

专题: 兰州大学物理学科 80 周年

基于可编程拓扑电路的合成参数空间 Berry 相位测量与调控*

杨尚霖^{1) #} 李训栓^{2) #} 贾浩^{1) †}

1) (兰州大学物理科学与技术学院, 兰州理论物理中心, 甘肃省理论物理重点实验室, 量子理论及
应用基础教育重点实验室, 甘肃省量子物理基础学科研究中心, 兰州 730000)

2) (西安电子科技大学光电工程学院, 西安 710071)

(2026 年 5 月 15 日收到; 2026 年 6 月 10 日收到修改稿)

拓扑电路为可控人工系统中研究能带几何性质提供了灵活实验平台. 已有研究多聚焦于大规模周期性晶格系统中真实空间边界态的观测, 而可编程少节点系统在合成参数空间中几何相位的测量与调控仍有待发展. 本文设计并实现了一种三节点可编程拓扑电路, 实现了耦合强度 (hopping amplitude) 和在位势 (onsite potential) 连续可调的实三能级哈密顿量. 通过阻抗矩阵层析重构本征模, 并沿二维合成参数空间中的闭合路径提取 Berry 相位. 实验观察到包围最低两条能带相关锥形交叉点的闭合路径给出接近 π 的 Berry 相位, 而不包围时相位接近零. 进一步引入单节点相对在位势调控, 使锥形交叉点在参数空间中发生位移, 并在同一固定路径下实现 Berry 相位在 π 与零之间的离散切换. 该工作表明, 可编程电路可用于在合成参数空间中测量与调控几何相位, 并为拓扑电路拓展到可编程能带几何调控提供了一种实验方案.

关键词: 可编程拓扑电路, Berry 相位, 合成参数空间, 锥形交叉

DOI: 10.7498/aps.75.20260695

CSTR: 32037.14.aps.75.20260695

1 引言

拓扑电路 (topoelectrical circuit) 是近年来迅速发展的一类人工电磁结构实验平台, 其基本思想是在集总元件网络中利用基尔霍夫方程与凝聚态物理紧束缚哈密顿量之间的数学同构关系, 将能带拓扑问题映射到经典电路体系中加以实现和研究^[1-3]. 在这一对应关系下, 电路节点对应紧束缚模型中的晶格位, 节点间导纳表征节点之间的耦合特性. 通过适当选择工作频率, 电路拉普拉斯 (circuit

Laplacian) 矩阵 $J(\omega)$ 可与目标体系的有效哈密顿量具有相同的矩阵结构, 从而模拟相应的拓扑物理行为, 是研究能带拓扑的有力实验平台^[4-9]. 拓扑电路虽然属于经典系统, 但其拓扑性质同样来源于参数空间中本征模的全局连接方式. 只要体系具有定义良好的本征值与本征矢, 本征模式在参数空间沿闭合路径演化时便可表现出几何相位和拓扑不变量^[2,10,11]. 因此, 拓扑电路为在可控、可测的经典平台上模拟量子体系和波动体系中的拓扑概念提供了有效途径.

现有拓扑电路实验大多聚焦于包含数十至数

* 国家自然科学基金 (批准号: 52541020, 62405228, 61905101, 12247101)、甘肃省自然科学基金 (批准号: 24JRRA405, 25JRRA799)、秦创原引用创新创业人才项目 (批准号: QCYRCXM-2023-048)、中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: lzujbky-2025-jdxx07) 和高等学校学科创新引智计划 (“111 计划”) (批准号: B20063) 资助的课题.

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: jiahao@lzu.edu.cn

百个节点的大规模周期性或准周期性晶格系统, 其研究对象主要是真实空间中的拓扑态. 例如, Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型被用于观测一维拓扑绝缘体中的零能边界态^[1]; 基于 Haldane 模型或相关方案的二维拓扑电路实现了手性边界模式的测量^[12,13]; 高阶拓扑绝缘体中的角态及相关边界局域模式也已得到观测^[1,14,15]; Weyl 半金属中的费米弧表面态亦可通过三维电路网络进行模拟^[16,17]. 此外, 通过引入运算放大器等有源元件实现非互易耦合, 电路平台还可推广到非厄米拓扑物理研究, 用于观测非厄米趋肤效应^[18-20]、增益与损耗诱导的拓扑相变^[21]等. 这些工作的共同特征在于研究体系通常由具有平移对称性或近似平移对称性的大规模晶格网络构成, 拓扑不变量定义在布里渊区动量空间中, 而实验观测量则主要表现为真实空间中边界态的阻抗分布或电压响应.

进一步通过引入变容管、模拟乘法器等可编程元件, 拓扑电路中的参数可以实现原位调节, 从而将研究对象拓展到动态体系和非平衡体系. 其中, 一个重要方向是时域周期调制: 通过对电路耦合参数施加周期性切换或连续调谐, 可以在电路平台上模拟 Thouless 泵浦^[22]等非平衡拓扑效应, 此时体系的拓扑性质由驱动方式所确定的 Floquet 准能带结构决定. 除此之外, 通过对电路哈密顿量进行可编程调控, 还可以在同一平台上开展高阶拓扑相、朗道能级以及安德森局域等现象的实验研究^[23].

除上述晶格体系中的拓扑态模拟外, 可编程拓扑电路的高可调自由度还为研究合成参数空间中的几何性质提供了另一条路径. 与时间周期驱动方案不同, 这类方法通过准静态地逐点调节电路参数, 在由外部控制参数 λ 构成的合成参数空间中遍历一族有效哈密顿量 $H_{\text{eff}}(\lambda)$, 并使系统在每个参数点均保持稳态. 对于这类体系, 其本征矢在合成参数空间中同样可以形成非平庸的几何结构. 尽管已有拓扑电路工作主要通过动量空间拓扑不变量来解释边界态或角态的形成机制, 但基于外部控制参数构造合成参数空间并实验探测和调控本征态几何性质的方案仍相对有限.

Berry 相位是表征本征态在参数空间中几何结构的基本物理量之一, 反映了本征态沿参数空间闭合路径演化时所积累的整体几何相位^[24,25]. 这里的参数空间可以是动量空间、外场空间, 也可以是由结构参数或调制参数构成的合成参数空间. Berry

相位最初在量子绝热演化的框架下提出^[24], 但其数学定义更一般地刻画了参数依赖本征矢沿闭合路径的几何性质, 并不局限于量子系统^[25]. 对于实对称哈密顿量, 二维参数空间中的二重简并通常对应锥形交叉 (conical intersection)^[26]; 当闭合路径包围该简并点时, 实本征矢在返回初始参数点后发生整体符号反转, 对应 Berry 相位为 π , 反之为 0^[24,27]. 目前, Berry 相位的实验观测已在冷原子^[28]、集成光学^[29]、超导量子比特^[30]以及声学晶体^[31]等平台上实现. 但是在可编程电路中, 基于合成参数空间直接重构本征模从而提取和调控 Berry 相位的实验工作仍有待开展.

本文设计并实现了一种三节点全参数可编程拓扑电路平台, 在由耦合强度和在位势构成的合成参数空间中对实三能级系统的 Berry 相位进行实验测量与调控. 实验结果表明, 包围相关锥形交叉点的闭合路径对应接近 π 的 Berry 相位, 而不包围相关简并点的路径对应接近 0 的 Berry 相位. 进一步地, 通过调节单节点相对在位势 ε_a , 可以驱动相关锥形交叉点在参数空间中移动, 并在同一固定闭合路径下实现 Berry 相位由 π 向 0 的离散切换. 上述结果表明, 少节点可编程拓扑电路可作为研究合成参数空间本征态几何性质及其可控调制的实验平台.

