

基于高斯混合模型从跨层聚合状态中重构多层网络^{*}

夏明志¹⁾ 张海峰²⁾ 马闯^{1)†}

1) (安徽大学互联网学院, 合肥 230601)

2) (安徽大学数学科学学院, 合肥 230601)

多层网络作为刻画多类型交互系统的基础框架, 已在多个学科领域中得到广泛应用, 因此, 其结构的推断对于深入理解复杂系统具有重要意义。然而, 现有方法通常依赖一个关键假设, 即每个网络层的节点状态均可被独立观测。本文关注一类更具挑战性的情形: 当仅能获取节点的跨层聚合状态时, 如何重构多层网络结构, 这种情形在隐私敏感或测量受限的环境中较为常见。为此, 本文提出一种基于贝叶斯公式的网络重构框架。该框架假设多层网络中每一层的边仅取两种可能的取值, 并将其作为网络先验, 在各层中采用高斯混合模型对该先验进行建模。该方法仅依赖极少的先验信息, 具体而言, 只需已知网络层数及每层的边类型数量, 而无需给定边的具体取值, 并能够在推断过程中对其进行自适应估计。实验结果表明, 在演化博弈动力学驱动的多层网络中, 当网络较为稠密或观测噪声较强时, 所提方法表现出更优的性能。

关键词: 多层网络, 网络重构, 贝叶斯推断, 高斯混合模型, 聚合观测, 演化博弈动力学

PACS: 89.75.Hc, 89.75.Fb, 02.30.Zz, 02.50.Tt

1 引言

多层网络广泛存在于社会^[1]、自然^[2]和生物^[3,4]系统中, 是刻画同一组实体在不同层次上连接与交互关系的重要模型。其各层包含相同的节点集合, 但具有不同的边集, 每一层均可视为一个单层网络^[5]。在实际情况下, 多层网络各层的拓扑结构往往未知, 而节点在各层中的动态信息通常是唯一可获取的数据

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 62476002, 62473001), 安徽省教育厅青年教师培养项目 (批准号: YQZD2025004)

[†] 通信作者. E-mail: chuang_m@126.com

来源。因此，多层网络重构——即利用节点的动态信息推断其未知拓扑结构——对于理解和预测多层网络具有重要意义。

网络重构是指借助实验测量与数学方法，从节点的动态数据中推断节点间的相互作用关系，从而还原网络的拓扑结构。在许多场景中，节点遵循特定的动力学模型（如演化博弈^[6]、振子同步^[7,8]、传染病扩散^[9,10]等），其行为通常可由微分方程或状态转移方程描述。通过采样获得节点状态的时间序列后，网络重构问题通常可转化为求解形如 $\mathbf{Y} = \mathbf{CX}$ 的线性方程组，其中 $\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{C}$ 由观测数据构成， $\mathbf{X}$ 则编码未知的网络结构，其非零元素表示对应节点对之间存在连边^[11]。

根据观测数据的类型，构建该线性方程组的方式有所不同。对于连续状态数据（如耦合振荡器的相位值），通常采用差分近似^[12]或驱动-响应框架^[13]直接构造 $\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{C}$ ；而对于离散状态数据^[14]，尤其是二进制状态^[15,16]（如感染-易感、自旋向上-向下），由于状态转移函数往往具有非线性且动力学机制未知，研究者通常通过线性化近似^[17]或平均场方法^[18,19]将其转化为线性形式。此外，当具备关于网络结构的先验信息（如稀疏性^[20]、对称性^[21,22]或边的类型数量^[12]）时，可以在求解 $\mathbf{X}$ 的过程中引入相应的正则化约束或贝叶斯先验，从而提高重构精度。多层网络重构与上述目标一致，即通过采样获取节点在各层的状态数据，并借助特定模型推断各层网络的连接关系。

由于采样过程成本较高，所获得的样本量通常有限，导致上述线性方程往往是欠定的；另一方面，采样数据中普遍存在较强噪声，也会降低方程求解的准确性。若仅基于原始方程而不引入额外的先验信息，传统最小二乘方法往往会因矩阵奇异性而难以有效求解。因此，通常采用岭回归^[23]方法来缓解该问题。然而，该方法对先验信息的利用较为有限，因而重构精度仍受到一定限制。为进一步提高解的准确性，有必要引入关于网络拓扑结构的先验信息，使重构结果更加符合实际。

