

外部激励作用下的多稳态忆阻 FitzHugh-Nagumo 神经元电路的动力学调控*

张雨航 张绍华[†] 王聪 张宏立 马萍 瞿壮

(新疆大学, 智能科学与技术学院, 乌鲁木齐 830049)

摘要

为揭示外部激励作用下忆阻记忆效应对神经元复杂放电行为及其初值调控机制的影响, 本文以经典 FitzHugh-Nagumo (FHN) 神经元电路为基础, 采用压控型多稳态忆阻器替代传统电路中的隧道二极管, 构建了一种多稳态忆阻 FHN 神经元电路, 并结合哈密顿能量函数分析了此电路的能量调控特性。数值分析结果表明, 该电路能够产生簇发振荡、尖峰放电及混沌振荡等丰富动力学行为, 其中低频驱动条件下更易诱发明显的簇发放电模态。进一步地, 通过多种仿真手段揭示了参数对动力学演化过程的调制作用, 揭示了复杂放电行为的形成机制。此外, 研究发现该电路在忆阻内部状态方向上具有周期复制特征, 改变忆阻内部状态初值可诱导多个共存吸引子及其周期性平移分布, 表现出显著的多稳态特征。最后, 基于 PSpice 平台完成了电路设计与仿真, 验证了所建模型的物理可实现性。研究表明, 外部激励与多稳态忆阻器的耦合作用显著增强了 FHN 神经元电路的动力学复杂性与放电行为可调控性, 为忆阻神经元动力学分析及神经形态电路设计提供了新的理论参考。

关键词: 忆阻器, FHN 神经元, 簇发振荡, 共存吸引子

PACS: 05.45.Ac, 05.45.-a

1 引言

神经元是生物神经系统中实现信息传递和处理的基本单元^[1,2], 其放电行为与

*国家自然科学基金 (52267010, 52567014, 52565062)、新疆人才发展基金项目

(XJRC-2025-KJ-YJ-CXPT-077)、新疆维吾尔自治区天山创新团队项目 (2025D14009) 和天山英才培养计划 (2023TSYCCX0037, 2024TSYCLJ0008) 资助的课题。

[†] 通信作者. E-mail: shaohuazhang@xju.edu.cn

第一作者. E-mail: 2249528003@qq.com

神经信息的产生、编码和传输密切相关。由于实际神经元系统具有结构复杂、影响因素多和实验分析困难等特点，建立合适的神经元模型就显得尤为重要。神经元模型能够在保留主要动力学特征的基础上，对神经元的电活动过程进行抽象和简化，从而为研究神经元的放电规律、振荡特性及其非线性动力学机制提供有效方法。同时，神经元模型也是连接神经科学、非线性动力学和神经形态电路研究[3-5]的重要桥梁。经典的神经元模型主要包括 Hodgkin-Huxley (HH) 模型[6]、FitzHugh-Nagumo (FHN) 模型[7,8]、Morris-Lecar (ML) 模型[9]以及 Hindmarsh-Rose (HR) 模型[10]等。虽然传统神经元模型能够较好地描述神经元的基本放电过程，但对于神经系统中一些具有记忆特征和复杂反馈特性的动力学现象刻画仍不够充分，尤其是在表现多稳态、复杂振荡和初值敏感性等方面还存在一定局限。忆阻器是一种具有非线性和记忆特性的电路元件[11,12]，其状态会随着输入信号的变化而改变，并能够保存先前的状态信息，这一特点与生物神经系统中的突触可塑性[13]具有一定相似性。因此，将忆阻器引入神经元模型后，可以在传统神经元动力学基础上增加记忆效应和非线性反馈作用，使系统表现出更加丰富的动力学行为。与经典神经元模型相比，忆阻神经元模型在研究复杂放电模式和构建神经形态电路方面更具优势[14]。

近年来，围绕忆阻神经元系统的动力学特性，国内外学者开展了广泛研究。已有研究表明，忆阻器与经典神经元模型耦合后，能够显著丰富系统的非线性动力学行为[15]。Yan 等[16]提出双稳态局部有源忆阻器，并据此设计神经元电路，在混沌边缘实现了 24 种神经形态动力学行为。Li 等[17]构建了基于局部有源忆阻器耦合的三阶忆阻神经元网络，实现了对 Smale 悖论、混沌及倍周期振荡等复杂行为的调控。Chen 等[18]通过忆阻器双向耦合两个 HR 神经元，揭示了尖峰放电与簇发振荡等活动特征。文献[19]还报道了一种基于电场—磁场能量交换的荷控忆阻

器无电容神经元电路，实现了参数可调的放电行为。Chen 等^[20]构建了基于局部有源离散忆阻器的离散忆阻驱动神经元模型，结果能够产生多种的放电模式，表明忆阻器替代传统恢复变量后可增强神经元模型的放电模式丰富性。Li 等^[21]构建了一种基于电流控制 Chua Corsage Memristor(CCM)的三阶神经元电路，揭示了局部有源和混沌边缘附近的周期、混沌及尖峰放电行为。上述研究表明，忆阻器的引入能够为神经元系统提供记忆效应和非线性反馈，从而诱发更加丰富的动力学现象。在众多神经元模型中，FHN 模型由于能够在较低维度下刻画神经元兴奋、脉冲发放及振荡演化等基本动力学特征，因而成为研究神经动力学行为的重要理论模型。基于此，研究人员逐渐将忆阻器引入 FHN 神经元模型，以期在保持模型简洁性的同时增强系统的非线性调制能力。Feali^[22]通过忆阻器构造自突触 FHN 神经元模型，揭示了自突触电导^[23]对神经元由周期到混沌等多类放电模式的调控机制，为理解神经系统中自突触的动态调节功能提供了计算模型基础。进一步地，Bao 等^[24]为表征神经元放电活动并阐明其分岔机制，设计了一种基于忆阻器的非自治 FHN 神经元电路，通过分析其时变平衡点与分岔机制，揭示了周期与准周期簇发振荡的产生机理，并经由电路仿真与硬件实验验证了其物理可实现性。在此基础上，Xu 等^[25]采用 N 型局部有源忆阻器替换传统 FHN 电路中的隧道二极管，构建了能够复现多种簇发与峰发放电模式的忆阻神经元电路，从理论与实验两方面揭示了其分岔演化规律，为神经形态工程的生物启发应用提供了硬件实现基础。此外，Zhang 等^[26]进一步结合理论分析、数值仿真与电路实验，系统研究了忆阻型 FHN 神经元的混沌动力学特性，并阐明了以忆阻器为突触的耦合神经元实现同步的参数条件，为基于忆阻器的神经形态电路设计提供了重要依据。文献^[27]研究了忆阻耦合 FHN-HR 异质神经元系统，分析了簇发、尖峰及同步动力学行为，文献^[28]进一步构建了电磁感应下的分数阶异构神经网络，利用双局部有源忆

阻器耦合 HR 与 FHN 神经元，揭示了共存行为、反单调性、瞬态混沌和放电行为等复杂动力学现象，并通过 ARM 平台验证了模型的可实现性。综上所述，现有关于忆阻 FHN 神经元的研究已从单一放电行为分析逐步拓展到分岔演化、簇发机制、电路实现以及耦合同步等多个层面，表明忆阻器的引入显著丰富了 FHN 神经元模型的动力学行为及其应用潜力。

除忆阻神经元系统丰富的动力学行为外，由初始状态所引起的演化差异同样值得关注。由于忆阻器具有内部状态变量和记忆特性，不同初始值可能诱导系统进入不同的稳定状态，表现出显著的多稳态特征^[29]，并伴随共存吸引子和轨道位移等现象。因此，初值调控及共存吸引子的研究对于揭示忆阻神经元系统的多稳态动力学特征具有重要意义。例如，文献^[30]构建了一个具有隐藏吸引子、不稳定周期轨道以及初始条件依赖超级多稳态特性的四维忆阻超混沌系统，揭示了隐藏吸引子和无限多共存吸引子等复杂动力学现象。与此同时，文献^[31]基于双曲余弦忆阻器改进蔡氏电路，建立了一个对初始状态敏感的双忆阻混沌系统，揭示了初始条件变化所引发的多稳态隐藏吸引子共存现象，展现了参数与初值共同作用下的复杂动力学行为。此外，文献^[32]通过忆阻电磁感应耦合 HR 神经元与 Hopfield 神经元^[33]，构建了一个异质神经元模型，研究表明该系统在参数和初始状态变化下可呈现多类吸引子共存与多稳态行为，包括不同周期态之间以及周期态与混沌态之间的共存现象。另一方面，文献^[34]通过忆阻器替代与条件对称性构造，提出了一个具有初始状态依赖特征的五维超混沌系统，该系统能够产生无限多对极性对称的共存吸引子，并通过电路仿真验证了其在保密通信等工程领域的应用潜力。除一般超混沌系统外，相关研究也已拓展到忆阻神经元电路之中，Goufo^[35]通过多稳态忆阻器耦合 Wilson 神经元电路^[36]，实现了可模拟生物突触可塑性的信息传递，并揭示了系统在高、低频刺激下分别呈现混沌动态与簇发放电的响应

机制，为类脑计算与神经形态工程提供了可数字实现的动力学模型。与此同时，Tamba 等^[37]提出了一种基于分数阶多稳态忆阻器耦合的双 Hopfield 神经元模型，该模型通过自突触与外部电磁辐射模拟，展现出空间分布多样的同质与异质混沌吸引子，其动力学行为还在硬件平台上得到了验证，为神经形态计算与类脑信息处理提供了新的耦合框架。综上所述，现有研究已从一般忆阻混沌系统逐步拓展到忆阻神经元模型，揭示了初始状态在多稳态形成、共存吸引子分布及轨道演化中的重要作用，也表明初值调控已成为忆阻非线性系统研究中的一个重要方向。

现有研究多集中于忆阻神经元系统或忆阻混沌系统的一般动力学行为、分岔演化及电路实现，虽然关于多稳态、共存吸引子和初值调控的研究已取得一定进展，但将这些问题与 FHN 神经元模型相结合并进行系统分析的工作仍相对较少。鉴于 FHN 模型在神经动力学研究中的典型性以及多稳态忆阻器在状态调制方面的独特优势，本文构建了一种多稳态忆阻 FHN 神经元电路模型。首先，建立相应的数学模型并分析其平衡结构特征；其次，研究关键参数对系统动力学行为的影响，揭示系统在不同条件下所呈现的复杂放电模式；然后，重点讨论忆阻内部状态初值对系统演化的调控作用，分析共存吸引子及初值位移现象的形成规律；最后，通过 PSpice 电路仿真对理论结果进行验证，以说明所建模型的物理可实现性。