2 理论模型设计

根据基尔霍夫电流定律, 电路网络在频率 ω 的稳态激励下满足节点方程

$$I_a(\omega) = \sum_b J_{ab}(\omega) V_b(\omega), \quad (1)$$

其中 V_b 为节点 b 的电压, I_a 为注入节点 a 的电流, J_{ab} 为电路 Laplacian 矩阵的元素. 对于由电容 C_{ab} 和电感 L_{ab} 并联构成的支路, Laplacian 矩阵可写为

$$\mathbf{J}(\omega) = i\omega \mathbf{C} + \frac{1}{i\omega} \mathbf{W}, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{W}$ 分别为电容和电感倒数的 Laplacian 矩阵, 非对角元 J_{ab} ($a \neq b$) 对应节点 a, b 之间支路的互导纳, 对角元 J_{aa} 由节点 a 的对地导纳与所有相连支路导纳之和决定^[2].

为建立 $\mathbf{J}$ 与紧束缚哈密顿量 H 的对应关系, 选取中心工作频率 ω_0 , 使每条支路中的电感与一个基准电容 $C_{\text{base}} = 1/(\omega_0^2 L)$ 在 ω_0 处恰好谐振. 定

义比例因子 $\xi = \omega_0 C_{\text{unit}}$ (其中 C_{unit} 为将无量纲哈密顿量参数转化为物理电容的比例常数), 则在 ω_0 处有

$$\mathbf{J}(\omega_0) = i\xi(\mathbf{H} - E\mathbf{I}), \quad (3)$$

其中 E 为选定能带的本征值, $\mathbf{I}$ 为单位矩阵. 非对角元给出耦合 t_{ab} , 对角元给出在位势 ε_a 因子. 由此, Laplacian 的本征矢即为哈密顿量的本征矢, 阻抗测量所获得的格林函数 $G = J^{-1}$ 反映哈密顿量的本征态信息.

为实现耦合项和在位势项在实数范围内可编程调节, 本文在任意节点 a 与 b 之间采用可调电容 C_{ab} 与固定电感 L_{ab} 并联的结构. 该支路在工作频率 ω_0 处的等效互导纳为

$$y_{ab} = i\omega_0 C_{ab} + \frac{1}{i\omega_0 L_{ab}} = i\omega_0 C_{ab}^{\text{eff}}, \quad (4)$$

其中有效电容 $C_{ab}^{\text{eff}} = C_{ab} - 1/(\omega_0^2 L_{ab})$ 可随 C_{ab} 连续变化并跨越零点.

$$t_{ab} = -\frac{\omega_0 C_{ab}^{\text{eff}}}{\xi} = -\frac{C_{ab}^{\text{eff}}}{C_{\text{unit}}}. \quad (5)$$

因此, 通过改变 C_{ab} 即可连续调节 t_{ab} 的符号和大小. 当 b 取为接地参考节点时, 节点 a 的对地支路导纳用于设定在位势 ε_a , 并补偿因相邻耦合参数变化引起的 Laplacian 对角元偏移.

图 1(a) 给出了三节点三角模型的示意图, 其中节点在位势由 $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ 表征; 节点间耦合由 t_{ab}, t_{ac}, t_{bc} 表征. 图 1(b) 为对应的可编程 LC 电路实现示意. 聚焦于 $\varepsilon_b = \varepsilon_c = 0$ 的情形, 此时系统对应一个实对称的三能级有效哈密顿量

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_a & t_{ab} & t_{ac} \\ t_{ab} & 0 & t_{bc} \\ t_{ac} & t_{bc} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

固定 $t_{ab} = 1$ 作为能量标度, 将 t_{bc} 和 t_{ac} 作为两个独立可调参数, 构成二维合成参数空间.

该哈密顿量的三个本征值 $E_0 \leq E_1 \leq E_2$ 由特征方程

$$E^3 - \varepsilon_a E^2 - (t_{ab}^2 + t_{bc}^2 + t_{ac}^2) E + \varepsilon_a t_{bc}^2 - 2t_{ab} t_{bc} t_{ac} = 0 \quad (7)$$

确定. 当 $\varepsilon_a = 0$ 时, 特征方程简化为 $E^3 - (t_{bc}^2 + t_{ac}^2 + 1) E - 2t_{bc} t_{ac} = 0$. 能级简并 (锥形交叉) 发生在判别式为零的条件下. $\varepsilon_a = 0$ 时合成参数空间 (t_{bc}, t_{ac}) 中存在四个锥形交叉点, 分别位于

$$(t_{bc}, t_{ac}) = (\pm 1, \pm 1). \quad (8)$$

如图 1(c) 所示, 其中 $(t_{bc}, t_{ac}) = (-1, -1)$ 和 $(1, 1)$ 处的简并发生在最低能带 E_0 与中间能带 E_1 之间; 而 $(1, -1)$ 和 $(-1, 1)$ 处的简并发生在中间能带 E_1 与最高能带 E_2 之间. 因此, 对最低能带 E_0 而言, 有效的锥形交叉点仅为 $(-1, -1)$ 和 $(1, 1)$. 图 1(c) 同时给出了最低两条能带带隙 $\Delta_{01} = E_1 - E_0$ 在二维参数空间中的分布, 以及后文采用的两条闭合路径; 图 1(d) 则给出了 $\varepsilon_a = 0$ 时三条能带在参数空间中的能级面示意. 在合成参数空间中选定一条闭合路径 $\mathcal{C}$, 将其离散化为 N 个参数点 $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}$. 在每个参数点 λ_i 处求解 (6) 式的本征值问题, 得到选定能带 (本文取最低能带 $n = 0$) 的本征矢 $|\psi_i\rangle$. 由于哈密顿量为实对称矩阵, 本征矢可取为实向量, Berry 相位通过离散 Wilson loop 计算 [25]:

$$\gamma = -\arg \prod_{i=0}^{N-1} \langle \psi_i | \psi_{i+1 \bmod N} \rangle. \quad (9)$$

对于实本征矢, 若乘积为正, $\gamma = 0$; 若为负, $\gamma = \pi$. 具体在 $\varepsilon_a = 0, t_{ab} = 1$ 的三节点系统中, 图 1(c) 和图 1(d) 所示的路径 I 取圆心 $(t_{bc}, t_{ac}) = (1, 1)$ 、半径 $R = 1$, 其包围一个与最低能带相关的锥形交叉点, 因此 Wilson loop 给出 $\gamma = \pi$; 路径 II 取圆心 $(t_{bc}, t_{ac}) = (1, -1)$ 、半径同样为 $R = 1$, 它不包围任何与最低能带相关的简并点, 因此 Wilson loop 给出 $\gamma = 0$. 该结果不依赖路径的具体形状与半径, 只要路径不穿越简并点且对相关锥形交叉点的包围关系保持不变, Berry 相位即保持不变.

