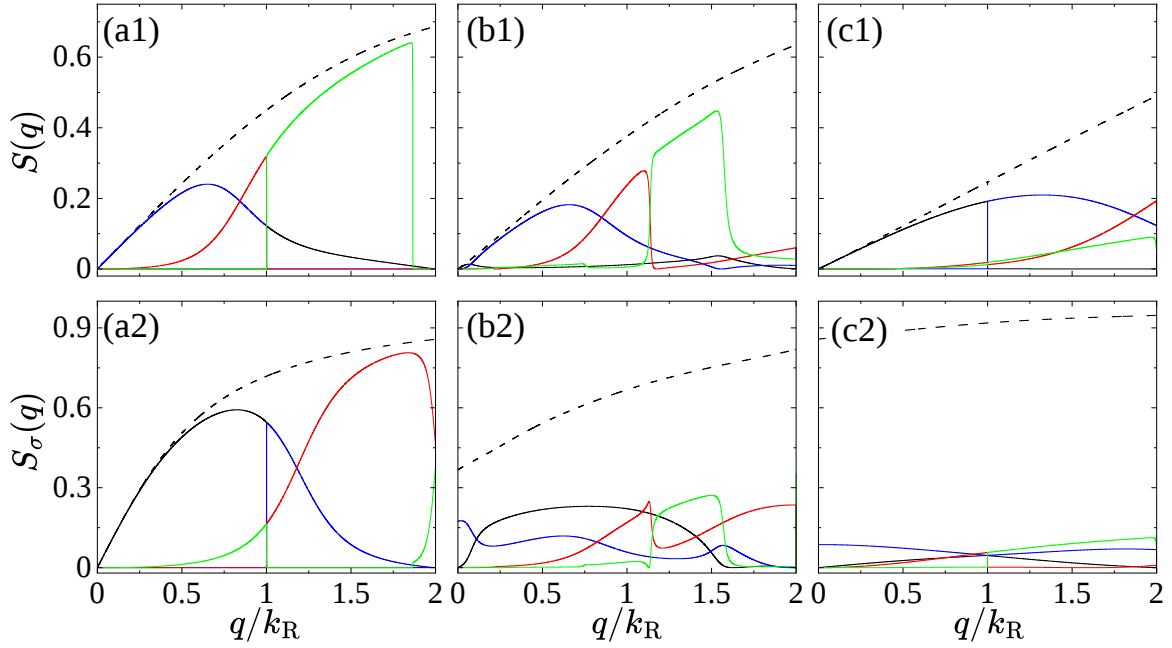


图 5: 静态结构因子与静态自旋结构因子。(a1)-(a2) 为带边态, 对应 $\Omega_R/E_R = 0.05$ 。(a1) 给出了静态结构因子 $S(q, \omega_n)$; 其中黑色虚线为对所有激发能带求和后得到的总结构因子 $S(q) = \sum_n S(q, \omega_n)$ 。(a2) 显示相应的静态自旋结构因子 $S_\sigma(q, \omega_n)$; 黑色虚线同样表示总的自旋结构因子 $S_\sigma(q) = \sum_n S_\sigma(q, \omega_n)$ 。(b1)-(b2) 与 (c1)-(c2) 分别展示单布洛赫态与带中心态下与 (a1)-(a2) 相同的物理量, 用于对比不同凝聚态的静态响应特性。其余参数与图 4 相同。

其中黑色虚线表示对所有激发能带求和后的总响应 $S(q) = \sum_n S(q, \omega_n)$ 和 $S_\sigma(q) = \sum_n S_\sigma(q, \omega_n)$ 。对于带边态 [图 5(a1-a2)], 在长波长极限 $q \rightarrow 0$, 最低能带主要贡献于自旋密度结构因子, 而密度结构因子则主要由第二能带主导, 表明体系的最低能激发具有明显的自旋特征。与已有文献中的常规情形相比, 这里第一与第二能带在 $S(q, \omega_n)$ 与 $S_\sigma(q, \omega_n)$ 中的主导角色发生互换, 反映出凝聚动量结构与自旋轨道耦合对低能激发性质的重整作用。随着动量增大至 $q/k_R \gtrsim 1$, 前两条能带的结构因子权重迅速减小, 而第三能带逐渐演化为以自旋密度涨落为主的激发分支。对于单动量布洛赫态 [图 5(b1-b2)], 结构因子的行为更加复杂, 第一与第二能带在密度与自旋响应中的交叉位置对应于单粒子能带的极小值, 表明最低两条激发能带在该动量处发生密度与自旋特性的交换。相比之下, 带中心态 [图 5(c1-c2)] 的结构因子与常规玻色爱因斯坦凝聚一致, 最低能带主要对应密度激发, 而第二能带则以自旋密度激发为主, 二者在整个动量区间内保持清晰区分。