2 多稳态忆阻神经元电路

2.1 多稳态忆阻器模型

根据忆阻器的建模方法，本节提出了一种压控型多稳态忆阻器模型，其数学模型为：

$$\begin{cases} i_N = \frac{g_1 \sin(v_\varphi) v_N}{R_M} \\ C_1 \frac{dv_\varphi}{dt} = -\frac{\sin(v_\varphi) \cos(v_\varphi)}{R_1} + \frac{g_2 v_N^2}{R_2} - \frac{E_M}{R_3} \end{cases} \quad (1)$$

式中, i_N 、 v_N 分别为忆阻器通过电流及忆阻器两端电压, v_φ 为忆阻器的内部状态变量, 用于表征忆阻器的记忆状态。 g_1 和 g_2 分别调节端口电流和状态驱动强度, E_M 为直流偏置电压, C_1 表示决定内部状态变量演化时间尺度的电容, R_1 、 R_2 和 R_3 分别表示调节状态恢复项、输入驱动项和直流偏置项作用强度的电阻, R_M 为控制忆阻器输出电流幅值的电阻。其电路如图 1 所示。

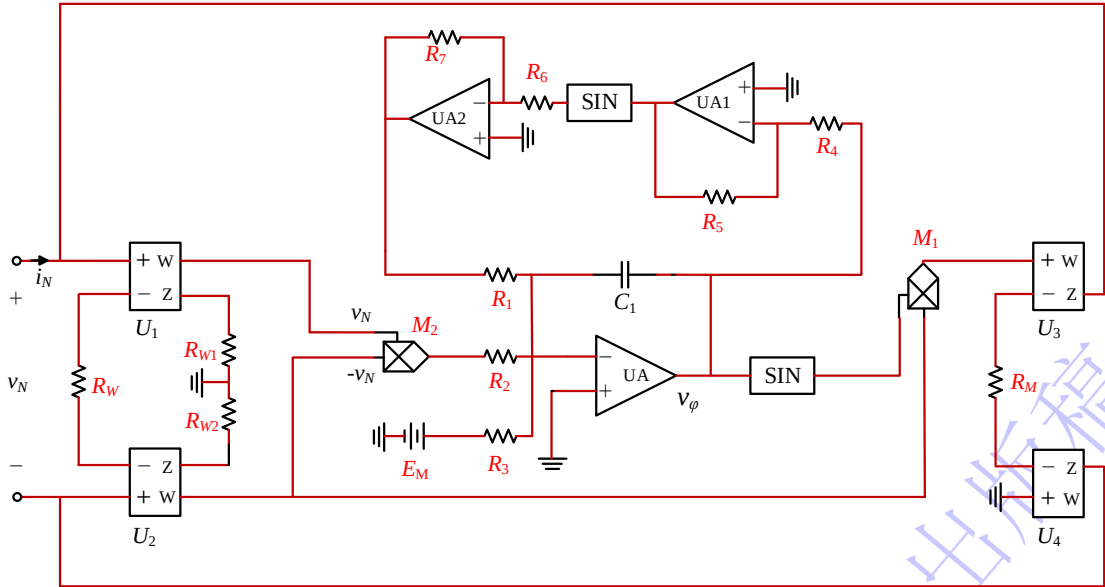


图 1 多稳态压控忆阻器电路

Fig. 1. Multi-state voltage-controlled memristor circuit.

将忆阻器电路的参数设定为 $g_1 = g_2 = 1$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_7 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_M = 0.7 \text{ k}\Omega$, $R_W = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{W1} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{W2} = 10 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 10 \text{ nF}$ 。上述参数的选取主要考虑电路可实现性、时间尺度匹配和忆阻特性可观测性。所选电阻、电容参数均处于常用模拟电路器件范围内。当输入电压是 $v_N = A \sin(2\pi ft)$, $E_M = 0.5 \text{ V}$, 电压幅值固定为 2 V , 分别调节电压频率为 1 kHz 、 2 kHz 和 6 kHz 时, 可以得到如图 2(a)所示的紧磁滞回线。固定电压频率为 1 kHz , 分别调节电压幅值为 1 V 、 1.5 V 和 2 V , 可以得到图

2(b)的紧磁滞回线。可以看出其他条件不发生改变的情况下，紧磁滞回线的面积随着频率的升高而变大，随着电压的减小而降低，符合忆阻器的特性^[38]。通过图3在不同忆阻初值下的紧磁滞回线和状态变量随时间的演化可知：忆阻器电路模型具有多稳态特性。

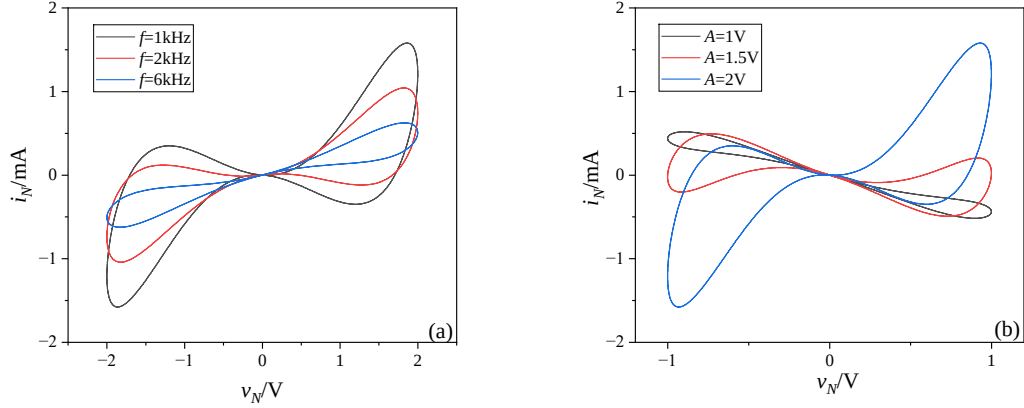


图 2 忆阻器紧磁滞回线 (a) $A = 2 \text{ V}$ 时不同频率; (b) $f = 1 \text{ kHz}$ 时不同幅值
Fig. 2. Memristor hysteresis loop: (a) Different frequencies when $A = 2 \text{ V}$; (b) Different amplitudes when $f = 1 \text{ kHz}$.

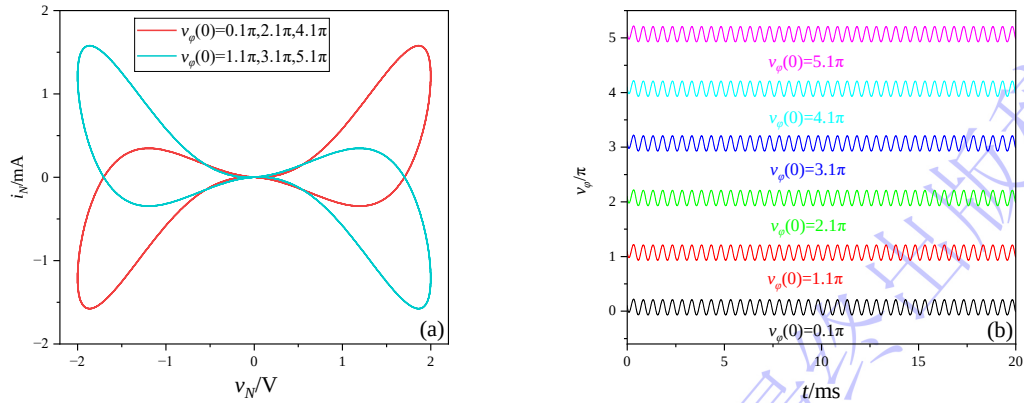


图 3 (a) 不同忆阻初值的紧磁滞回线; (b) 不同忆阻器初值的状态变量变化
Fig. 3. (a) Hysteresis loops for memristors with different initial values; (b) State variable changes for memristors with different initial values.

为进一步说明多稳态忆阻器自身的能量特征，下面将从状态储能方面对忆阻器通道的电磁场能量进行估算。由式(1)可知，忆阻器内部状态变量 v_ϕ 由状态电容 C_1 调控，因此忆阻器内部状态支路的电磁场能量^[1]可表示为：

$$W_\phi = \frac{1}{2} L i_N^2 = \frac{1}{2} \phi i_N \quad (2)$$

磁控忆阻器可以被等效为具有磁场效应的感应线圈，其中公式(2)中的 L 为

磁控忆阻器等效的感应系数。由于 v_ϕ 为电压型状态变量，为进行等效的电磁场能量估算，须通过 $\phi = k_\phi v_\phi$ 转变为等效磁通 ϕ ， k_ϕ 是具有时间量纲的转换系数。由式(1)可知，基于忆阻内部状态恢复支路的特征时间尺度可将等效将 $k_\phi \approx R_1 C_1$ 。联合式(1)(2)可得：

$$W_\phi = \frac{k_\phi g_1 v_\phi \sin(v_\phi) v_N}{2R_M} \quad (3)$$

代入电路参数并将忆阻器端电压 v_N 设定为 2V，由图 3(b)可知 v_ϕ 在不同初始状态下的变化范围，可近似的表示 $v_\phi \approx 0-10^1$ V，则忆阻器通道的电磁场能量可估算为 $W_\phi \approx 10^{-8}-10^{-7}$ J，结果表明，忆阻器内部状态变量不仅决定其记忆状态演化，也对应一定量级的场能量存储。

2.2 多稳态忆阻神经元电路

利用多稳态忆阻器替换 FHN 电路中隧道二极管的电路模型如图 4 所示。其中 $v_s = V_s \sin(2\pi ft)$ 为本神经元电路的外部电源激励， V_s 和 f 分别为其幅值和频率， C 是电容， L 表示为电感， R_N 和 R_L 是电路电阻。 E_N 为直流电压偏置，用于表征离子通道的反转电位，同时也作为电路方程转换为等效无量纲理论模型的电压基准。 设定电路参数为 $C = 10$ nF， $L = 10$ mH， $R_N = 5$ k Ω ， $R_L = 1$ k Ω ， $E_N = 0.15$ V。通过基尔霍夫电流、电压定律以及电路元件的本构关系，可得式(4)所对应的电路方程为：

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \left[\frac{v_s - v}{R_N} - i_L - \frac{g_1 \sin(v_\phi)(v - E_N)}{R_M} \right] \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} (v - i_L R_L) \\ \frac{dv_\phi}{dt} = \frac{1}{C_1} \left[-\frac{\sin(v_\phi) \cos(v_\phi)}{R_1} + \frac{g_2 (v - E_N)^2}{R_2} - \frac{E_M}{R_3} \right] \end{cases} \quad (4)$$

为了去除变量的物理单位不一致性对稳定性分析和动力学分析的影响，对式(4)的物理变量和参数进行如下标度变换：

$$\begin{cases} u = \frac{v}{E_N}, w = \frac{R_M i_L}{E_N}, \phi = v_\phi, \tau = \frac{t}{R_M C} \\ \alpha = \frac{R_M}{R_N}, \beta = \frac{V_S}{E_N}, \gamma = g_1, F = 2\pi f R_M C \\ \delta = \frac{R_L}{R_M}, \varepsilon = \frac{L}{R_M^2 C}, \mu = \frac{k_\phi g_1}{2 C R_M E_N} \\ \eta_1 = \frac{R_M C}{R_1 C_1}, \eta_2 = \frac{g_2 R_M C E_N^2}{R_2 C_1}, \eta_3 = \frac{R_M C E_M}{R_3 C_1} \end{cases} \quad (5)$$