当引入节点 a 的在位势 $\varepsilon_a \neq 0$ 时, 特征方程 (7) 中出现附加项, 与最低能带相关的 $E_0 - E_1$ 锥形交叉点将在参数平面中移动, 而闭合路径本身可以保持不变. 对于本文考虑的固定路径 (圆心 $(1, 1)$, 半径 $R = 1$), 当 $\varepsilon_a = 0$ 时, 相关简并点位于路径内部, 对应 Berry 相位 $\gamma = \pi$; 当 ε_a 调整到足够负时, 该简并点将穿过路径边界并移至路径外部, 此时 Berry 图 1 相位切换为 $\gamma = 0$. 图 1(e) 和图 1(f) 示意了这两种代表性情形. Berry 相位的跳变发生在简并点恰好穿越路径边界的临界条件下, 其物理本质是路径上最低两条能带的最小能隙闭合; 关于简并点轨迹与临界在位势的解析表达将在后文给出.

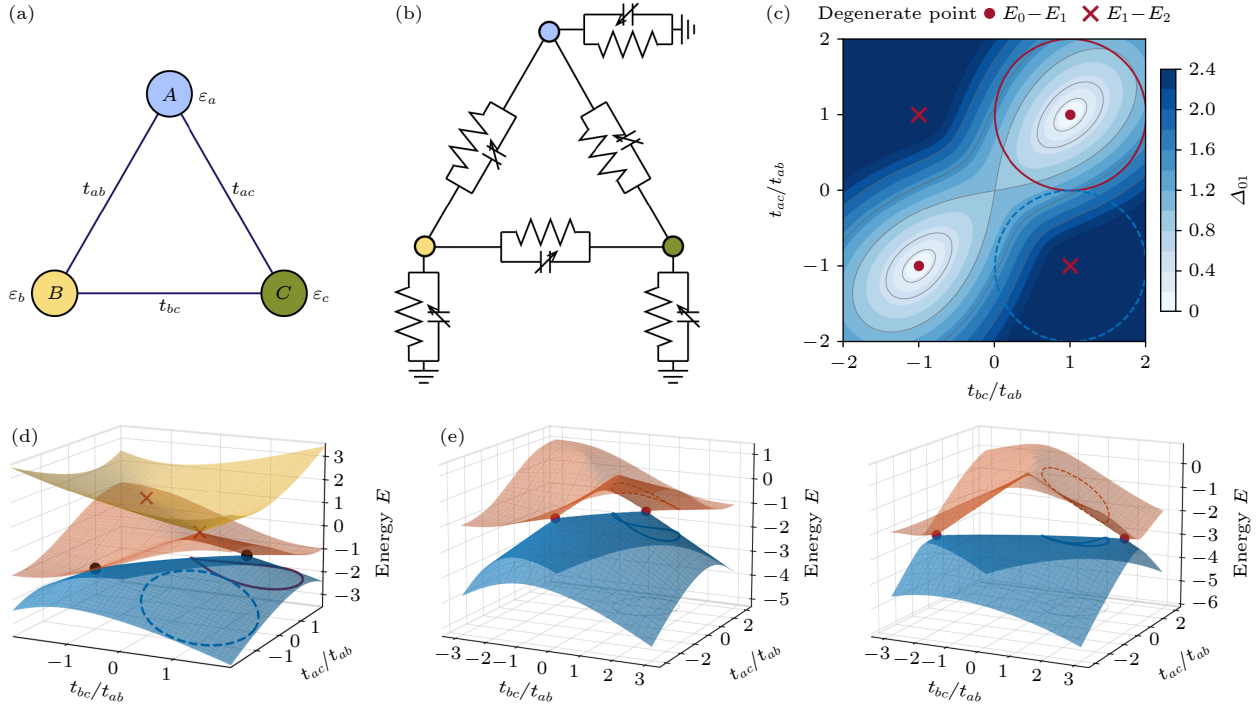


图1 三节点模型概述与在位势调控 (a) 三节点实对称模型示意图. 节点在位势为 ε_a , ε_b 和 ε_c , 节点间耦合为 t_{ab} , t_{ac} 和 t_{bc} ; (b) 对应的可编程 LC 电路实现示意图; (c) 在 $\varepsilon_a = 0$, $t_{ab} = 1$ 时二维参数空间 (t_{bc}/t_{ab} , t_{ac}/t_{ab}) 中最低两条能带隙 $\Delta_{01} = E_1 - E_0$ 的分布. 实心圆标出与最低能带相关的 $E_0 - E_1$ 锥形交叉点 $(-1, -1)$ 和 $(1, 1)$, 叉号标出 $E_1 - E_2$ 简并点 $(1, -1)$ 和 $(-1, 1)$, 红色实线和蓝色虚线分别表示路径 I 与路径 II; (d) $\varepsilon_a = 0$ 时三条能带在参数空间中的能级面示意, 同时标出了路径 I 与路径 II 在能级面上的位置; (e) 固定闭合路径时在位势调控导致相关 $E_0 - E_1$ 简并点位于路径内部和移至路径外部的两种代表性情形, 对应 Berry 相位分别为 π 和 0

Fig. 1. Overview of the three-node model and onsite-potential control: (a) Schematic of the real symmetric three-node model; (b) corresponding programmable LC circuit implementation; (c) band gap $\Delta_{01} = E_1 - E_0$ between the two lowest bands in the 2D parameter space (t_{bc}/t_{ab} , t_{ac}/t_{ab}) for $\varepsilon_a = 0$ and $t_{ab} = 1$. Filled circles mark the $E_0 - E_1$ conical intersections at $(-1, -1)$ and $(1, 1)$; crosses mark the $E_1 - E_2$ degeneracies at $(1, -1)$ and $(-1, 1)$. Solid red and dashed blue lines denote Path I and Path II, respectively; (d) energy surfaces of the three bands with the two paths indicated; (e) two representative configurations in which the onsite potential places the relevant $E_0 - E_1$ degeneracy inside or outside the fixed path, corresponding to Berry phases of π and 0, respectively.

3 电路制作、参数配置与 Berry 相位观测

电路的工作中心频率设定为 $f_0 = 335.5$ kHz ($\omega_0 = 2\pi f_0$). 可编程的电容组件使用超突变结调谐变容二极管 (SKYWORKS, SMV 1470-004LF) 的结电容在不同反向偏置电压驱动下形成. 图 2(a) 给出了变容管电容 C_{var} 随偏置电压的标定曲线, 器件可调范围约为 18—235 pF. 对于节点间的耦合, 采用 $L_{\text{link}} = 1.5$ mH 的电感与一个变容管并联, 使等效电容 $C_{ab}^{\text{eff}} = C_{ab} - 1/(\omega_0^2 L_{ab})$ 可随偏置电压连续跨越零点, 对应于耦合参数 t_{ab} 的大小和符号调节. 对于每个节点对地的在位势项, 采用 $L_{\text{gnd}} = 0.47$ mH 的电感与两个变容管并联, 再与 $C_{\text{fix}} = 180$ pF 的固定陶瓷电容并联. 等效电容范围约为 -260—+160 pF. 考虑到器件的调谐范围、控制电

压的线性度、灵敏度以及寄生参数影响, 将耦合项的等效电容限制在 -50—50 pF; 节点对地支路的等效电容需要为 Laplacian 对角元补偿预留额外调节裕量, 因此限制在 -100—100 pF. 制作完成的三节点可编程拓扑电路实物照片见图 2(b).