鉴于网络通常具有稀疏性^[24]特征，可利用这一性质，采用经典的压缩感知技术^[25,26]对问题进行建模。具体而言，可将网络重构问题转化为如下优化问题：

$$\min_{\mathbf{X}} \left\{ \|\mathbf{Y} - \mathbf{CX}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{X}\|_0 \right\} \quad (1)$$

然而，直接求解式(1)是一个 NP-难问题。为了获得更易处理的优化形式，传统的 Lasso 回归方法^[27,28]被用于该类问题。具体而言，该方法通过将目标函数中的 ℓ_0 范数替换为 ℓ_1 范数，从而将问题转化为如下形式

$$\min_{\mathbf{X}} \left\{ \|\mathbf{Y} - \mathbf{CX}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{X}\|_1 \right\} \quad (2)$$

这使得我们可以利用凸优化方法，例如交替方向乘子法^[29]进行求解。此外，Shi 等人提出了 Signal-

lasso 方法 [30] 用于网络重构，其优化形式可表示为：

$$\min_{\mathbf{X}} \left\{ \|\mathbf{Y} - \mathbf{C}\mathbf{X}\|_2^2 + \sum_{k=1}^{K+1} \lambda_k \|\mathbf{X} - \mu_k\|_1 \right\} \quad (3)$$

其中， μ_k 为 $\mathbf{X}$ 中第 k 种类型的边值， λ_k 为其对应的正则化系数。该方法基于一个较强的先验假设，即不仅已知边的类型，还预先知晓每种边类型所对应的可能取值。显然，当网络较为稠密时，基于稀疏性先验的 Lasso 方法将会失效；而 Signal-lasso 方法由于对边值先验的依赖较强，也在一定程度上限制了其在实际场景中的应用。

然而，尽管已有多种多层网络重构方法，这些方法通常都基于一个共同假设：多层网络中节点在各层的状态均可观测 [31–33]。当系统处于隐私保护状态或层间数据不可获取时，该假设不再成立，从而导致现有方法失效。例如，在多层网络演化博弈动力学模型 [6] 中，若已知节点在各层的收益和策略，则通过采样过程即可推断各层节点的连接关系。然而，当仅能观测节点的总收益而无法获取各层收益时，如何仅从节点的聚合收益反推出各层邻接矩阵——即从节点的聚合状态重构各层拓扑结构——便成为一个具有挑战性的问题。通常，聚合状态是各层状态的某种函数形式，而在不同动力学模型中，由于节点状态的物理含义不同，其聚合状态的具体形式也各不相同。

本文提出一种适用于特定情形的多层网络重构方法，该方法基于高斯混合模型 (GMM) [12,34]，仅利用节点的聚合时间序列数据进行重构。该方法仅需极少的先验信息，即仅需已知边类型的数量，而无需预先给定各类边类型对应的具体取值。同时，本文引入贝叶斯估计框架，对不同边类型的概率进行自适应估计，从而简化了整体重构流程。与现有方法相比，该方法在多层网络重构任务中，尤其是在网络较为稠密且观测噪声较强的情况下，表现出更优的性能。

2 多层网络演化博弈动力学和问题描述

多层网络中的演化博弈动力学通过耦合各网络层中个体的策略交互与收益比较，构建了研究多层网络中合作演化的基本框架。在该框架下，个体不仅与同层邻居进行博弈，还可以参考或对比不同层中的策略表现，从而形成更为复杂的策略更新机制。由于该动力学能够有效刻画从生物系统到社会经济系统中广泛存在的合作涌现现象，对其内在机制与演化规律进行深入分析，不仅有助于揭示多层网络结构对合作行为的促进或抑制作用，也具有重要的理论价值与现实意义。因此，本文基于多层网络演化博弈动力学模型开展研究。

2.1 多层网络演化博弈动力学

考虑一个包含 n 个节点，共 L 层的多层网络，其演化博弈动力学方程^[6]可表述为：

$$u_i^l = \sum_{j=1}^n x_{i,j}^l (\mathbf{s}_i^l)^\top \mathbf{\Pi} \mathbf{s}_j^l + \sum_{k \neq l}^L \lambda^{l,k} \cdot (\mathbf{s}_i^l)^\top \mathbf{\Pi} \mathbf{s}_i^k, \quad (4)$$