则忆阻神经元电路方程可以等效表达为如下的无量纲形式：

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \alpha [\beta \sin(F\tau) - u] - w - \gamma \sin(\phi)(u-1) \\ \frac{dw}{d\tau} = \frac{u - \delta w}{\varepsilon} \\ \frac{d\phi}{d\tau} = -\eta_1 \sin \phi \cos \phi + \eta_2 (u-1)^2 - \eta_3 \end{cases} \quad (6)$$

其中主要参数 u 、 w 、 ϕ 、 γ 、 F 、 β 和 η_3 分别表征神经元膜电压、恢复变量、忆阻非线性反馈强度、忆阻状态变量、外部激励频率、外部激励幅值和忆阻直流偏置强度。

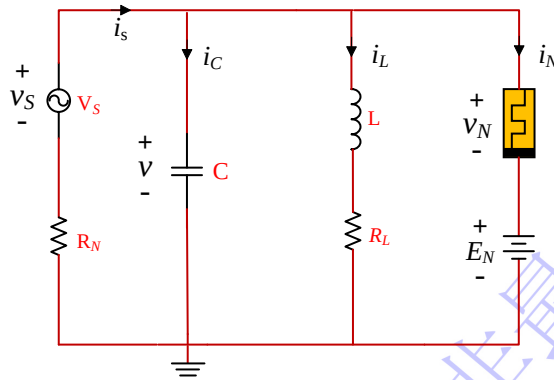


图 4 多稳态忆阻 FHN 神经元电路

Fig. 4. Multi-state Memristor-Based FHN Neural Circuit.

2.3 无量纲哈密顿能量函数

神经元的动力学行为会伴随着能量的释放和吸收，因此，有必要进一步揭示神经元模型的能量演化机制。由图 4、式(2)和(4)可知，本文神经元电路中的能量主要由主电容储存的电场能量、电感支路储存的磁场能量以及压控忆阻器通道对应的等效电磁场能量神经元三部分组成，因此多稳态忆阻 FHN 神经元的电路储

存的能量可表示为:

$$W = W_C + W_L + W_\phi = \frac{1}{2} C v^2 + \frac{1}{2} L i_L^2 + \frac{1}{2} \phi i_N \quad (7)$$

选取 $W_0 = C E_N^2$ ，并结合式(5)中的标度变换，可得到无量纲哈密顿能量函数

$H(u, w, \phi)$ 为:

$$H(u, w, \phi) = \frac{W}{W_0} = \frac{1}{2} u^2 + \frac{\varepsilon}{2} w^2 + \mu \phi \sin(\phi)(u-1) \quad (8)$$

由此可以得出能量梯度 ∇H 为:

$$\nabla H = \begin{bmatrix} u + \mu \phi \sin(\phi) \\ \varepsilon w \\ \mu(u-1)[\sin(\phi) + \phi \cos(\phi)] \end{bmatrix} \quad (9)$$

根据赫姆霍兹定理和哈密顿能量^[39]可知哈密顿能量函数 $H(u, w, \phi)$ 需要满足:

$$\begin{cases} \nabla H^T J(u, w, \phi) \nabla H = \nabla H^T F_c(u, w, \phi) = 0 \\ \frac{dH}{d\tau} = \nabla H^T R(u, w, \phi) \nabla H = \nabla H^T F_d(u, w, \phi) \end{cases} \quad (10)$$

其中 ∇H 为 $H(u, w, \phi)$ 的梯度矩阵、 $J(u, w, \phi)$ 和 $R(u, w, \phi)$ 分别是斜对称矩阵和主对角矩阵。赫姆霍兹定理指出任何矢量场都可分解为保守项 $F_c(u, w, \phi)$ 和耗散项

$F_d(u, w, \phi)$ 。因此式(6)可以分解为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{du}{d\tau} \\ \frac{dw}{d\tau} \\ \frac{d\phi}{d\tau} \end{bmatrix} &= F_c(u, w, \phi) + F_d(u, w, \phi) = J(u, w, \phi) \nabla H + R(u, w, \phi) \nabla H \\ &= \begin{bmatrix} -w \\ u + \mu \phi \sin(\phi) \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \beta \sin(F\tau) - \alpha u - \gamma \sin(\phi)(u-1) \\ -\frac{\delta w + \mu \phi \sin(\phi)}{\varepsilon} \\ -\eta_1 \sin(\phi) \cos(\phi) + \eta_2 (u-1)^2 - \eta_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \nabla H + \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix} \nabla H \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $R(u, w, \phi)$ 中的具体元素为:

$$\begin{cases} R_{11} = \frac{\alpha\beta \sin(F\tau) - \alpha u - \gamma \sin(\phi)(u-1)}{u + \mu\phi \sin(\phi)} \\ R_{22} = -\frac{\delta w + \mu\phi \sin(\phi)}{\varepsilon^2 w} \\ R_{33} = \frac{-\eta_1 \sin(\phi) \cos(\phi) + \eta_2 (u-1)^2 - \eta_3}{\mu(u-1)[\sin(\phi) + \phi \cos(\phi)]} \end{cases} \quad (12)$$

相应的 $H(u, w, \phi)$ 关于 τ 的导数为:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\tau} &= (u + \mu\phi \sin \phi)[\alpha\beta \sin(F\tau) - \alpha u - \gamma \sin \phi(u-1)] \\ &\quad - w(\delta w + \mu\phi \sin \phi) \\ &\quad + \mu(u-1)[\sin \phi + \phi \cos \phi][-\eta_1 \sin \phi \cos \phi + \eta_2 (u-1)^2 - \eta_3] \\ &= \nabla H^T F_d(u, w, \phi) \end{aligned} \quad (13)$$

由式(12)(13)可知, 保守项满足 $\nabla H^T F_c(u, w, \phi) = 0$, 因此仅描述系统内部能量交换, 不改变总能量。而系统能量变化由非保守项决定, 即 $\nabla H^T F_d(u, w, \phi) = dH/d\tau$ 。由此说明, 多稳态忆阻器的引入使系统具有状态依赖的能量调控机制, 为后续复杂放电和多稳态共存分析提供了物理依据。

2.4 平衡性分析

原系统在外部正弦激励作用下为非自治系统, 严格意义下不存在寻常的平衡点。为了分析系统内部非线性结构对动力学行为的影响, 将输入项冻结为常值参数 B , 从而得到对应自治系统, 并进一步研究其平衡点分布及零流线结构。定义多稳态忆阻 FHN 神经元模型的平衡点为 $E = (\bar{u}, \bar{w}, \bar{\phi})$ 。当式(6)的右端方程等于0时, 可以得到式(14)。

$$\begin{cases} 0 = \alpha[\beta \sin(F\tau) - u] - w - \gamma \sin(\phi)(u-1) \\ 0 = \frac{u - \delta w}{\varepsilon} \\ 0 = -\eta_1 \sin \phi \cos \phi + \eta_2 (u-1)^2 - \eta_3 \end{cases} \quad (14)$$

设定参数 $\eta_3 = 0.07$, 其他参数同上一节。因此, 式(14)可以推导为:

$$\begin{cases} B = \frac{50}{7}(\bar{u}-1)\sin\bar{\phi} + 6\bar{u} \\ \sin(2\bar{\phi}) = 0.015(\bar{u}-1)^2 - 2 \end{cases} \quad (15)$$

由方程 (15) 可知需要满足约束条件:

$$|0.015(\bar{u}-1)^2 - 2| \leq 1 \quad (16)$$

由式 (15) 与式 (16) 分析可得:

$$\bar{\phi}^{(k)} = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin(0.015(\bar{u}-1)^2 - 2) + \frac{k\pi}{2}, k \in Z \quad (17)$$

分析可知, 平衡方程的公共周期为 2π , 因此对于本模型的平衡点

$E = (\bar{u}, \frac{\bar{u}}{\delta}, \bar{\phi})$, $E = (\bar{u}, \frac{\bar{u}}{\delta}, \bar{\phi} + 2n\pi), n \in Z$ 仍然是平衡点。显然可以得出, 系统在完

整状态空间中存在沿 $\bar{\phi}$ 方向周期复制的无穷多个平衡点, 相关平衡点分布图如图

5 所示。

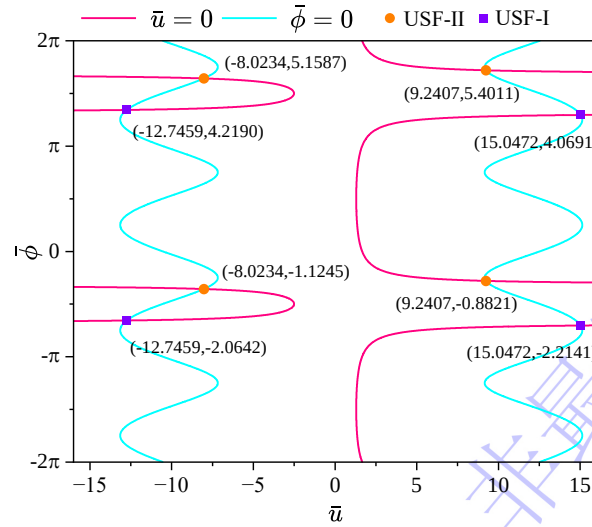


图 5 平衡点分布

Fig. 5. Distribution of equilibrium points.