实验选取最低能带 (E_0) 进行 Berry 相位测量. 在合成参数空间 (t_{bc} , t_{ac}) 中选择配置两条闭合圆形路径:

路径 I: 圆心 $(t_{bc}, t_{ac}) = (1, 1)$, 半径 $R = 1$. 该路径包围锥形交叉点 $(1, 1)$, 理论预测 Berry 相位 $\gamma = \pi$;

路径 II: 圆心 $(t_{bc}, t_{ac}) = (1, -1)$, 半径 $R = 1$. 该路径不包围任何与最低能带相关的简并点, 理论预测 $\gamma = 0$.

每条路径均匀离散为 $N = 30$ 个采样点. 对于

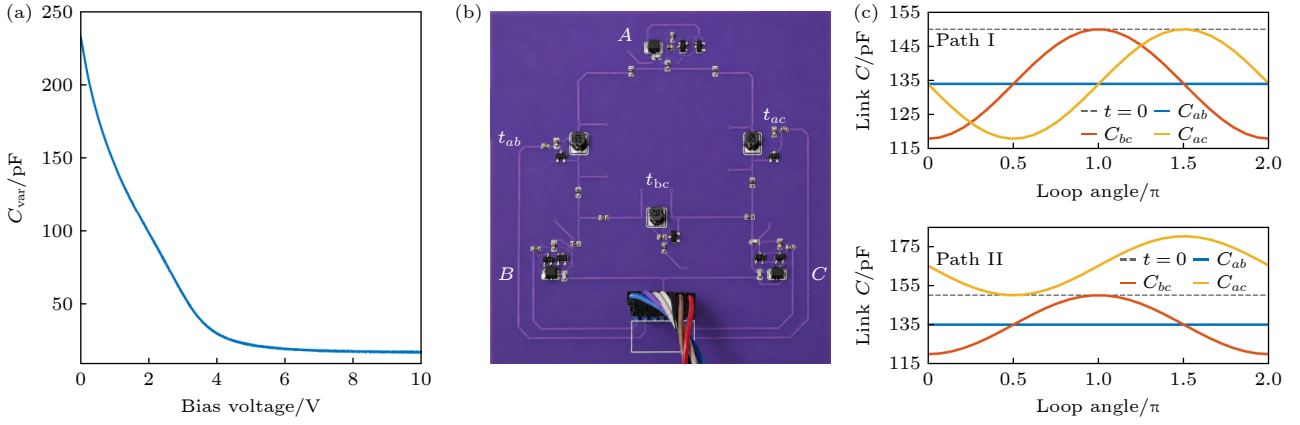


图 2 实验电路以及参数设定 (a) 单个边支路变容管电容 C_{var} 随偏置电压的标定曲线; (b) 三节点可编程拓扑电路照片; (c) 路径 I(上) 和路径 II(下) 上三个边支路变容管的目标电容值 C_{ab} , C_{bc} 和 C_{ac} 随回路角度的变化. 灰色虚线表示对应耦合符号翻转的 $t=0$ 条件

Fig. 2. Experimental circuit and parameter settings: (a) Calibration curve of the varactor capacitance C_{var} versus bias voltage for a single link branch; (b) photograph of the three-node programmable topoelectrical circuit; (c) target varactor capacitances C_{ab} , C_{bc} , and C_{ac} along Path I (top) and Path II (bottom) as functions of the path angle. The grey dashed line indicates the $t=0$ condition.

每个采样点, 先根据路径角度 $\theta_i = 2\pi i/N$ ($i=0, 1, \dots, 29$) 计算对应的哈密顿量参数 (t_{bc}, t_{ac}), 再经 (5) 式与对角元补偿条件转化为 6 个变容管的目标电容值和相应的偏置电压. 这里各节点对地支路的目标电容由目标 Laplacian 的对角元 J_{aa} 决定. 其中, 节点间 $a-b$ 对应的耦合参数 $t_{ab} = 1$ 沿路径保持不变, 因此其目标变容管电容 C_{ab} 保持常数; t_{bc} 和 t_{ac} 则沿圆周路径连续变化, 对应的目标电容 C_{bc} 和 C_{ac} 随回路角度改变. 图 2(c) 给出了路径 I 和路径 II 上三个边支路变容管的目标电容值随回路角度的变化, 灰色虚线对应耦合参数满足 $t=0$ 的条件.

在每个路径采样点, 将硬件参数配置为指定值并待电路达到稳态后, 使用阻抗分析仪分别测量 Z_{aa} , Z_{bb} , Z_{cc} , Z_{ab} , Z_{ac} , Z_{bc} . 从该 6 个测量量可重构完整的 3×3 格林函数矩阵 $\mathbf{G}$. 图 3(a) 展示了路径 I 在选定工作频率处的三组两点阻抗 $|Z_{ab}|$, $|Z_{ac}|$ 和 $|Z_{bc}|$ 随路径参数的变化. 作为电路实现的一致性检验, 本文进一步由测得的 $\mathbf{G}$ 计算 $\mathbf{J} = \mathbf{G}^{-1}$, 并比较其非对角元虚部与目标哈密顿量的对应关系. 图 3(b) 给出了经整体比例因子归一化后的 $\text{Im } J_{ij}$ 与设计值 H_{ij} 的比较, 二者基本呈线性对应, 其 Pearson 相关系数 $r = 0.962$. 剩余偏差的来源包括变容管 $C-V$ 标定误差、离散元件容差和 PCB 寄生参数等硬件因素, 以及有限品质因数导致的模式交叠 (尤其在小带隙区域更为显著).

Berry 相位的提取不依赖上述 $\mathbf{J}$ 矩阵反演, 而是直接由实验重构的格林函数矩阵序列 $\{G_i\}_{i=0}^{29}$ 完成. 其依据来自格林函数的谱分解. 理想无损情况下, 若有效哈密顿量满足 $H(\lambda)|u_n(\lambda)\rangle = E_n(\lambda)|u_n(\lambda)\rangle$, 并且本征矢正交归一, 则响应函数可写为

$$G(z; \lambda) = [z(\omega)I - H(\lambda)]^{-1} = \sum_{n=0}^2 \frac{|u_n(\lambda)\rangle\langle u_n(\lambda)|}{z(\omega) - E_n(\lambda)}, \quad (10)$$

式中, $z(\omega)$ 表示格林函数谱表示中的频率相关谱参数, 其具体形式取决于 Laplacian 与哈密顿量之间的映射关系 ((3) 式). (10) 式表明, 在理想无损极限下, G 与 H 具有相同的本征矢, 且 G 的本征值可写为 $g_n = [z(\omega) - E_n(\lambda)]^{-1}$. 沿闭合路径演化时, 本征值 $E_n(\lambda)$ 本身随参数点变化, 在特定频率下不同模式的谱权重会随 $z(\omega) - E_n(\lambda)$ 的失谐量而改变. 因而本文并不要求目标最低能带分支在所有采样点均对应最大的响应本征值, 而是基于完整 3×3 格林函数矩阵的本征矢连续演化来提取目标本征模信息与 Wilson loop.