5 结论

本文系统研究了塞曼晶格中自旋轨道耦合玻色气体的量子相变及其低能激发动力学行为。在单粒子层面，我们表明塞曼晶格的自旋依赖特性与拉曼耦合的协同作用打破了体系的连续平移对称性，但在布里渊区边界处仍保留了由联合 PT 对称性与扩展反射对称性共同保护的能带简并。该独特的能带结构使得在弱相互作用极限下，体系基态动量呈现出丰富的演化特征，包括在由中间极小值区域向中心极小值区域过渡过程中出现的显著动量重入现象。考虑相互作用效应后，通过平均场理论计算，我们构建了系统的基态相图，明确了带边态、单动量布洛赫态/条纹态以及带中心态的稳定区域，并揭示了这些相之间的连续量子相变特征。进一步地，基于 BdG 理论的线性响应分析，我们揭示了元激发谱中蕴含的非平庸物理行为。特别是，通过计算静态结构因子，我们发现带边态中的低能激发结构发生了显著重构：传统声子型密度激发与自旋激发在能带层级上出现倒置。此外，单一布洛赫态下密度与自旋结构因子的交叉行为能够精确反映单粒子色散关系中能量极小值的位置。

综上所述，本工作的研究不仅系统阐明了塞曼晶格中自旋轨道耦合效应所诱导的丰富量子相结构及其激发特性，也为通过测量密度与自旋动力学响应来实验探测这些奇特量子相提供了明确的理论依据。上述特征有望在基于 ^{87}Rb 等超冷原子体系的布拉格散射或自旋分辨成像实验中得到直接观测与验证。

参考文献

- [1] Higbie J, Stamper-Kurn D M 2004 *Phys. Rev. A* **69** 053605
- [2] Jiménez-García K, LeBlanc L J, Williams R A, Beeler M C, Perry A R, Spielman I B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225303
- [3] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
- [4] Hamner C, Zhang Y, Khamsehchi M A, Davis M J, Engels P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 070401
- [5] Huang L, Meng Z, Wang P, Peng P, Zhang S L, Chen L, Li D, Zhou Q, Zhang J 2016 *Nat. Phys.* **12** 540
- [6] Cooper N R 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 175301

- [7] Li C, Ye F, Chen X, Kartashov Y V, Torner L, Konotop V V 2018 *Phys. Rev. A* **98** 061601
- [8] Lu M, Reid G H, Fritsch A R, Piñeiro A M, Spielman I B 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 040402
- [9] Liang M C, Wei Y D, Zhang L, Wang X J, Zhang H, Wang W W, Qi W, Liu X J, Zhang X 2023 *Phys. Rev. Res.* **5** L012006
- [10] Li J R, Lee J, Huang W, Burchesky S, Shteynas B, Top F Ç, Jamison A O, Ketterle W 2017 *Nature* **543** 91
- [11] Bersano T M, Hou J, Mossman S, Gokhroo V, Luo X W, Sun K, Zhang C, Engels P 2019 *Phys. Rev. A* **99** 051602
- [12] Bloch I, Dalibard J, Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [13] Georgescu I M, Ashhab S, Nori F 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 153
- [14] Gross C, Bloch I 2017 *Science* **357** 995
- [15] Goldman N, Juzeliūnas G, Öhberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [16] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
- [17] Zhang Y, Mossman M E, Busch T, Engels P, Zhang C 2016 *Front. Phys.* **11** 1
- [18] Zhai Y J, Chen Y Y, Zhang Y P 2023 *Acta Opt. Sin.* **43** 2102001 (in Chinses) [翟云佳, 陈园园, 张永平. 2023 光学学报, **43** 2102001]
- [19] Qu C, Hamner C, Gong M, Zhang C, Engels P 2013 *Phys. Rev. A* **88** 021604
- [20] Zhang H, Liu S, Zhang Y S 2022 *Phys. Rev. A* **105** 063319
- [21] Zhu F, Tang Z, Zeng L, Wang S, Chen L 2025 *Phys. Rev. A* **112** 043314
- [22] Chisholm C, Hirthe S, Makhalov V, Ramos R, Vatré R, Cabedo J, Celi A, Tarruell L 2026 *Science* **391** 480
- [23] Tao J, Mercado-Gutierrez E D, Zhao M, Spielman I B 2026 *Phys. Rev. Lett.* **136** 113401