其中 $x_{i,j}^l = r_l \cdot a_{i,j}^l$ ，且 r_l 为第 l 层的耦合强度， $a_{i,j}^l$ 值为 1 表示在第 l 层网络中节点 i 和节点 j 之间存在连边，为 0 则表示无连边， $\lambda^{l,k}$ 为层 l 与层 k 之间的耦合系数。 $\mathbf{s}_i^l$ 为节点 i 在层 l 中的策略向量：当 $\mathbf{s}_i^l = (1, 0)^\top$ 时代表节点与邻居节点合作，当 $\mathbf{s}_i^l = (0, 1)^\top$ 时代表背叛， $\mathbf{\Pi}$ 为收益矩阵， u_i^l 为节点 i 在层 l 中的收益。

记 $(\mathbf{s}_i^l)^\top \mathbf{\Pi} \mathbf{s}_j^l = g_{i,j}^l$ ， $(\mathbf{s}_i^l)^\top \mathbf{\Pi} \mathbf{s}_i^k = h_{i,k}^{l,k}$ 。若对系统进行 M 次采样，上式可简洁地写成矩阵形式

$$\mathbf{Y}_i^l = \mathbf{G}_i^l \mathbf{X}_i^l + \mathbf{H}_i^l \boldsymbol{\lambda}^l, \quad (5)$$

其中，

$$\mathbf{Y}_i^l = [0, u_{i,1}^l, \dots, u_{i,m}^l, \dots, u_{i,M}^l]^\top \in \mathbb{R}^{(M+1) \times 1}, \quad (6)$$

$$\mathbf{X}_i^l = [x_{i,1}^l, \dots, x_{i,i}^l, \dots, x_{i,n}^l]^\top \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^l = [\lambda^{l,1}, \dots, \lambda^{l,l-1}, \lambda^{l,l+1}, \dots, \lambda^{l,L}]^\top \in \mathbb{R}^{(L-1) \times 1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{G}_i^l = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{i,1,1}^l & \cdots & g_{i,i-1,1}^l & 0 & g_{i,i+1,1}^l & \cdots & g_{i,n,1}^l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i,1,m}^l & \cdots & g_{i,i-1,m}^l & 0 & g_{i,i+1,m}^l & \cdots & g_{i,n,m}^l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i,1,M}^l & \cdots & g_{i,i-1,M}^l & 0 & g_{i,i+1,M}^l & \cdots & g_{i,n,M}^l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(M+1) \times n}, \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_i^l = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{i,1}^{l,1} & \cdots & h_{i,1}^{l,l-1} & h_{i,1}^{l,l+1} & \cdots & h_{i,1}^{l,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i,m}^{l,1} & \cdots & h_{i,m}^{l,l-1} & h_{i,m}^{l,l+1} & \cdots & h_{i,m}^{l,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i,M}^{l,1} & \cdots & h_{i,M}^{l,l-1} & h_{i,M}^{l,l+1} & \cdots & h_{i,M}^{l,L} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(M+1) \times (L-1)}. \quad (10)$$

在方程组 (5) 里, $\mathbf{Y}_i^l$ 、 $\mathbf{G}_i^l$ 和 $\mathbf{H}_i^l$ 均为可通过实验观测或数据计算得到的已知矩阵, $\mathbf{X}_i^l$ 则包含了节点 i 在第 l 层中的邻接关系。

2.2 问题陈述

在多层网络演化博弈动力学中, 若能观测到节点 i 在层 l 的收益 u_i^l , 且采样次数 M 足够, 即可从方程 (5) 中求解出 $\mathbf{X}_i^l (l = 1, \dots, L)$ 的真实值。然而, 若系统处于受限状态, 导致无法测量节点在各层的收益数据时, 即无法获取全部 u_i^l 时, 我们通常仍可观测到节点在各层的总收益 u_i , 且总收益 u_i 是各层收益 u_i^l 之和, 即 $u_i = \sum_{l=1}^L u_i^l$ 。此时可将上述方程写作:

$$\mathbf{Y}_i = \sum_{l=1}^L \mathbf{Y}_i^l = \sum_{l=1}^L (\mathbf{G}_i^l \mathbf{X}_i^l + \mathbf{H}_i^l \lambda^l) = \mathbf{G}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{H}_i \lambda = \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i, \quad (11)$$