具体而言, 在每个路径点对 G_i 进行本征值分解, 得到三组响应本征值和本征矢; 随后在一个响应本征值分离较清晰、最低能带模式可明确识别的路径点确定目标分支, 并按相邻路径点实验本征矢重叠最大的原则连接同一分支, 从而获得沿闭合路径连续演化的本征矢序列. 为检验该模式追踪

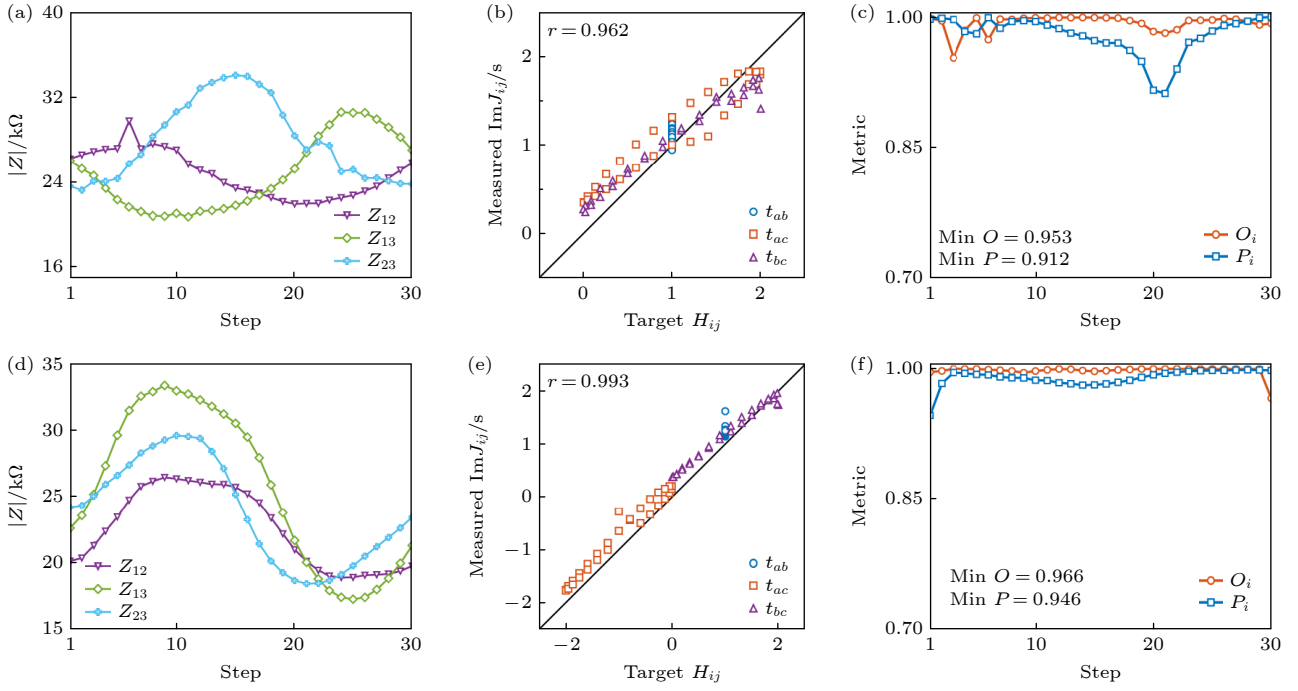


图 3 两条选定闭合路径的阻抗测量、格林函数重构及模式追踪结果 (a) 路径 I 上三组实测两点阻抗 $|Z_{ab}|$, $|Z_{ac}|$ 和 $|Z_{bc}|$ 随路径序号的变化; (b) 路径 I 上由实验重构的格林函数求得 $\text{Im} J_{ij}$ 与设计哈密顿量矩阵元 H_{ij} 的比较; (c) 路径 I 上最低能带分支的模式追踪诊断量, 其中 $O_i = |\langle u_i^{\text{exp}} | u_{i+1}^{\text{exp}} \rangle|$ 表示相邻采样点实验本征矢重叠度, $P_i = |\langle u_i^{\text{th}} | u_i^{\text{exp}} \rangle|^2$ 表示实验本征矢与理论最低能带本征矢的投影; (d)–(f) 路径 II 上对应 (a)–(c) 的相应结果

Fig. 3. Impedance measurement, Green's function reconstruction, and mode tracking for the two selected paths: (a) Measured two-point impedances $|Z_{ab}|$, $|Z_{ac}|$, and $|Z_{bc}|$ along Path I; (b) comparison of $\text{Im} J_{ij}$ reconstructed from the experimental Green's function with the designed Hamiltonian matrix elements H_{ij} for Path I; (c) mode-tracking diagnostics for the lowest-band branch along Path I, where $O_i = |\langle u_i^{\text{exp}} | u_{i+1}^{\text{exp}} \rangle|$ denotes the overlap between experimentally obtained eigenvectors at adjacent sampling points, and $P_i = |\langle u_i^{\text{th}} | u_i^{\text{exp}} \rangle|^2$ denotes the projection of the experimental eigenvector onto the theoretical lowest-band eigenvector; (d)–(f) corresponding results for Path II.

过程, 图 3(c) 和图 3(f) 同时给出了两个诊断量: 相邻采样点实验本征矢重叠度 $O_i = |\langle u_i^{\text{exp}} | u_{i+1}^{\text{exp}} \rangle|$, 以及实验本征矢与理论最低能带本征矢的投影 $P_i = |\langle u_i^{\text{th}} | u_i^{\text{exp}} \rangle|^2$. 其中 O_i 反映 Wilson loop 中相邻本征矢连接的连续性; P_i 用于检验追踪得到的实验分支与理论最低能带的一致性, P_i 仅作为事后诊断量, 不参与 Wilson loop 计算. 对路径 I, $\min O_i = 0.953$, $\min P_i = 0.912$; 对路径 II, $\min O_i = 0.966$, $\min P_i = 0.946$. 这说明两条路径上的目标本征矢分支均可被稳定识别.

对路径 I 和路径 II, 分别按上述流程完成了 30 个采样点的阻抗测量和 Berry 相位提取. 图 4(a) 给出了实验重构的最低能带本征模沿两条闭合路径的演化过程. 对于路径 I, 本征矢在完成一周演化后相对于初始态发生整体符号翻转, 对应 Wilson loop 乘积为负, 即 Berry 相位 $\gamma = \pi$. 对于路径 II, 本征矢在闭合演化后恢复初始符号结构, 对应 $\gamma \approx 0$.

实际电路中的有限耗散使理想 LC 极点展宽, 代表性单节点对地阻抗峰给出品质因数 $Q \approx 23$, 对应半功率带宽约 14 kHz. 中心频率附近测量频率的变化不改变由电路参数设定的合成参数路径. 为检验上述结果对工作频率的稳健性, 本文在 332–340 kHz 范围内提取 Wilson loop 相位, 用于检验有限频率失谐下 Wilson loop 提取结果的稳定性, 如图 4(b) 和图 4(c) 所示. 结果表明, 路径 I 的结果始终接近 1, 路径 II 始终接近 0, 说明提取的 Berry 相位在邻近工作频率窗口内具有稳定性. 这与 Berry 相位由闭合路径对简并点的拓扑包围关系决定的性质一致: 只要路径不穿越简并点且目标模式可被稳定追踪, 离散化的相位取值即保持不变.