可以看出将输入项 B 定为 10, 红色线条和蓝色线条分别是 $\bar{u} = 0$ 和 $\bar{\phi} = 0$ 时的曲线, 而它们的交点即是平衡点, 所以系统在一个周期内共有四个平衡点。由于系统在 $\bar{\phi}$ 方向具有 2π 周期复制性, 因此完整状态空间中存在无穷多个平衡点, 它们由这 4 个基本平衡点沿 $\bar{\phi}$ 方向周期延拓而成。此参数下的雅可比矩阵为式

(18)。在此时的四个平衡点以及特征值如表 1。可知其均为不稳定鞍焦点(USF)，为产生复杂的动力学提供了潜在的可能。

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} -\alpha - \gamma \sin(\bar{\phi}) & -1 & -\gamma \cos(\bar{\phi})(\bar{u} - 1) \\ \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{\delta}{\varepsilon} & 0 \\ 2\eta_2(\bar{u} - 1) & 0 & -\eta_1 \cos(2\bar{\phi}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

表 1 平衡点及其特征值与稳定性类型

Table 1. Equilibrium Points, Their Eigenvalues, and Stability Classes

平衡点	特征值 λ	平衡点类型
$(-12.7459, -8.9221, -2.0642)$	$(0.5334, -0.2270 \pm 0.2640i)$	一维不稳定流形鞍焦点 (USF-I)
$(-8.0234, -5.6164, -1.1245)$	$(0.1906 \pm 0.2539i, -0.2749)$	二维不稳定流形鞍焦点 (USF-II)
$(9.2407, 6.4685, -0.8821)$	$(0.0891 \pm 0.3544i, -0.2328)$	二维不稳定流形鞍焦点 (USF-II)
$(15.0472, 10.5330, -2.2141)$	$(0.5088, -0.2645 \pm 0.3195i)$	一维不稳定流形鞍焦点 (USF-I)

3 参数驱动下的系统动力学行为分析

3.1 二维动力学行为分布分析

固定参数 $F = 0.0066$ ，选择可调参数分别为 γ 、 β 和 η_3 ，并将参数映射到两个二维参数空间 $[\gamma, \beta]$ 和 $[\gamma, \eta_3]$ 中。通过计算基于膜电压 u 的峰值循环周期数和基于 Wolf 法的 Lyapunov 指数，多稳态忆阻 FHN 神经元在每组分岔参数控制下产生的动力学放电行为属性得以区分，如图 6 所示。P1 至 P8 对应周期 1 至周期 8 的规则放电态，其最大 Lyapunov 指数小于 0，表征系统的周期振荡行为。标记为 MP 的紫色区域表示周期数更高的准周期或多周期放电态，其动力学虽复杂但仍具确定性，最大 Lyapunov 指数同样小于 0。混沌行为在图中呈现为分布不连续的红色区域，标志着系统对初值敏感且具有类随机性。此外，灰色区域标记为 DI，对应参数空间中的发散行为，表征模型在该参数下失稳。综上，根据图 6 可以直观的看出多稳态忆阻 FHN 神经元动力学行为的参数域，同时反映出参数的微小变化可以引起系统动力学行为的转变，表明此神经元模型在参数的影响下可以产生极其

复杂的动力学现象。

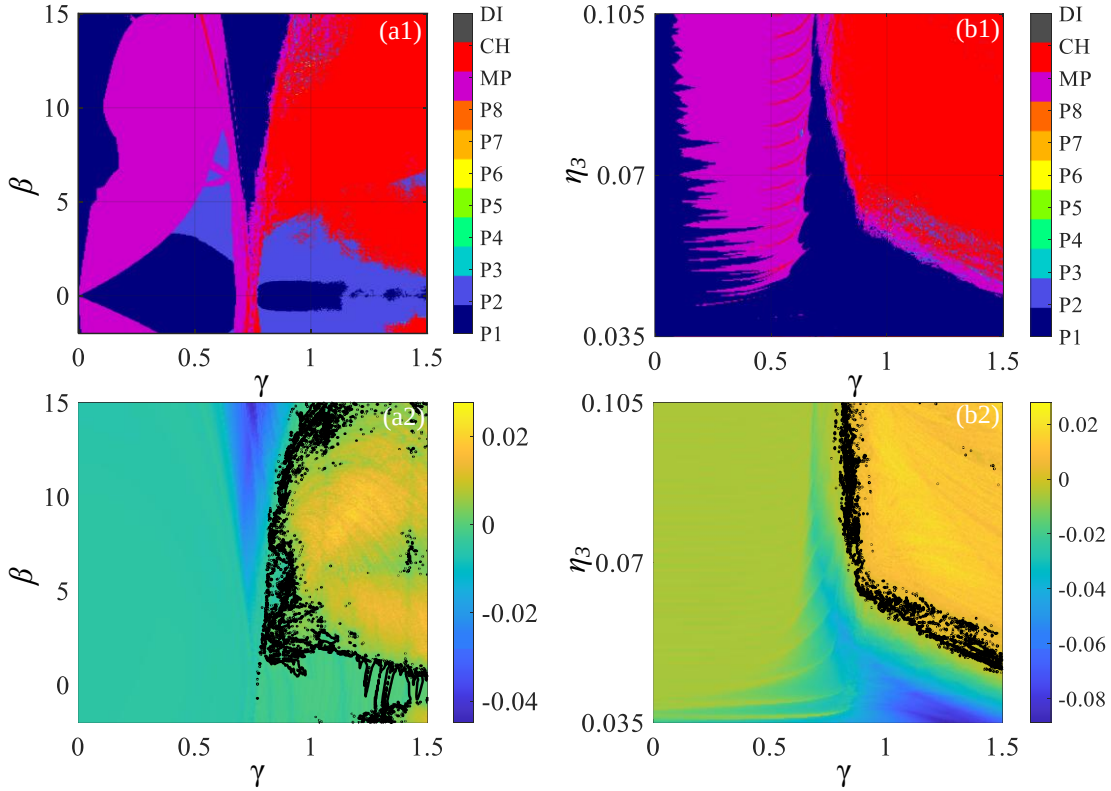


图 6 神经元参数的二维动力学分布 (a1) $\gamma-\beta$ 平面分岔图; (a2) $\gamma-\beta$ 平面动力学图; (b1) $\gamma-\eta_3$ 平面分岔图; (b2) $\gamma-\eta_3$ 平面动力学图

Fig. 6. Two-dimensional dynamical distributions of neuronal parameters: (a1) $\gamma-\beta$ Planar bifurcation diagram; (a2) $\gamma-\beta$ Planar dynamical diagram; (b1) $\gamma-\eta_3$ Planar bifurcation diagram; (b2) $\gamma-\eta_3$ Planar dynamical diagram.

3.2 关键参数的分岔演化分析

为揭示系统动力学行为对关键参数的敏感性, 固定初值为 $[0.6667, 0, 0.1]$, 分别选取参数 γ 、 β 和 η_3 作为控制变量, 当三个控制参数分别 $\gamma \in [0, 1.5]$ 、 $\beta \in [-2, 15]$ 和 $\eta_3 \in [0.035, 0.105]$ 时, 绘制了膜电位 u 的分岔图以及对应的最大 Lyapunov 指数谱如图 7(a)–(c) 所示。

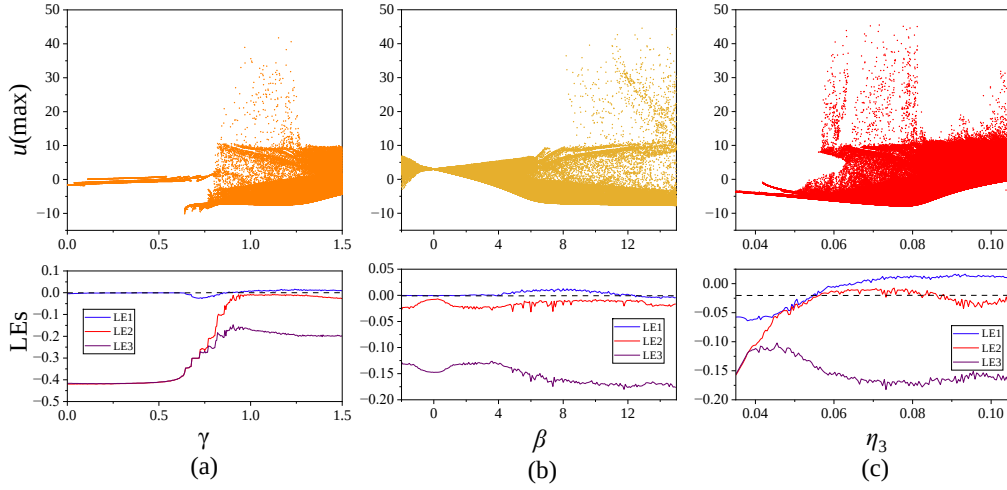


图 7 相关参数下的分岔图和 Lyapunov 图 (a) 非线性系数 γ ; (b) 外部激励幅值 β ; (c) 忆阻直流偏置 η_3

Fig. 7. Bifurcation diagrams and Lyapunov exponent plots for relevant parameters :

(a) nonlinearity coefficient γ ; (b) external excitation amplitude β ; (c) memristor DC bias η_3 .

由图 7(b)可见, 随着 β 的增大, 系统动力学行为依次经历临界过渡区、复杂振荡区和重新有序区。当 $\beta < 4.24$ 时, 最大 Lyapunov 指数在 0 附近小幅波动, 分岔点已由有限清晰分支逐渐展宽为稠密散点带, 说明系统处于规则振荡与复杂振荡之间的过渡区域。随着 β 继续增大, 系统经历正向倍周期分岔并进入混沌区域, 此时 $LE1 > 0$ 。但当 β 增大至 12.24 后, $LE1$ 再次跌破 0, 系统重新回到较简单的周期态。由此说明, 外部激励幅值 β 是调控系统动力学复杂程度的重要参数, 这也为后续选取幅值条件研究簇发振荡的演化特征提供了依据。

3.3 低频驱动下簇发振荡的演化特征及形成机理

簇发振荡是神经系统中一个重要的放电模态, 此类型的动力学行为依赖于具有快慢时间尺度的神经系统, 它的本质是一个非线性动力系统在快慢变量分离的框架下, 由慢变量调制快变量, 使其在静息与爆发两种定性不同的动力学状态之间进行周期性切换的现象。而频率参数 F 表征外部周期激励的时间尺度, 其变化会显著影响系统快慢变量之间的耦合关系。当 F 取较小值时, 外部激励变化较为缓慢, 系统在每个驱动周期内具有更充足的时间完成内部状态变量 ϕ 的积累与释放过程。系统的兴奋性会随内部状态缓慢演化, 从而使快变量 u 在静息阶段与脉

冲阶段之间发生交替切换，最终表现出典型的簇发振荡特征。相比之下，当 F 增大时，外部激励变化速度加快，慢变量 ϕ 难以在较短时间内完成充分响应，其对快子系统的调制作用减弱，系统中由记忆效应引起的状态切换机制受到抑制，因此簇发行为逐渐减弱甚至消失，系统响应趋于规则周期振荡。由此可见，低频驱动更有利于慢变量与主系统快变量形成有效的的时间尺度分离，这是该模型产生簇发振荡的重要原因。