其中,

$$\mathbf{G}_i = [\mathbf{G}_i^1, \dots, \mathbf{G}_i^l, \dots, \mathbf{G}_i^L] \quad (12)$$

$$\mathbf{H}_i = [\mathbf{H}_i^1, \dots, \mathbf{H}_i^l, \dots, \mathbf{H}_i^L] \quad (13)$$

$$\mathbf{X}_i = [(\mathbf{X}_i^1)^T, \dots, (\mathbf{X}_i^l)^T, \dots, (\mathbf{X}_i^L)^T]^T \quad (14)$$

$$\lambda = [(\lambda^1)^T, \dots, (\lambda^l)^T, \dots, (\lambda^L)^T]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_i = [\mathbf{G}_i, \mathbf{H}_i] \in \mathbb{R}^{(M+1) \times L(n+L-1)} \quad (16)$$

$$\mathbf{T}_i = [(\mathbf{X}_i)^T, (\lambda)^T]^T \in \mathbb{R}^{L(n+L-1) \times 1} \quad (17)$$

此时, 网络重构任务转化为如何从节点的求和式聚合信号数据 $\mathbf{Y}_i (i = 1, \dots, n)$ 中重构出 $\mathbf{X}_i$ 。然而, 在许多情况下, 有限或含噪声的观测数据会显著降低求解线性方程组的准确性。因此, 有必要引入先验知识以提升求解的可靠性。

3 基于高斯混合模型的重构方法

3.1 后验表达式

我们的目标是通过最大化后验概率来得到多层网络拓扑结构。由于技术限制及其他因素, 采样数据通常包含一定程度的噪声。因此, 将观测数据所满足的方程建模为 $\mathbf{Y}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i + \varepsilon_i (i = 1, \dots, n)$, 其中

$\varepsilon_i = [0, \varepsilon_{i(1)}, \dots, \varepsilon_{i(m)}, \dots, \varepsilon_{i(M)}]^T$ 为服从高斯分布的噪声向量，即 $\varepsilon_{i(m)} \sim N(0, \sigma_0^2)$ ，将 $\mathbf{Y}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i + \varepsilon_i$ ($i = 1, \dots, n$) 记作 D_i 。根据贝叶斯定理^[35-37]，后验概率 $p(\mathbf{T}|D)$ 可被表示为：

$$p(\mathbf{T}|D) = \frac{p(D|\mathbf{T})p(\mathbf{T})}{p(D)}, \quad (18)$$

由于 $p(D)$ 与 $\mathbf{T}$ 无关，因此最大化后验概率 $p(\mathbf{T}|D)$ 等价于最大化 $p(D|\mathbf{T})p(\mathbf{T})$ ，此时需分别确定似然 $p(D|\mathbf{T})$ 与先验 $p(\mathbf{T})$ 表达式。

3.2 似然函数 $p(D|\mathbf{T})$

假设观测噪声向量的分量 $\varepsilon_{i(m)}$ 独立且都服从高斯分布，因此 $\mathbf{Y}_i$ 也服从多元高斯分布，即 $\mathbf{Y}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{C}_i \mathbf{T}_i, \sigma_0^2 \mathbf{I}_M)$ 。因此网络整体的似然概率密度表达式可表示为：

$$p(D|\mathbf{T}) = \left(\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \right)^{Mn} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{y}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i\|_2^2}{2\sigma_0^2}} = \left(\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \right)^{Mn} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{y}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{H}_i \lambda\|_2^2}{2\sigma_0^2}}. \quad (19)$$