4 在位势调控与 Berry 相位切换

实验在 $\varepsilon_a = 0$ 条件下验证了 Berry 相位与锥

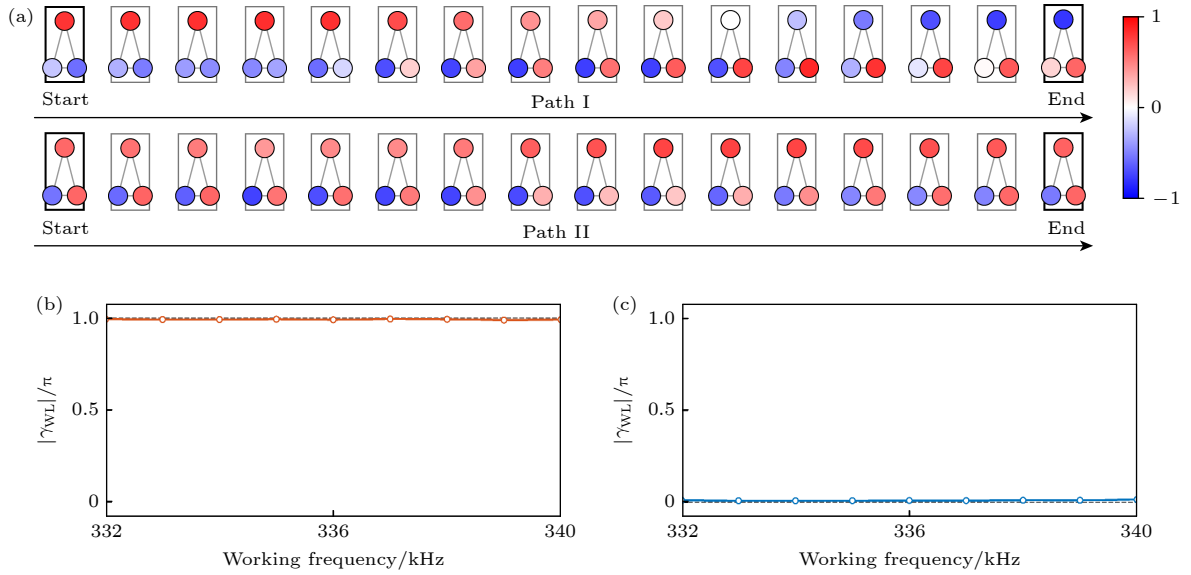


图4 实验本征模沿闭合路径的演化的测量 (a) 由实验重构的最低能带本征矢沿路径 I 和路径 II 演化的快照, 路径 I 和路径 II 分别对应 Berry 相位 π 和 0; (b), (c) 分别给出路径 I 和路径 II 在不同工作频率下提取的归一化 Wilson loop 相位 $|\gamma_{WL}|/\pi$. 虚线为理论值, 结果始终接近相应的理论值

Fig. 4. Measured eigenmode evolution along the closed paths: (a) Snapshots of the experimentally reconstructed lowest-band eigenvectors along Path I and Path II. After one cycle, the eigenvector of Path I and Path II undergoes Berry phases of π and 0; (b), (c) normalized Wilson loop phase $|\gamma_{WL}|/\pi$ extracted at different operating frequencies for Path I and Path II. Dashed lines indicate the theoretical values where the results remain close to the corresponding theoretical values.

形交叉点包围关系的对应, 下面进一步讨论节点 a 的相对在位势 ε_a 对合成参数空间拓扑结构的调控.

固定圆形路径的圆心为 $(t_{bc}^{(0)}, t_{ac}^{(0)}) = (1, 1)$, 半径为 $R = 1$, 并始终追踪最低能带 $n = 0$. 对于 (6) 式的哈密顿量, $E_0 - E_1$ 简并要求 $\mathbf{H}_{\text{eff}} - \lambda \mathbf{I}$ 的秩降至 1, 即所有 2×2 子式的行列式均为零, 可得

$$\lambda^2 - \varepsilon_a \lambda - t_{ab}^2 = 0, \quad (11)$$

其中 $t_{ab} = 1$. 该方程的较小根为

$$\lambda_- = \frac{\varepsilon_a - \sqrt{\varepsilon_a^2 + 4t_{ab}^2}}{2}, \quad (12)$$

对应 $E_0 - E_1$ 简并. 将 λ_- 代入哈密顿量的约束关系, 可得到两个 $E_0 - E_1$ 锥形交叉点在 (t_{bc}, t_{ac}) 参数平面中的解析轨迹:

$$(t_{bc}, t_{ac}) = (-s\lambda_-(\varepsilon_a), st_{ab}), \quad s = \pm 1. \quad (13)$$

当 $\varepsilon_a = 0$ 时 $\lambda_- = -1$, 简并点退化为 $(t_{bc}, t_{ac}) = (\pm 1, \pm 1)$, 与 (8) 式一致. 当 ε_a 改变时, 两个简并点分别沿 $t_{ac} = 1$ 和 $t_{ac} = -1$ 两条水平线移动. 因此在位势调控中, 闭合路径本身保持不变, 而 Berry 相位的变化来源于简并点相对于固定路径的位置变化. 这一运动轨迹及其导致的 Berry 相位切换行为如图 5 所示.

对于圆心 $(1, 1)$ 、半径 $R = 1$ 的固定路径,

(13) 式中 $s = -1$ 分支始终位于 $t_{ac} = -1$, 与圆心的垂直距离为 2, 大于半径, 不会进入路径. 因此仅需考虑 $s = +1$ 分支 $P_+ = (-\lambda_-, 1)$. 令该简并点恰好位于路径右侧边界 $t_{bc} = 2$, 即 $-\lambda_-(\varepsilon_a^*) = 2$, 由 (11) 式可解得临界值为

$$\varepsilon_a^* = -\frac{3}{2}. \quad (14)$$

在 $\varepsilon_a > 0$ 方向上, 简并点 P_+ 渐近趋向 $(0, 1)$, 不存在有限的正向临界值. 相应地, 该固定路径的 Berry 相位可写为

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \varepsilon_a < -3/2, \\ \pi, & \varepsilon_a > -3/2, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\varepsilon_a = -3/2$ 处路径穿过简并点, Berry 相位不再定义. 图 5(a) 给出了 Berry 相位与固定路径上最小带隙随 ε_a 的变化: $\varepsilon_a^* = -3/2$ 处 Berry 相位由 π 跳变为 0; 同时路径上的最小带隙闭合. 图 5(b) 分别展示了 $\varepsilon_a = 0$ 和 $\varepsilon_a = -2.2$ 时的带隙分布与固定路径的几何关系: 前者的相关简并点位于路径内部 ($\gamma = \pi$), 后者已移至路径外部 ($\gamma = 0$). 上述结果表明, ε_a 通过移动简并点来改变固定路径的拓扑包围关系.