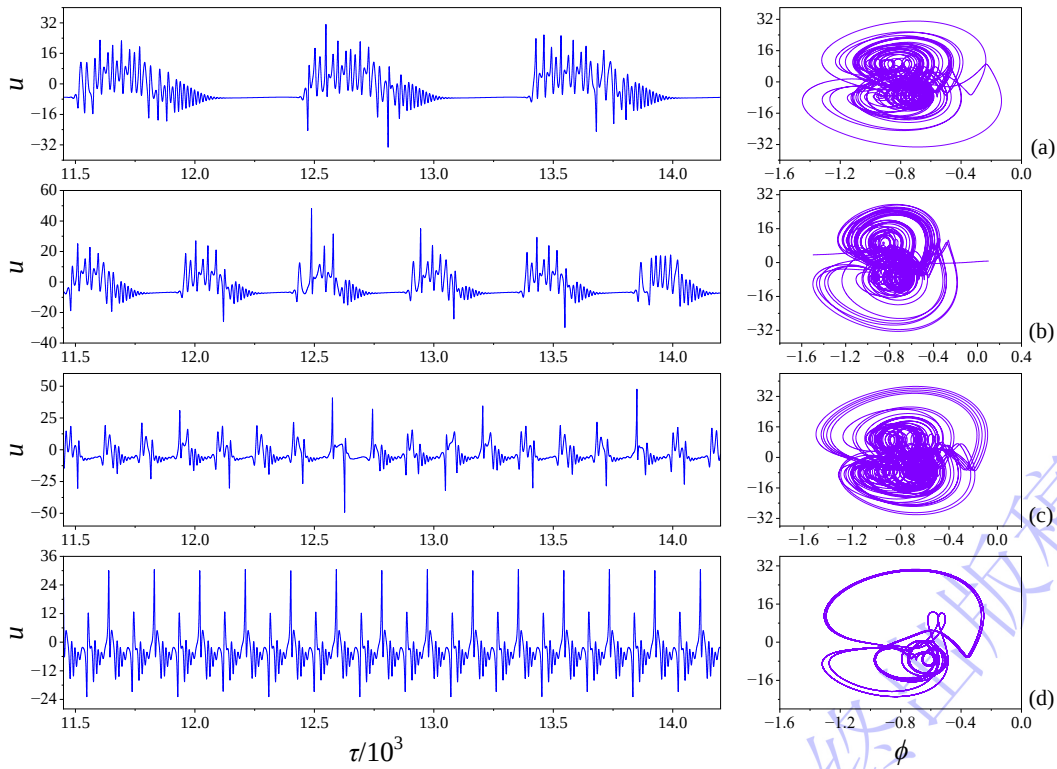


图 8 不同外部激励频率下的簇发振荡演化时域图及相图 (a) $F = 0.0066$; (b) $F = 0.0132$; (c) $F = 0.0396$; (d) $F = 0.060$

Fig. 8. Time-domain and phase-space diagrams of the evolution of burst oscillations under different external excitation frequencies: (a) $F = 0.0066$; (b) $F = 0.0132$; (c) $F = 0.0396$; (d) $F = 0.060$.

设定参数 $\beta = 10$, $\eta_3 = 0.07$, $\gamma = 1$, 保持系统初值为 $[0.6667, 0, 0.1]$, 刻画了簇发振荡的变迁过程以及对应相图如图 8 所示。观察可知在 F 较小时，膜电压 u 在静息态和激发态不断交替切换，证实了簇发振荡。而且随着频率 F 的不断增大，簇发振荡中簇的个数在不断增加但是每个簇的周期尖峰放电次数依次减少，

直至簇发振荡消失只剩下标准的尖峰放电。数值结果表明，外部激励频率 F 是影响系统放电模式的重要控制参数。

为进一步揭示外部激励幅值对系统簇发行为的调制作用，在其他条件不变的情况下，固定 $F = 0.0066$ 的驱动条件，分别绘制了 β 为 10、20、30 的时域响应图如图 9 所示。可以看出，随着的 β 增大，系统簇发波形表现出由复杂多尖峰型向规则平台型逐步演化的规律。在较小幅值条件下，簇发振荡内部包含大量高频尖峰，且振幅起伏明显，表现为复杂多尖峰簇发；当 β 进一步增大时，簇内尖峰数目减少，平台段与跃迁段逐渐清晰，系统演化为较规则的周期簇发；而在更大幅值下，波形呈现出明显的高低平台交替与快速切换特征，表现为典型的平台型簇发。该结果与图 7(b)中关于 β 的分岔图与 Lyapunov 指数图是一致的。

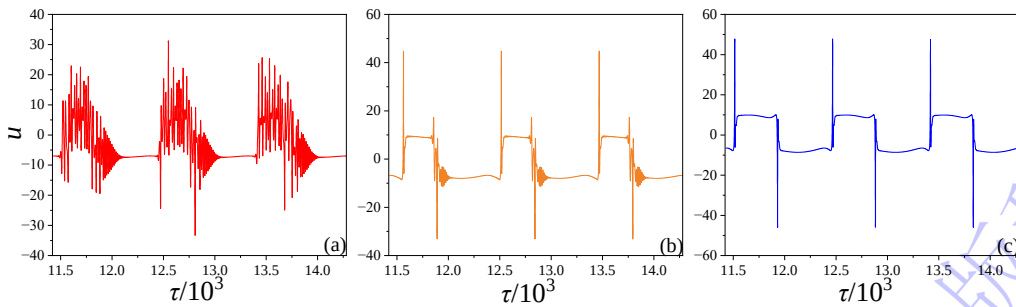


图 9 低频下不同幅值对应的时域图 (a) $\beta = 10$; (b) $\beta = 20$; (c) $\beta = 30$

Fig. 9. Time-domain plots corresponding to different amplitudes at low frequencies:

(a) $\beta = 10$; (b) $\beta = 20$; (c) $\beta = 30$.

为揭示系统簇发振荡的形成机制，进一步绘制了 (β, u) 平面中的转换相图，并将系统平衡分支叠加于其上进行分析,由于幅值较低时转换相图较为复杂,不利于机理展示。因此本文分别绘制了幅值转换相图如图 10 所示，但主要以 $\beta = 30$ 时阐述簇发振荡的形成过程。如图 10(c)所示，图中红色实线和灰色虚线分别表示两段稳定平衡分支与不稳定平衡分支，蓝色曲线表示系统在周期外部激励作用下的实际演化轨迹，随着 β 的变化，平衡点的稳定性也随之改变。图中 $FB1(-7.4407, 12.958)$ 和 $FB2(19.4407, -10.958)$ 表示为系统的 Fold 分岔点， $HB1(-5.3871, -7.2208)$ 和 $HB2(17.3871, 9.2208)$ 表示为系统的 Hopf 分岔点。其中

Fold 分岔改变系统固定参数截面上的平衡点数量导致增加或减少一对不稳定的平衡点分支, 进而影响轨迹跃迁通道以及激发阶段的振荡形态。Hopf 分岔使稳定平衡点发生振荡失稳或重新获得稳定性, 因此决定了系统静息态与振荡激发态之间的稳定性转换。

假设系统轨迹以 $P1(\beta = -30)$ 为起始点, 随着 β 的不断增大, u 沿着下方稳定平衡点分支稳定运行, 对应着簇发振荡时的静息态。当 β 增大到点 HB1 的时候发生了 Hopf 分岔, 这时候神经元系统失去稳定, 系统开始进入激发态, 轨迹在相空间中发生快速跃迁和大幅振荡, 并受到不稳定平衡分支及其 Fold 折叠结构的影响, 进而出现跳跃现象, 由于平衡分支的影响, u 趋于稳定。随着 β 的增大, u 逐渐稳定到点 $P2(\beta = 30)$ 。接着 u 做相反的运动, 沿着右上稳定平衡点分支遍历至 HB2, 系统再次因为 Hopf 分岔进入激发态, 稳定平衡点又一次失去稳定性, 轨迹在 Fold 分岔的作用下跳跃至下方的平衡点分支并在稳定平衡点的作用下回到了起始点 $P1$, 即神经元系统完成了一个周期的簇发振荡。因此可知本系统的簇发振荡由 Fold 分岔塑造不稳定平衡骨架以及 Hopf 分岔诱导稳定性转换共同决定。

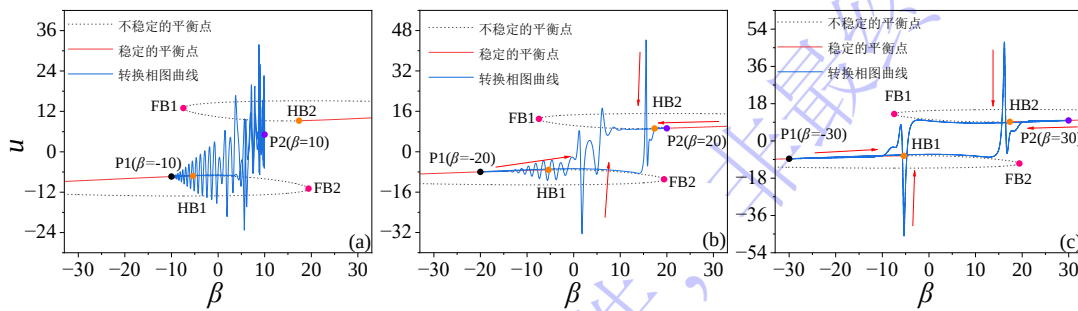


图 10 不同激励幅值下平衡点分布曲线与转换相图叠加 (a) $\beta = 10$; (b) $\beta = 20$; (c) $\beta = 30$

Fig. 10. Overlay of the equilibrium point distribution curve and the phase transition diagram for different excitation amplitudes: (a) $\beta = 10$; (b) $\beta = 20$; (c) $\beta = 30$.

3.4 高频驱动下尖峰放电的特征

尖峰放电时神经系统的另一重要模态, 由上一节可知, 在低频条件下多稳态

FHN 神经元系统实现的是簇发振荡，为了实现尖峰放电，将参数设置为 $F = 0.0660$ ， $\beta = 10$ ， $\eta_3 = 0.07$ ，保持初值不变，探索非线性反馈调制强度 γ 对本模型尖峰放电的影响。相关的分岔图以及 Lyapunov 指数图如图 11 所示。

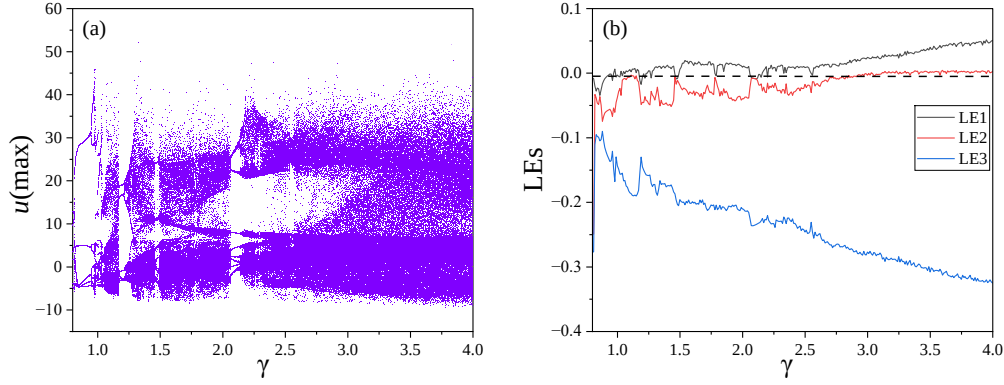


图 11 高频条件下参数 γ 变化时的动力学图 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数图
Fig. 11. Dynamical plots of parameter γ under high-frequency conditions: (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponent plot.