- [24] Zhang S, Cole W S, Paramekanti A, Trivedi N 2015 *Annu. Rev. Cold Atoms Mol.* **135**
- [25] Cai Z, Zhou X, Wu C 2012 *Phys. Rev. A* **85** 061605
- [26] Zhao J, Hu S, Chang J, Zheng F, Zhang P, Wang X 2014 *Phys. Rev. B* **90** 085117
- [27] Zhang L, Ke Y, Lee C 2019 *Phys. Rev. B* **100** 224420
- [28] Zhang Y, Zhang C 2013 *Phys. Rev. A* **87** 023611
- [29] Li W, Chen L, Chen Z, Hu Y, Zhang Z, Liang Z 2015 *Phys. Rev. A* **91** 023629
- [30] Salerno M, Abdullaev F K, Gammal A, Tomio L 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043602
- [31] Lin F, Zhang C, Scarola V W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 110404
- [32] Zhang A X, Jiang Y F, Xue J K 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 200302 (in Chinses) [张爱霞, 姜艳芳, 薛具奎 2021 物理学报 **70** 200302]
- [33] Chen Z, Liang Z 2016 *Phys. Rev. A* **93** 013601
- [34] Martone G I, Ozawa T, Qu C, Stringari S 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043629
- [35] Martone G I 2017 *J. Low Temp. Phys.* **189** 262
- [36] Pan J S, Zhang W, Yi W, Guo G C 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043619
- [37] Li S, Wang H, Li F, Cui X, Liu B 2020 *Phys. Rev. A* **102** 033328
- [38] Mæland K, Janssønn A T G, Rygh J H, Sudbø A 2020 *Phys. Rev. A* **102** 053318
- [39] Hui H Y, Zhang Y, Zhang C, Scarola V W 2017 *Phys. Rev. A* **95** 033603
- [40] Li G Q, Luo X W, Hou J, Zhang C 2021 *Phys. Rev. A* **104** 023311
- [41] Toniolo D, Linder J 2014 *Phys. Rev. A* **89** 061605
- [42] Luo X, Hu Z, Zeng Z Y, Luo Y, Yang B, Xiao J, Li L, Chen A X 2021 *Phys. Rev. A* **103** 063324
- [43] Kartashov Y V, Konotop V V, Zezyulin D A, Torner L 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 215301

- [44] Ji W, Zhang K, Zhang W, Zhou L 2019 *Phys. Rev. A* **99** 023604
- [45] Zhang Y C, Jiao C, Zhang A X, Xue J K 2022 *Europhys. Lett.* **138** 55006
- [46] Mukhopadhyay A, Luo X W, Schimelfenig C, Ome M K H, Mossman S, Zhang C, Engels P 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 233403
- [47] Lu H I, Schemmer M, Aycock L M, Genkina D, Sugawa S, Spielman I B 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 200402
- [48] Ome M, He H, Mukhopadhyay A, Crowell E, Mossman S, Bersano T, Zhang Y, Engels P 2024 *Commun. Phys.* **7** 9
- [49] Huang Y X, Zhuang W F, Zhou X F, Pu H, Guo G C, Gong M 2019 *Phys. Rev. A* **100** 053606
- [50] Yu J, Xu Z F, You L 2017 *Phys. Rev. A* **95** 013409
- [51] Luo X, Wu L, Chen J, Lu R, Wang R, You L 2015 *New J. Phys.* **17** 083048
- [52] Su S W, Gou S C, Liu I K, Spielman I B, Santos L, Acus A, Mekys A, Ruseckas J, Juzeliūnas G 2015 *New J. Phys.* **17** 033045
- [53] Zezyulin D A, Konotop V V 2022 *Phys. Rev. A* **105** 063323
- [54] Fang P, Lin J 2024 *Phys. Rev. E* **109** 064219
- [55] He H, Pang F, Lyu H, Zhang Y 2025 *Phys. Rev. A* **111** 063305
- [56] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [57] Mandel O, Greiner M, Widera A, Rom T, Hänsch T W, Bloch I 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 010407
- [58] Yang B, Dai H N, Sun H, Reingruber A, Yuan Z S, Pan J W 2017 *Phys. Rev. A* **96** 011602
- [59] He H, Zhang Y 2021 *Phys. Rev. A* **103** 053322
- [60] Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225301
- [61] Li Y, Martone G I, Pitaevskii L P, Stringari S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 235302