为了将上述在位势调控直接落实到可编程拓

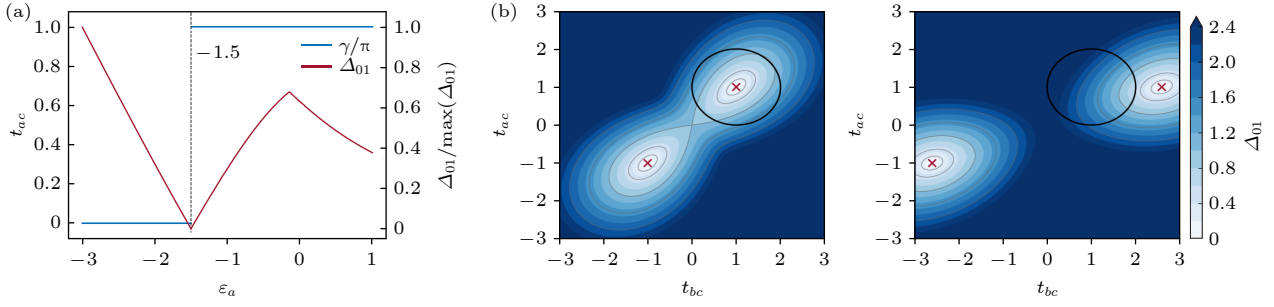


图 5 固定闭合路径下 Berry 相位随在位势 ε_a 的切换行为 (a) 固定路径 (圆心 $(1, 1)$ 、半径 $R = 1$) 对应的 Berry 相位 γ/π (蓝线) 随 ε_a 的变化, 以及固定路径上最低两条能带最小带隙 $\min_C \Delta_{01}$ 经最大值归一化后的结果 (红线). 在临界值 $\varepsilon_a^* = -3/2$ 处, Berry 相位由 1 跳变为 0, 同时路径上的最小带隙闭合. (b) $\varepsilon_a = 0$ (左) 和 $\varepsilon_a = -2.2$ (右) 时二维参数空间中的带隙 Δ_{01} 分布. 前者的相关 $E_0 - E_1$ 简并点位于路径内部, 对应 Berry 相位 π ; 后者简并点已移至路径外部, Berry 相位切换为 0

Fig. 5. Switching behavior of the Berry phase on a fixed path as a function of onsite potential ε_a : (a) Berry phase γ/π (blue) and the normalized minimum band gap $\min_C \Delta_{01}$ along the fixed path (red) versus ε_a for a path centered at $(1, 1)$ with radius $R = 1$. At the critical value $\varepsilon_a^* = -3/2$, the Berry phase jumps from 1 to 0 and the minimum gap closes simultaneously. (b) Band-gap distribution Δ_{01} in the 2D parameter space for $\varepsilon_a = 0$ (left) and $\varepsilon_a = -2.2$ (right). In the former case the relevant degeneracy lies inside the path ($\gamma = \pi$); in the latter it has moved outside ($\gamma = 0$).

扑电路, 将每一个 $(\varepsilon_a, t_{bc}, t_{ac})$ 点转换为节点间支路和对地支路的等效电容. 计算中保持 $t_{ab} = 1$ 、固定路径圆心 $(1, 1)$ 、半径 $R = 1$ 以及路径离散点数 $N = 30$ 不变, 只改变 ε_a .

图 6(a) 和图 6(b) 给出了两组代表性在位势参数下实验重构得到的最低能带本征模沿固定路径的演化过程. 对于 $\varepsilon_a = 0$, 固定路径包围 $(1, 1)$ 处的最低能带锥形交叉点, 本征矢在完成一周演化后相对于初始态发生整体符号翻转, 对应归一化 Wilson loop 相位 $\gamma_{WL}/\pi = +0.994$, 与非平凡 Berry 相位 $\gamma = \pi$ 一致. 对于 $\varepsilon_a = -2.2$, 在位势调控将同一锥形交叉点移至路径外部, 本征矢在闭合演化后恢复到初始符号结构, 对应 $\gamma_{WL}/\pi = +0.004$, 即 Berry 相位切换为平凡值 0. 结合图 5 的理论分

析与图 6 的实验结果, 可以看到固定路径下 Berry 相位的切换由在位势驱动的简并点位移所控制, 并在实验中得到了直接验证.

5 结论与展望

本文构建并实验实现了一种三节点可编程拓扑电路平台, 在合成参数空间中完成了 Berry 相位的测量与调控. 通过阻抗矩阵层析重构本征模, 实验验证了: 当闭合路径包围与最低两条能带相关的锥形交叉点时, Wilson loop 给出接近 π 的 Berry 相位; 当路径不包围该简并点时, 相位接近 0. 进一步地, 通过调节单节点相对在位势 ε_a , 可驱动相关锥形交叉点在 (t_{bc}, t_{ac}) 平面中移动, 并在同一固定闭合路径下实现 Berry 相位由 π 向 0 的离散切换.

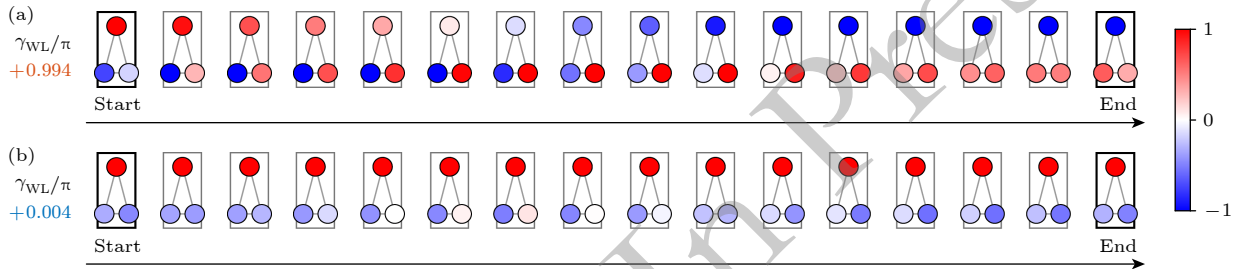


图 6 在位势调控 Berry 相位切换的实验验证 (a) 在 $\varepsilon_a = 0$ 时 (包围锥形交叉点), 实验得到的最低能带本征模沿固定闭合路径的演化快照. 闭合演化后本征矢相对于初始态发生整体符号翻转, 对应归一化 Wilson loop 相位 $\gamma_{WL}/\pi = +0.994$; (b) 在 $\varepsilon_a = -2.2$ 时 (锥形交叉点移出路径) 的对应结果. 闭合演化后本征矢恢复到与初始态相同的符号结构, 对应 $\gamma_{WL}/\pi = +0.004$

Fig. 6. Experimental verification of Berry-phase switching via onsite-potential control: (a) Snapshots of the lowest-band eigenmode evolution along the fixed path for $\varepsilon_a = 0$ (degeneracy enclosed). The eigenvector undergoes an overall sign flip after one cycle, yielding a normalized Wilson loop phase $\gamma_{WL}/\pi = +0.994$. (b) Corresponding result for $\varepsilon_a = -2.2$ (degeneracy outside the path). The eigenvector returns to the initial sign structure, yielding $\gamma_{WL}/\pi = +0.004$.