由图中可以看出，在高频率的情况下随着 γ 的不断增大，系统出现了更为复杂的动力学行为。随着参数数值的不断增大，在 $\gamma = 0.95$ 时出现了倍周期分岔，但是很快又经历了反向倍周期分岔。此时的 Lyapunov 指数 $LE1$ 一直在 0 左右浮动，说明系统在该区间内存在“周期窗口—混沌窗口”交替演化特征，表明系统在这一阶段具有较强的参数敏感性和复杂的吸引子重构行为。直到参数 $\gamma \in (2.06, 2.15)$ 时，系统经历了最后一次倍周期分岔，分岔图逐渐表现为大范围连续稠密散点带，此时 $LE1 > 0$ 且呈上升趋势，系统进入了稳定的混沌阶段。

接着分析与非线性增益 γ 相关的高频放电模态，研究表明，参数 γ 是调控多稳态 FHN 神经元尖峰放电模态的关键参数。如图 12 所示，当 γ 分别为 3、1.5 和 0.9 时，系统相应呈现出混沌、弱混沌、周期放电行为。这些行为严格按图 11 的分岔机制演化，从而证明了上述局部动力学分析的有效性。为了量化吸引子的复杂性，采用 Kaplan-Yorke 维数 D_{KY} 进行验证，其形式为式 (19) 所示，其中整数 j 需

要满足 $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i \leq 0$ 的条件。

$$D_{KY} = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_i \quad (19)$$

通过计算，对于混沌吸引子，Lyapunov 指数分别为 $LE1=0.02434$ 、 $LE2=-0.00328$ 和 $LE3=-0.27728$ ，对于弱混沌吸引子，Lyapunov 指数分别为 $LE1=0.00574$ 、 $LE2=-0.01862$ 和 $LE3=-0.19588$ 。因此可以计算出混沌和弱混沌的 D_{KY} 分别为 2.075 和 1.029，明显看出混沌吸引子的最大 Lyapunov 数值和 D_{KY} 均高于弱混沌，可以证明混沌时的吸引子具有更高的复杂度，符合图 12 中的相平面吸引子的差异。

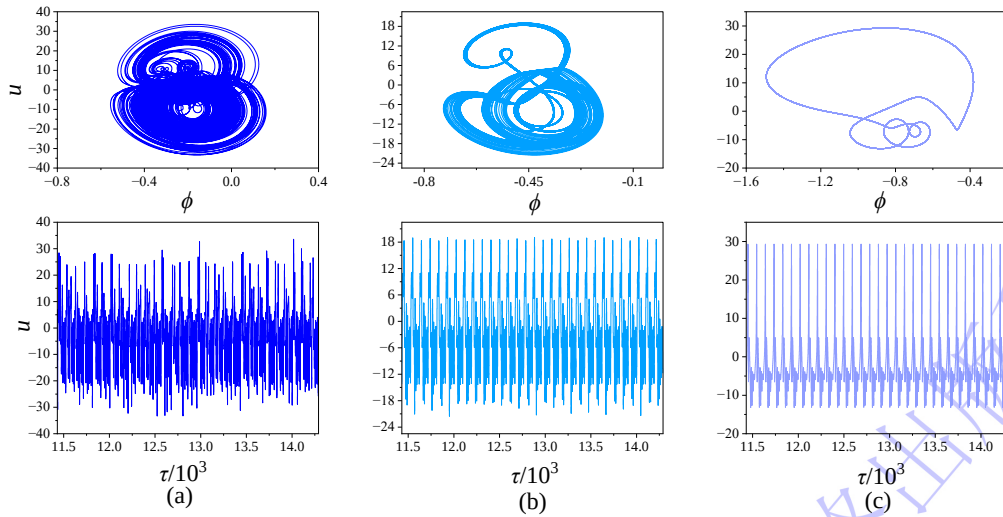


图 12 不同条件下的相平面吸引子与尖峰放电模态 (a) $\gamma=3$; (b) $\gamma=1.5$; (c) $\gamma=0.9$

Fig. 12. Phase-plane attractors and spike discharge modes under different conditions:

(a) $\gamma=3$; (b) $\gamma=1.5$; (c) $\gamma=0.9$.

4 忆阻初值位移调控的动力学分析

4.1 忆阻初值调控机制

在数值仿真中发现，当保持系统参数及外部激励不变、仅改变忆阻内部状态变量 ϕ 的初始值时，系统可表现出明显的轨道位移现象。进一步分析表明，该现象并非一般初值扰动引起的轨道偏移，而是由系统内部周期非线性结构所决定的离散初值位移调控特性。由系统方程可知，状态变量 ϕ 并不是以线性形式直接进

入系统，而是通过 $\sin(\phi)$ 与 $\sin(\phi)\cos(\phi)$ 参与系统演化。对于任意整数 $k \in \mathbb{Z}$ ，有

$$\begin{cases} \sin(\phi + 2k\pi) = \sin(\phi) \\ \sin(\phi + 2k\pi)\cos(\phi + 2k\pi) = \sin(\phi)\cos(\phi) \end{cases} \quad (20)$$

因此，系统向量场关于变量 ϕ 具有 2π 平移不变性。设 $(u(\tau), w(\tau), \phi(\tau))$ 为初值 $(u(0), w(0), \phi(0))$ 对应的一组解，则构造新函数

$$(\tilde{u}(\tau), \tilde{w}(\tau), \tilde{\phi}(\tau)) = (u(\tau), w(\tau), \phi(\tau) + 2k\pi) \quad (21)$$

由于 $2k\pi$ 为常数，所以有

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{du}{d\tau}, \frac{d\tilde{w}}{d\tau} = \frac{dw}{d\tau}, \frac{d\tilde{\phi}}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau} \quad (22)$$

再结合上述周期关系可知，新函数仍满足原系统方程。因此，在保持 $u(0)$ 与 $w(0)$ 不变的情况下，若仅将忆阻内部状态初值 $\phi(0)$ 改变为 $\phi(0) + 2k\pi$ ，则系统在 (u, w) 子空间中的动力学演化保持一致，而在 ϕ 方向上发生等量平移。由此说明，系统所呈现的初值位移调控现象，本质来源于忆阻内部状态变量所诱导的 2π 平移对称性^[40]。

4.2 可初值位移调控的多稳态共存吸引子

为揭示系统的初值调控特性及多稳态动力学特征，令多稳态 FHN 神经元系统的参数设定为 $\beta = 10$ 、 $\eta_3 = 0.07$ 、 $\gamma = 1.44$ 和 $F = 0.0660$ ，设置初始条件为 $[0.6667, 0, \phi(0)]$ ，当 $\phi(0)$ 在 $[0, 6\pi]$ 变化时，分别绘制了关于变量 ϕ 的分岔图和变量 $u(0)$ 的吸引盆图如图 13。由图 13(a)可观察发现，随着 $\phi(0)$ 从 0 增加到 6π ， ϕ 会收敛到若干条彼此分离的分支，其周期为 2π 。因此可以证明本系统具有明显的共存吸引子现象且其具有沿着忆阻内部状态方向的周期位移特性，这也与 4.1 节中所证明具有 2π 周期的轨道偏移现象相吻合。图 13(b)吸引盆图进一步揭示了不同吸引子的初值分布规律，不同颜色区域代表着不同的吸引域。需要指出的是，各吸引域对应的吸引子具有相似的几何形态和动力学演化特征，其区别主要体现在

磁通变量 ϕ 的终态偏置位置不同，紫色、蓝色、绿色和黄色区域分别对应系统最终收敛到 ϕ 位于 0 、 2π 、 4π 和 6π 附近的共存吸引子。相应区域呈竖直条带状分布，说明在所考察范围内，系统最终演化到哪一类吸引子主要取决于忆阻内部状态初值 $\phi(0)$ ，而对神经元电压初值 $u(0)$ 的依赖较弱。而吸引盆边界较为清晰规则，表明系统具有较好的初值可控性与状态选择鲁棒性。上述结果表明，该忆阻神经元系统不仅存在多稳态共存现象，而且可通过调节忆阻初始状态实现吸引子之间的有效切换。

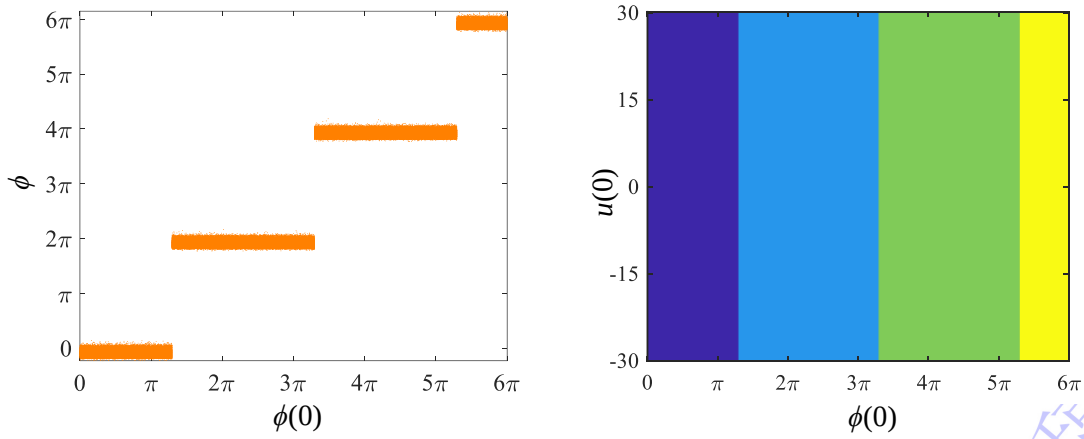


图 13 关于忆阻初始状态的初值分岔图与吸引盆 (a) 初值分岔; (b) 吸引盆

Fig. 13. Bifurcation diagrams and attractors for the initial state of memristors (a) Initial state bifurcation; (b) Attractor diagram.