- [62] Martone G I, Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. A* **86** 063621
- [63] Chen Y, Lyu H, Xu Y, Zhang Y 2022 *New J. Phys.* **24** 073041
- [64] Stenger J, Inouye S, Chikkatur A P, Stamper-Kurn D M, Pritchard D E, Ketterle W 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4569
- [65] Guo Z H, Zhu Q 2024 *New J. Phys.* **26** 123009
- [66] Hou J, Luo X W, Sun K, Bersano T, Gokhroo V, Mossman S, Engels P, Zhang C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 120401
- [67] Ji S C, Zhang L, Xu X T, Wu Z, Deng Y, Chen S, Pan J W 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 105301
- [68] Pitaevskii L, Stringari S 2016 *Bose-Einstein condensation and superfluidity*, vol. 164 (Oxford: Oxford University Press)

录用稿件，非最终出版稿

Ground States and Elementary Excitations of Spin–Orbit-Coupled Bose–Einstein Condensates in a Zeeman Lattice*

LIU Keyan¹⁾ ZHAO Yujie¹⁾ CHENG Haiyu¹⁾ DAI Ting¹⁾ HE
Huaxin²⁾†

1) (*School of Mechanical and Electrical Engineering, Jiaxing Nanhu University, Jiaxing, 314001, China*)

2) (*Provincial Key Laboratory of Multimodal Perceiving and Intelligent Systems, Jiaxing University, Jiaxing, 314001, China*)

Abstract

The interplay between periodic potentials and artificial spin-orbit coupling (SOC) in ultracold atomic gases provides a versatile platform for exploring exotic quantum phases. In contrast to conventional optical lattices based on Raman coupling modulation, a Zeeman lattice characterized by a spatially varying longitudinal field (σ_z modulation) exhibits distinct symmetry properties and competing mechanisms. Here, we systematically investigate the ground-state phase diagram and elementary excitations of a Raman-induced SOC Bose–Einstein condensate in a one-dimensional Zeeman lattice. At the single-particle level, we show that the Hamiltonian possesses a composite symmetry—combining PT and extended reflection symmetries—which protects a robust band degeneracy at the Brillouin zone boundary. Driven by the

† Corresponding author. E-mail: xinphysics@zjxu.edu.cn

The First Author. E-mail: liukeyan@jxnhu.edu.cn

* A Project Supported by Scientific Research Fund of Zhejiang Provincial Education Department (Grant No. Y202558526), National Undergraduate Training Program on Innovation and Entrepreneurship (Grant No. 202513291018) .

competition between the periodic Zeeman splitting and Raman-induced spin mixing, the quasi-momentum minimum displays a non-monotonic re-entrant evolution across different momentum regimes as the Raman coupling strength varies. Incorporating many-body interactions, we construct the ground-state phase diagram using a variational ansatz and the Gross–Pitaevskii equation, identifying four distinct phases: the band-edge, single-momentum Bloch, stripe, and band-center states. The phase transitions are found to be predominantly second-order and strongly governed by the underlying band structure and symmetry constraints. We further analyze the elementary excitation spectra within the Bogoliubov–de Gennes framework and compute the static density and spin structure factors. The results reveal characteristic dynamical signatures, including an inversion of the density and spin excitation branches in the band-edge state, as well as distinct crossing features in the Bloch state linked to the single-particle dispersion minima. Our findings elucidate the critical role of symmetry and band structure in shaping the quantum phases and collective excitations of SOC BECs in Zeeman lattices, providing clear experimental signatures accessible via Bragg spectroscopy and spin-resolved measurements.

Keywords: Zeeman Lattice; Spin–Orbit Coupling; Bose–Einstein Condensate; Ground-State Phase Diagram; Elementary Excitations

录用稿件，

非最终出版稿