上述结果表明, 可编程拓扑电路能够作为测量和调控合成参数空间本征态几何性质的实验平台。

未来, 可将该方案扩展到更多节点的可编程电路, 例如四节点或五节点系统, 从而在更高维合成参数空间中研究多重简并点的拓扑荷分布、相互作用及其几何相位响应。此外, 通过引入非互易耦合, 可将本方案推广到非厄米拓扑电路等问题。

参考文献

- [1] Imhof S, Berger C, Bayer F, et al 2018 *Nat. Phys.* **14** 925
- [2] Lee C H, Imhof S, Berger C, Bayer F, Brehm J, Molenkamp L W, Kiessling T, Thomale R 2018 *Commun. Phys.* **1** 39
- [3] Luo K F, Yu R 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 220305 (in Chinese) [罗开发, 余睿 2019 物理学报 **68** 220305]
- [4] Dong J, Juričić V, Roy B 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 023056
- [5] Wang Y, Price H M, Zhang B, Chong Y 2020 *Nat. Commun.* **11** 2356
- [6] Shang C, Liu S, Jiang C, Shao R, Zang X, Lee C H, Thomale R, Manchon A, Cui T J, Schwingenschlögl U 2024 *Adv. Sci.* **11** 2303222
- [7] Shang C, Liu S, Shao R, et al 2022 *Adv. Sci.* **9** 2202922
- [8] Zhang W, Yuan H, Sun N, Sun H, Zhang X 2022 *Nat. Commun.* **13** 2937
- [9] Yang H, Song L, Cao Y, Yan P 2024 *Phys. Rep.* **1093** 1
- [10] Zhao E 2018 *Ann. Phys.* **399** 289
- [11] Ningyuan J, Owens C, Sommer A, Schuster D, Simon J 2015 *Phys. Rev. X* **5** 021031
- [12] Li R, Wang W, Kong X, Lv B, Jia Y, Tao H, Li P, Liu Y 2025 *Front. Phys.* **20** 044204
- [13] Hofmann T, Helbig T, Lee C H, Greiter M, Thomale R 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 247702
- [14] Qian L, Zhang W, Cao W, Di F, Zhou X, Zhang X 2026 *Phys. Rev. B* **113** 165407
- [15] He J, Jia H, Chen H, Wang T, Liu S, Cao J, Gao Z, Shang C, Cui T J 2024 *Phys. Rev. B* **109** 235406
- [16] Lu Y, Jia N, Su L, Owens C, Juzeliūnas G, Schuster D I, Simon J 2019 *Phys. Rev. B* **99** 020302
- [17] Li R, Lv B, Tao H, Shi J, Chong Y, Zhang B, Chen H 2021 *National Sci. Rev.* **8** nwaa192
- [18] Liu S, Shao R, Ma S, Zhang L, You O, Wu H, Xiang Y J, Cui T J, Zhang S 2021 *Research* **2021**
- [19] Zou D, Chen T, He W, Bao J, Lee C H, Sun H, Zhang X 2021 *Nat. Commun.* **12** 7201
- [20] Xu C H, Xu Z C, Zhou Z Y, Cheng E H, Lang L J 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 200301 (in Chinese) [徐灿鸿, 许志聪, 周子榆, 成恩宏, 郎利君 2023 物理学报 **72** 200301]
- [21] Liu S, Ma S, Yang C, Zhang L, Gao W, Xiang Y J, Cui T J, Zhang S 2020 *Phys. Rev. Appl.* **13** 014047
- [22] Stegmaier A, Brand H, Imhof S, et al 2024 *Phys. Rev. Res.* **6** 023010
- [23] Jia H, Yang S, He J, Liu S, Chen H, Shang C, Ma S, Han P, Lee C H, Gao Z, Lai Y, Cui T J 2026 *Nat. Commun.*
- [24] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. London A* **392** 45
- [25] Xiao D, Chang M C, Niu Q 2010 *Rev. Modern Phys.* **82** 1959
- [26] von Neumann J, Wigner E P 1993 *The Collected Works of Eugene Paul Wigner: Part A: The Scientific Papers* (Springer) pp294–297
- [27] Herzberg G, Longuet-Higgins H C 1963 *Discuss. Faraday Soc.* **35** 77
- [28] Duca L, Li T, Reitter M, Bloch I, Schleier-Smith M, Schneider U 2015 *Science* **347** 288
- [29] Yin X, Chen Y, Zhang X, Zhang Z, Noda S, Peng C 2025 *Nat. Commun.* **16** 2796
- [30] Tan X, Zhang D W, Liu Q, Xue G, Yu H F, Zhu Y Q, Yan H, Zhu S L, Yu Y 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 130503
- [31] Xiao M, Ma G, Yang Z, Sheng P, Zhang Z, Chan C T 2015 *Nat. Phys.* **11** 240

SPECIAL TOPIC—The 80th Anniversary of Physics at Lanzhou University

Measurement and control of Berry phase in synthetic parameter space using programmable topoelectrical circuits*

YANG Shanglin^{1) #} LI Xunshuan^{2) #} JIA Hao^{1) †}

1) (Gansu Provincial Research Center for Basic Disciplines of Quantum Physics, Key Laboratory of Quantum Theory and Applications of MoE, Key Laboratory of Theoretical Physics of Gansu Province, Lanzhou Center for Theoretical Physics, School of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

2) (School of Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 15 May 2026; revised manuscript received 10 June 2026)

Abstract

Topoelectrical circuits exploit the equivalence between circuit Laplacians and tight-binding Hamiltonians, offering a highly controllable platform for studying band-topological phenomena. Previous investigations have mainly focused on periodic lattice networks, where topological invariants are defined in momentum space and are typically revealed through boundary states. Programmable circuits with continuously tunable parameters provide a complementary route, in which external control variables define a synthetic parameter space and the geometric properties of eigenstates can be probed along closed trajectories. However, despite the mature theoretical framework of Berry phases, their quantitative extraction and active manipulation in programmable topoelectrical circuits have remained experimentally underdeveloped. Here, we implement a three-node programmable topoelectrical circuit that realizes a real-symmetric three-level effective Hamiltonian with continuously tunable hopping amplitudes and onsite potential using varactor-biased LC branches. By varying two normalized coupling parameters, we construct a two-dimensional synthetic parameter space in which the eigenspectrum exhibits conical intersections whose locations are determined by the onsite potential. At each parameter point, eigenmodes are reconstructed from impedance-matrix measurements, and the Berry phase is evaluated through a discrete Wilson loop along closed paths. For a loop enclosing a conical intersection between the two lowest bands, we obtain a normalized Wilson-loop phase of $|\gamma_{\text{WL}}|/\pi = 0.994$, in excellent agreement with the theoretical value of π . In contrast, a loop that encloses no relevant degeneracy yields $|\gamma_{\text{WL}}|/\pi = 0.004$, consistent with a trivial Berry phase. This quantized response remains stable over a frequency window of 332–340 kHz around the design frequency. Furthermore, by tuning the relative onsite potential ε_a of a single node while keeping the measurement path fixed, we controllably displace the conical intersection in synthetic parameter space. An analytical critical value $\varepsilon_a^* = -3/2$ is obtained, at which the degeneracy crosses the path boundary. Experimentally, setting ε_a to 0 and -2.2 produces Wilson-loop phases of 0.994π and 0.004π , respectively, directly verifying the predicted discrete Berry-phase transition between π and 0. These results establish programmable topoelectrical circuits as a quantitative platform for measuring and controlling eigenstate geometric phases in synthetic parameter space, with potential extensions to higher-dimensional parameter spaces and non-Hermitian regimes.

Keywords: programmable topoelectrical circuits, Berry phase, synthetic parameter space, conical intersections

DOI: [10.7498/aps.75.20260695](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260695)

CSTR: [32037.14.aps.75.20260695](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20260695)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 52541020, 62405228, 61905101, 12247101), the Natural Science Foundation of Gansu Province, China (Grant Nos. 24JRRA405, 25JRRA799), the Qin Chuang Yuan Innovative and Entrepreneurial Talent Project, China (Grant No. QCYRCXM-2023-048), the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. lzujbky-2025-jdzz07), and the “111Center”, China (Grant No. B20063).

These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: jiahao@lzu.edu.cn