3.3 先验 $p(\mathbf{T})$ 表达式

尽管多层网络中所有边的具体数值未知，但我们已知一个事实：即多层网络中的每一层网络中，只存在两种可能的边值。考虑到采样数据包含噪声，每种边对应的实际值会落在其理论真实值的一个小邻域内，具体而言：对于网络中实际不存在的边，其理论真实值为 0，故相应的估计值应分布于 0 的邻域内；而对于网络中实际存在的边，其估计值应聚集于一个非零值的邻域内，且此非零值即为该层网络的耦合强度。自然的，对于第 l 层中的边值 $x_{i,j}^l$ ，我们有如下式子

$$x_{i,j}^l \sim \sum_{k=1}^2 \pi_k^l N(\mu_k^l, \sigma_l^2), \quad (20)$$

其中， μ_k^l 表示第 l 层中第 k 个高斯分布的均值； π_k^l 代表第 l 层中第 k 个高斯分布的权重。

为减少参数数量并增强模型稳定性，将第 l 层中两个不同高斯分布的方差统一设为 σ_l^2 ，因此，先验 $p(\mathbf{T})$ 表达式可写为

$$p(\mathbf{T}) = \prod_{i=1}^n p(\mathbf{T}_i) = \prod_{i=1}^n \prod_{l=1}^L p(x_{i,j}^l) = \prod_{l=1}^L \prod_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\pi_k^l}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_{i,j}^l - \mu_k^l)^2}{2\sigma_l^2} \right\} \right). \quad (21)$$

在本文模型中，仅对各层网络边值 $x_{i,j}^l$ 赋予先验，而 λ 作为固定未知参数，未赋予先验分布，其估计将在后续算法中得到。

3.4 基于高斯混合模型的多层网络重构框架

当似然表达式 $p(D|\mathbf{T})$ 和先验表达式 $p(\mathbf{T})$ 被确定时, 最大后验准则具体表达式可表示成:

$$\begin{aligned} & \arg \max_{\mathbf{X}_i} \{\ln p(\mathbf{T}|D)\} \\ &= \arg \max_{\mathbf{X}_i} \{\ln p(D|\mathbf{T}) + \ln p(\mathbf{T})\} \\ &= \arg \max_{\mathbf{X}_i} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \right)^{Mn} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{X}_i - \mathbf{H}_i \lambda\|_2^2}{2\sigma_0^2}} + \right. \\ & \quad \left. \ln \prod_{l=1}^L \prod_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\pi_k^l}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_{i,j}^l - \mu_k^l)^2}{2\sigma_l^2} \right\} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

由于各变量相互关联, 难以直接获取变量的解析解。为此考虑使用 EM 算法 [38,39] 进行优化: 利用 Jensen 不等式 [40,41] 构造后验分布 $p(\mathbf{T}|D)$ 的对数似然下界 $L(\mathbf{T}, \sigma_0, \sigma_l, \pi_k^l, \mu_k^l)$, 通过最大化其下界, 即可得出各变量的更新式:

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{T}|D) &\geq L(\mathbf{T}, \sigma_0, \sigma_l, \pi_k^l, \mu_k^l) = \\ &= -Mn \ln \sigma_0 - Mn \ln \sqrt{2\pi} - \frac{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{X}_i - \mathbf{H}_i \lambda\|_2^2}{2\sigma_0^2} \\ &+ \sum_{l=1}^L \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^2 [Q_{i,j}^k]^l \left(\ln \pi_k^l - \ln \sigma_l - \ln \sqrt{2\pi} - \frac{(x_{i,j}^l - \mu_k^l)^2}{2\sigma_l^2} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

其中,

$$[Q_{i,j}^k]^l = \frac{\pi_k^l \exp \left(-\frac{(x_{i,j}^l - \mu_k^l)^2}{2\sigma_l^2} \right)}{\sum_{k'=1}^2 \pi_{k'}^l \exp \left(-\frac{(x_{i,j}^l - \mu_{k'}^l)^2}{2\sigma_l^2} \right)}. \quad (24)$$