为进一步验证系统中共存吸引子的存在性，设定 $\beta=10$ 、 $\eta_3=0.07$ 、 $\gamma=3$ 和 $F=0.0660$ ，固定初值 $u(0)=0.6667$ ， $w(0)=0$ ，选取不同的忆阻状态初值 $\phi(0)=0.1\pi/2.1\pi/4.1\pi$ 进行数值仿真，其对应三维平面相图和关于 ϕ 的时域波形如图 14 所示。由图 14(a)可以看出，在相同参数条件下，系统能够演化到三个彼此分离的吸引子，它们分别分布于 $\phi=0$ 、 2π 和 4π 附近。可以看出三者在此平面中的位置不同，但其几何形态基本一致，表明这些吸引子具有明显的位移复制特征。进一步结合图 14(b)时域波形可知，三组轨迹均在各自中心值附近保持稳定振荡，且振荡幅值和波形结构相近，仅平均位置不同。该现象说明，不同初值可

诱导系统进入不同的平移共存吸引子。

此外，相邻吸引子在 ϕ 方向上的间距近似为 2π ，这与忆阻非线性项所具有的周期特性一致。因而，该系统所呈现的多稳态并非彼此无关的随机共存，而是一类由忆阻内部状态周期性引起的规律性位移共存现象。上述结果进一步表明，通过调控忆阻初始状态可实现对系统最终吸引子的有效选择。

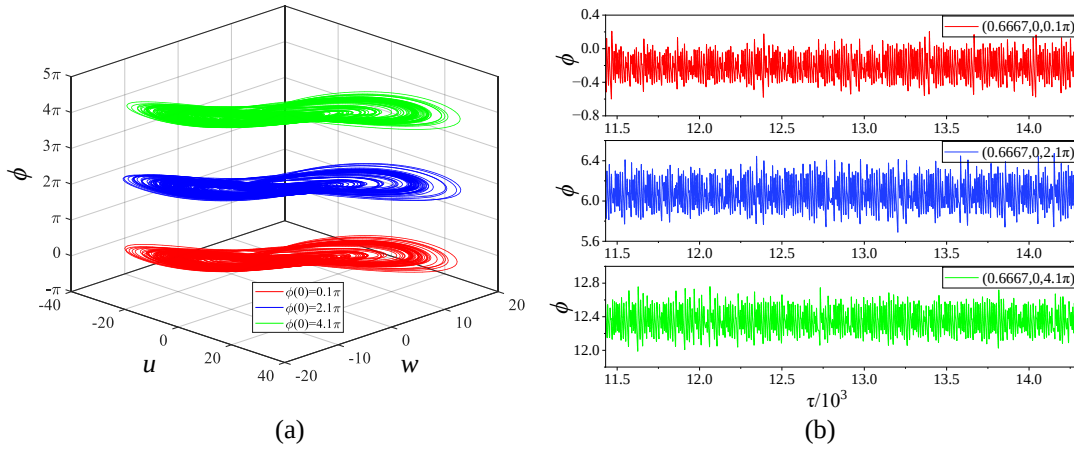


图 14 不同忆阻初始状态下的共存吸引子及对应时域波形 (a) 共存吸引子; (b) 时域图
Fig. 14. Coexisting attractors and corresponding time-domain waveforms for different initial states of memristors (a) Coexisting attractors; (b) Time-domain plot.

5 电路实现与模型讨论

5.1 PSpice 电路实现

为验证所建忆阻神经元模型的电路可实现性，并为后续硬件实现提供依据，本文对系统进行了等效电路设计。如图 15 所示，该电路主要由交流激励源、直流偏置源、电阻、电容、电感、运算放大器、AD844 电流反馈运算放大器、模拟乘法器以及正弦运算模块构成。其中，忆阻状态电路用于实现忆阻器的状态演化及非线性特性，浮地非线性模块利用 AD844 模块用于完成忆阻器的浮地接入。各器件参数设置如下：交流激励源 v_s 的幅值为 1.5 V、频率为 1500 Hz；电源电压为 $+V_{CC} = 15\text{ V}$ 、 $-V_{CC} = 15\text{ V}$ ；偏置源 $E_N = 0.15\text{ V}$ ， $E_M = 1\text{ V}$ 。乘法器等效增益 $g_1 = 3$ ， $g_2 = 1$ ， $R_8 = 10\text{ k}\Omega$ ， $R_9 = 20\text{ k}\Omega$ ，其他参数均与前文数值仿真一致。

分别设定电容 C_1 的初始电压 $v_\phi(0) = 0.1\pi / 2.1\pi / 4.1\pi$ ，每个初始电压驱动 PSpice 电路产生了忆阻初值相关的动力学吸引子。因为多稳态忆阻 FHN 神经元模型的初值敏感性以及 PSpice 软件的计算误差，因此存在细小的结果误差是被允许的，将电路仿真的数据导入到 Origin 中进行处理，结果如图16所示。可以看出与图(14)(a)中的吸引子只存在微小差别，所以实验结果和数值模拟发现的忆阻初值位移调控的现象相匹配，也因此证明了数值仿真的有效性。

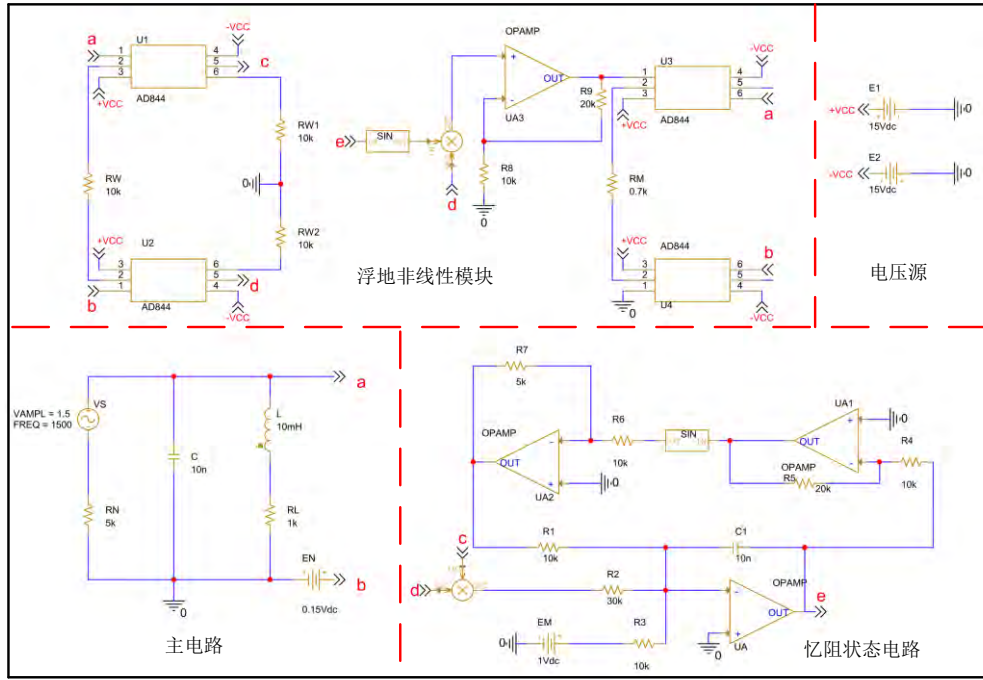


图 15 多稳态忆阻 FHN 神经元的 PSpice 等效实现电路图

Fig. 15. PSpice Equivalent Circuit Diagram of a Multi-State Memristor FHN Neuron.

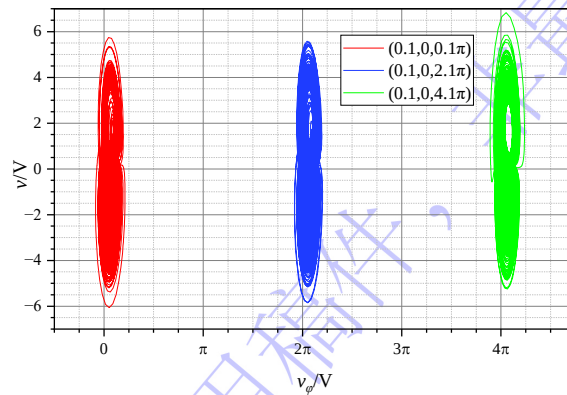


图 16 不同忆阻初始条件下 PSpice 电路仿真的共存吸引子

Fig. 16. Coexisting attractors in PSpice circuit simulations under different memristor initial conditions.

5.2 模型特征与相关研究比较

为进一步说明本文模型的研究定位，表 2 对相关忆阻神经元模型进行了简要比较。由表 2 可见，已有研究在模型类型、忆阻器作用方式和验证应用方面各有侧重。相比之下，本文重点关注多稳态忆阻器引入 FHN 电路后产生的初值依赖共存吸引子及规律性位移调控机制，并结合动力学分析和 PSpice 电路仿真对该机制进行验证。该对比进一步表明，本文工作可作为现有忆阻神经元模型在多稳态初值调控研究方面的补充。

表 2 忆阻神经元模型对比

Table 2. Comparison of Memristor Neuron Models

文献	模型对象	忆阻器作用	主要动力学行为	验证/应用
[20]	离散忆阻神经元	替代恢复变量	周期、混沌、超混沌及多吸引子共存	PSIM、FPGA
[21]	CCM 神经元电路	电流控制忆阻器嵌入 LC 网络	静息、周期、混沌、及类神经尖峰	数值分析、分岔验证
[22]	自突触 FHN 神经元	自突触反馈调制	周期、准周期和混沌动力学	数值分析
[24]	非自治忆阻 FHN 电路	忆阻非线性通道	簇发振荡与分岔机制	电路仿真、硬件实验
[27]	FHN-HR 异质神经元	忆阻耦合通道	簇发、尖峰与同步动力学	电路实现、同步控制
[35]	Wilson 耦合神经元	多稳态忆阻耦合	簇发、混沌和多涡卷行为	Arduino 实现
本文	多稳态忆阻 FHN 电路	替代隧道二极管	簇发、尖峰、混沌及平移共存吸引子	PSpice 电路实现

6 结 论

传统 FHN 神经元电路在表征多稳态及复杂振荡等神经特性方面存在局限，为此，本文引入压控型多稳态忆阻器替代原电路中的隧道二极管，构建了一种新型忆阻 FHN 神经元电路。研究表明，该电路不仅能产生周期、簇发、尖峰及混沌等多种放电模式，其低频驱动下更易诱发簇发振荡的特性，与生物神经节律活动相契合；同时，无量纲哈密顿能量分析表明，多稳态忆阻器的引入使系统具有状态依赖的能量调控特性，为复杂放电和多稳态共存提供了能量角度的解

释。更重要的是，忆阻器的引入赋予了电路记忆效应与状态依赖性，使传统 FHN 电路中固定的非线性通道转变为受内部状态变量调制的忆阻通道。由于忆阻器等效忆导随内部状态变量动态变化，电路响应不仅取决于当前外部激励，还与忆阻器的历史状态和初始状态有关，因此系统在外部激励频率、激励幅值、忆阻增益及忆阻初值变化下表现出更强的自适应调节能力。具体而言，系统可在不同参数条件下实现周期、簇发、尖峰及混沌等放电模式切换，并可通过调控忆阻内部状态初值诱导多个规律性平移的共存吸引子，实现对最终动力学状态的选择。从应用角度看，该忆阻 FHN 神经元电路可作为一种可调神经形态信号发生单元，用于产生不同类型的类神经放电信号；同时，其初值依赖的多稳态共存特性也可用于多状态存储、初值编码和状态选择等类突触记忆调控场景，从而在硬件层面为生物神经元突触可塑性及状态依赖计算机制提供一种物理模拟实现途径。此外，该系统所表现出的混沌放电、初值敏感性和多稳态状态切换特征，也可为伪随机序列生成以及图像加密中的置乱、扩散过程提供潜在动力学基础，从而拓展其在信息安全领域中的应用前景。本研究基于标准、易集成的电路元件，在一定程度上减少了对特殊器件的依赖，为神经动力学研究提供了可调性较强的仿真平台。所表现出的多稳态、初值依赖和状态可调等特性，也为构建基于忆阻器的高能效神经形态计算系统提供了参考依据。