此时, 最大化后验分布等同于最大化下界分布, 因此可以得到以下等式

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i\|_2^2}{Mn}, \quad (25)$$

$$\sigma_l^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^2 [Q_{i,j}^k]^l (x_{i,j}^l - \mu_k^l)^2}{n^2}, \quad (26)$$

$$\pi_k^l = \frac{\sum_{i,j=1}^n [Q_{i,j}^k]^l}{n^2}, \quad (27)$$

$$\mu_k^l = \frac{\sum_{i,j=1}^n [Q_{i,j}^k]^l x_{i,j}^l}{\sum_{i,j=1}^n [Q_{i,j}^k]^l}, \quad (28)$$

$$\lambda^l = \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{H}_i^l)^T \mathbf{H}_i^l \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \left[(\mathbf{H}_i^l)^T \left(\mathbf{Y}_i - \sum_{l_1=1}^L \mathbf{G}_i^{l_1} \mathbf{X}_i^{l_1} - \sum_{l_2 \neq l}^L \mathbf{H}_i^{l_2} \lambda^{l_2} \right) \right], \quad (29)$$

$$\mathbf{X}_i^l = \left((\mathbf{G}_i^l)^T \mathbf{G}_i^l + \alpha_l \mathbf{I} \right)^{-1} \left((\mathbf{G}_i^l)^T \left(\mathbf{Y}_i - \sum_{l_1 \neq l} \mathbf{G}_i^{l_1} \mathbf{X}_i^{l_1} - \mathbf{H}_i \lambda_i \right) + \alpha_l \mathbf{Q}_i^l \mu^l \right), \quad (30)$$

其中, $\alpha_l = \sigma_0^2 / \sigma_l^2$ 。注意到, 当噪声强度较高时, α_l 分母项远小于分子项, 所以在算法中计算 α_l 时应当随着网络变得稠密或信噪比降低时, 适当增大 α_l 的初始赋值。且在此 $\mathbf{Q}_i^l \in \mathbb{R}^{n \times 2}$, $\mu^l \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $\mathbf{Q}_i^l$ 中第 j 行第 k 列元素是 $[Q_{i,j}^k]^l$, μ^l 中第 k 行元素是 μ_k^l 。通过求解优化问题 $\min_{\mathbf{T}_i} \left\{ \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i\|_2^2 + \frac{Ln}{M} \|\mathbf{T}_i\|_2^2 \right\}$, 可得到 $\mathbf{T}_i (\mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{L(n+L-1) \times 1})$, 即得到 $\mathbf{X}_i^l (\mathbf{X}_i^l \in \mathbb{R}^{n \times 1})$ 的初始化公式

$$\mathbf{T}_i = \left(\mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_i + \frac{Ln}{M} \mathbf{I}_{L(n+L-1)} \right)^{-1} (\mathbf{C}_i^T \mathbf{Y}_i). \quad (31)$$

其中正则化系数 Ln/M 随着相对时间序列长度的增大而减小, 即观测数据越充分, 正则化约束越弱。综上所述, 基于高斯混合模型的多层网络重构算法可总结如算法 1 所示。

Algorithm 1 基于 GMM 的多层网络重构算法

Require: 观测信号数据矩阵 $\mathbf{Y}_i$ 和 $\mathbf{C}_i$, 网络层数 L , 最大迭代次数 $t_{1\max}$ 和 $t_{2\max}$, 迭代终止误差 MU

Ensure: $\mathbf{X}^l = \left[(\mathbf{X}_1^l)^T, \dots, (\mathbf{X}_i^l)^T, \dots, (\mathbf{X}_n^l)^T \right]$ 和 $\mu^l = [\mu_1^l, \mu_2^l]^T, l = 1, \dots, L$

- 1: 使用式 (31) 初始化 $\mathbf{X}_i^l$ 和 λ^l , 初始化 σ_l 为 $\mathbf{X}^l$ 的标准差 ($l = 1, \dots, L$), 初始化 $\sigma_0 = \sqrt{\frac{n}{M}} \sigma_1$
 - 2: 初始化 $\mu^l = \text{kmeans}(\mathbf{X}^l(:, 2), 2)$, 初始化 $\pi^l = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^T$, 使用式 (24) 初始化 $[Q_{i,j}^k]^l$
 - 3: **for** $t_1 = 1$ **to** $t_{1\max}$ **do**
 - 4: 计算 $\alpha_l = \sigma_0^2 / \sigma_l^2$
 - 5: **if** $M \leq 1.5 \cdot L \cdot n$ **then**
 - 6: $\alpha_l = \max(\alpha_l, 150 \cdot M / (Ln))$
 - 7: **end if**
 - 8: **for** $i = 1$ **to** n **do**
 - 9: 使用式 (30) 计算 $\mathbf{X}_i^l, l = 1, \dots, L$
 - 10: **end for**
 - 11: 分别使用式 (29) (25) 计算 $\sigma_0^2, \lambda^l (l = 1, \dots, L)$
 - 12: **for** $t_2 = 1$ **to** $t_{2\max}$ **do**
 - 13: 分别使用式 (24) (27) (28) (26) 计算 $[\mathbf{Q}]^l, \pi^l, \mu^l, \sigma_l^2$
 - 14: **end for**
 - 15: **end for**
 - 16: **return** $\mathbf{X}^l, \mu^l$
-