参考文献

- [1] Ma J 2023 *J. Zhejiang Univ. Sci. A* **24** 109
- [2] Carvalhas-Almeida C, Serra J, Moita J, Cavadas C, Álvaro A R 2023 *Neurosci. Biobehav. Rev.* **147** 105100
- [3] Jiang B W, Xiong Y, Liu X P, Shi Y J, Zhao W T, Ma G K, Zhang J, Wan H Z,

- Tao L, Wang H 2026 Sci. China Mater. **69** 704
- [4] Cai Y C, Cheng R Q, Cai Y, He J 2025 Sci. Bull. **70** 3299
- [5] Ghode S B, Patil C S, Sawant J K, Kim J, Chougale M Y, Noman M, Saqib Q M, Bae J 2026 Mater. Sci. Eng. R Rep. **169** 101184
- [6] Xu Q, Wang Y T, Wu H G, Chen M, Chen B 2024 Chaos Solitons Fractals **179** 114458
- [7] Zhang X F, Ma J, Xu Y, Ren G D 2021 Acta Phys. Sin. **70** 090502 (in Chinese)
[张秀芳, 马军, 徐莹, 任国栋 2021 物理学报 **70** 090502]
- [8] Bosco N D, Manchein C, Rech P C 2025 Chaos Solitons Fractals **193** 116110
- [9] Erkan E, Erkan Y 2025 Physica A **675** 130790
- [10] Lu Y, Nie W J, Wang X, Ma Q Y 2025 Chin. Phys. B **34** 27
- [11] Xu Y D, Dong C W 2026 Acta Phys. Sin. **75** 020001 (in Chinese) [徐一丹, 董成伟 2026 物理学报 **75** 020001]
- [12] Wang M N, Wang K, Sun B, Zhou G D, Cao Z L, Gao K, Ren F, Chen X L, Li X, Shao J Y 2025 Mater. Today Nano **30** 100628
- [13] Wang M R, Chai X J, Yan Z Y, Suo D D, Ji J L 2025 Mater. Rep. **39** 62 (in Chinese) [王淼儒, 柴晓杰, 闫泽宇, 索丁丁, 冀健龙 2025 材料导报 **39** 62]
- [14] Yang F F, Ma J, Wu F Q 2024 Chaos Solitons Fractals **187** 115361
- [15] Tang Z, Sun B, Zhou G D, Zhou Y Z, Cao Z L, Duan X G, Yan W T, Chen X L, Shao J Y 2024 Mater. Today Nano **25** 100439
- [16] Yan L, Yan Z B, Luo T, Liu Z Y, Liu W Q 2026 Nonlinear Dyn. **114** 403
- [17] Li Y Q, Lu Z Z, Dong Y J, Liang Y, Wang G Y, Wang L, Zhao Y F 2026

- [18] Chen M, Zhang Y C, Zhang Y Z, Xu Q, Wu H G 2024 Chaos Solitons Fractals **188** 115574
- [19] Guo Q, Xu Y 2026 Acta Phys. Sin. **75** 010001 (in Chinese) [郭群, 徐莹 2026 物理学报 **75** 010001]
- [20] Chen X J, Sun K H, Wang H H, Liu J, Yao Z 2025 Chaos Solitons Fractals **201** 117189
- [21] Li Z J, Chen K J 2023 Chaos Solitons Fractals **175** 114017
- [22] Feali M S 2025 AEU-Int. J. Electron. Commun. **191** 155679
- [23] Zhu Y X, Xu Q, Chen M, Hou L P, Bao B C 2022 Acta Electron. Sin. **50** 1083 (in Chinese) [朱永鑫, 徐权, 陈墨, 侯莉萍, 包伯成 2022 电子学报 **50** 1083]
- [24] Bao B C, Chen L H, Bao H, Chen M, Xu Q 2024 Chaos Solitons Fractals **181** 114608
- [25] Xu Q, Fang Y J, Wu H G, Bao H, Wang N 2024 Chaos Solitons Fractals **187** 115376
- [26] Zhang J H, Liao X F 2017 AEU-Int. J. Electron. Commun. **75** 82
- [27] Jia M M, Cao J W, Bai M M 2024 Acta Phys. Sin. **73** 170502 (in Chinese) [贾美美, 曹佳伟, 白明明 2024 物理学报 **73** 170502]
- [28] Ding D W, Wang M Y, Wang J, Yang Z L, Niu Y, Wang W 2024 Acta Phys. Sin. **73** 100502 (in Chinese) [丁大为, 王谋媛, 王金, 杨宗立, 牛炎, 王威 2024 物理学报 **73** 100502]
- [29] Zeng Y C, Li W X, Sun X L 2024 J. South China Univ. Technol. Nat. Sci. Ed.

- 52 139 (in Chinese) [曾以成, 李文轩, 孙小力 2024 华南理工大学学报 (自然科学版) 52 139]
- [30] Pan Y J, Dong C W 2025 Acta Phys. Sin. **74** 240502 (in Chinese) [潘奕君, 董成伟 2025 物理学报 **74** 240502]
- [31] Min F H, Wang Z L, Cao Y, Wang E R 2018 Acta Electron. Sin. **46** 486 (in Chinese) [闵富红, 王珠林, 曹弋, 王恩荣 2018 电子学报 **46** 486]
- [32] Ding D W, Lu X Q, Hu Y B, Yang Z L, Wang W, Zhang H W 2022 Acta Phys. Sin. **71** 230501 (in Chinese) [丁大为, 卢小齐, 胡永兵, 杨宗立, 王威, 张红伟 2022 物理学报 **71** 230501]
- [33] Liu Y A, Ma R C, Li G, Yu Q, Liu Y, Hu S G 2023 J. Univ. Electron. Sci. Technol. China **52** 38 (in Chinese) [刘益安, 马瑞辰, 李国, 于奇, 刘洋, 胡绍刚 2023 电子科技大学学报 **52** 38]
- [34] Li X X, Zheng C, Wang X, Cao Y Z, Xu G Z 2022 J. Harbin Inst. Technol. **54** 163 (in Chinese) [李晓霞, 郑驰, 王雪, 曹樱子, 徐桂芝 2022 哈尔滨工业大学学报 **54** 163]
- [35] Goufo E F D 2026 Chaos Solitons Fractals **206** 117862
- [36] Xu Q, Wang K, Chen M, Parastesh F, Wang N 2024 Chaos Solitons Fractals **181** 114654
- [37] Tamba V K, Biamou A L M, Pham V T, Grassi G, Tagne F K, Takougang A C N 2025 AEU-Int. J. Electron. Commun. **191** 155661
- [38] Deng Q L, Wang C H, Yang G 2026 Acta Phys. Sin. **75** 010003 (in Chinese) [邓全利, 王春华, 杨港 2026 物理学报 **75** 010003]
- [39] Ma J 2026 J. Lanzhou Univ. Technol. **52** 165 (in Chinese) [马军 2026 兰州

[40] Pan G H, Li C B, Liu W Y, Xue Y S, Qi X L 2025 *Chaos Solitons Fractals*

198 116610

Dynamic Regulation of a Multistable Memristive FitzHugh-Nagumo Neuronal Circuit Under External Excitation *

Zhang Yu-Hang Zhang Shao-Hua[†] Wang Cong Zhang Hong-Li Ma Ping Qu Zhuang

(School of Intelligence Science and Technology, Xinjiang University, Urumqi, 830049, China)

Abstract

To reveal how memristive memory, external periodic excitation, and initial-state regulation jointly affect the complex dynamics of a FitzHugh–Nagumo (FHN) neuronal circuit, a multistable memristive FHN neuronal circuit is proposed by replacing the conventional tunnel diode in the classical FHN circuit with a voltage-controlled multistable memristor. First, the multistable memristor model is established from its port current relation and internal state equation. Its memristive and multistable properties are verified through pinched hysteresis loops, state-variable evolution, and responses under different initial conditions. Based on Kirchhoff’s laws, the circuit equations of the proposed neuron are then derived and transformed into an equivalent dimensionless model by voltage, current, and time scaling, which provides a unified framework for stability analysis and numerical simulation. To further clarify the energy regulation mechanism, a dimensionless Hamiltonian energy function is constructed by considering the electric-field energy of the capacitor, the magnetic-field energy of the inductor, and the equivalent electromagnetic

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 52267010, 52567014, 52565062), Xinjiang Talent Development Fund Project (XJRC-2025-KJ-YJ-CXPT-077), Xinjiang Uygur Autonomous Region Tianshan Innovation Team (2025D14009) and Tianshan Talent Training Program (2023TSYCCX0037, 2024TSYCLJ0008).

[†] Corresponding author.E-mail: shaohuazhang@xju.edu.cn
The first author.E-mail:2249528003@qq.com

energy of the memristive channel. Helmholtz decomposition is used to decompose the vector field into conservative and dissipative components, showing that the introduced multistable memristor provides a state-dependent energy regulation mechanism for the FHN circuit. The effects of external excitation frequency, excitation amplitude, memristive feedback strength, and DC bias on neuronal firing dynamics are systematically investigated using equilibrium distribution, Jacobian eigenvalue analysis, two-dimensional dynamical maps, bifurcation diagrams, Lyapunov exponents, and phase trajectories. Numerical results show that the proposed circuit can generate various firing patterns, including periodic oscillations, bursting oscillations, spiking activity, weakly chaotic oscillations, and chaotic oscillations. In particular, low-frequency excitation promotes time-scale separation between the slow memristive state variable and the fast neuronal variables, thereby inducing pronounced bursting behavior. The bursting transition is jointly governed by stability switching induced by Hopf bifurcations and the unstable equilibrium skeleton shaped by fold bifurcations. Under high-frequency excitation, the system evolves from periodic firing to chaotic firing as the memristive nonlinear feedback strength varies. In addition, since the memristive internal state enters the system through periodic nonlinear functions, the vector field exhibits 2π translational invariance along the memristive state direction. This property enables regular translational displacement of trajectories when only the initial memristive state is changed, leading to multiple coexisting attractors with similar geometric structures but different spatial locations. Basin analysis further shows that the final attractor is mainly determined by the initial memristive state, and the well-defined basin boundaries indicate effective initial-state controllability. Finally, an equivalent PSpice circuit is designed to verify the circuit implementability of the proposed model. The circuit simulation results under different initial voltages of the memristive state capacitor agree well with the numerical results, confirming the initial-state-dependent coexistence and translational displacement of attractors. These results demonstrate that the multistable memristor not only enhances the diversity of firing patterns in the FHN neuronal circuit, but also endows the system with regular multistable coexistence that can be selected by the memristive initial state. The proposed model provides a

physically realizable theoretical and circuit framework for studying complex firing regulation, multistable state control, and neuromorphic circuit design based on memristive neurons.

Keywords: Memristors, FHN neurons, burst oscillations, coexisting attractors

PACS: 05.45.Ac, 05.45.-a

录用稿件，非最终出版稿