4 实验

4.1 仿真数据生成和各参数细节

在仿真实验中，噪声强度 σ_0 由信噪比强度 SNR_{DB} 决定，其计算公式如下

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{P_{\text{signal}}}{10^{\frac{\text{SNR}_{\text{DB}}}{10}}}}, \quad (32)$$

其中，对于观测信号向量 $\mathbf{Y}_i = (y_i)_m \in \mathbb{R}^{(M+1) \times 1}$ ，其信号功率 P_{signal} 计算如下：

$$P_{\text{signal}} = \frac{1}{M+1} \sum_{m=1}^{M+1} ((y_i)_m - y_c)^2, \quad (33)$$

这里 y_c 为 $\mathbf{Y}_i$ 的平均值：

$$y_c = \frac{1}{M+1} \sum_{m=1}^{M+1} (y_i)_m. \quad (34)$$

由公式 (32) 至公式 (34) 可知，噪声强度 σ_0 的大小与时间序列长度 M 有关。在仿真数据生成中，为了保证噪声强度 σ_0 在不同时间序列长度 M 时的独立性，首先我们对节点 i 生成足够长度的不含噪声的时间序列数据 $\mathbf{Y}_i$ 和 $\mathbf{C}_i$ ，之后再对 $\mathbf{Y}_i$ 添加信噪比强度为 SNR_{DB} 的噪声。且在演化博弈动力学中采用囚徒困境博弈 [42,43]，使用费米规则 [44] 来更新策略。同时为了防止系统博弈趋于稳定导致采样数据信息量不足，当博弈趋于稳定时，实验通过多次改变初始值来获取足够多的观测信号数据。且收益矩阵 $\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 3.2 & -1.2 \\ 6.5 & 1.4 \end{bmatrix}$ 。如无特殊说明，将数据信噪比强度 SNR_{DB} 设置为 80、75 和 70。

4.2 对比算法

注意到在多层网络中，其每一层都有一个共同的先验信息：每一层的边值只存在两个可能的解。以往的网络重构研究主要致力于设计新的重构方法，而较少深入利用网络的先验信息。与之不同，Lasso 方法因其关注网络的稀疏性、Signal-lasso 方法因其使用了网络边值先验信息，故将这两种方法选作对比算法。

4.2.1 Lasso

Lasso 方法关注网络的稀疏性先验信息，其表达式如下：

$$\min_{\mathbf{T}_i} \left\{ \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{T}_i\|_2^2 + \lambda_i \|\mathbf{T}_i\|_1 \right\}, \quad (35)$$

需要注意的是，正则项系数 λ_i 对重构性能影响显著，需预先设定。因此在本文中采用 5 倍交叉验证，从 100 个可能的值中选取使 Lasso 表现最好的 λ_i 值。

4.2.2 Signal-lasso

Signal-lasso 方法关注网络的边值先验信息，其表达式如下：

$$\min_{\mathbf{X}_i} \left\{ \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{X}_i - \mathbf{H}_i \lambda\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{X}_i\|_1 + \lambda_2 \sum_{l=1}^L \|\mathbf{X}_i^l - r_l \cdot \mathbf{1}_{n \times 1}\|_1 \right\} \quad (36)$$

与 Lasso 方法相同，Signal-lasso 方法也需要事先设定正则化系数，在此设置为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.05$ 。且与我们基于 GMM 的重构方法相比，Signal-lasso 方法需要一个非常强的先验信息，即网络所有的边值大小 r_l 必须已知，而 GMM 重构方法可在算法迭代完成后返回网络的边值。

4.3 评价指标

我们采用两个指标来评估不同方法在网络重构任务中的表现。

4.3.1 RMSE 值

均方误差 (RMSE) 用来衡量预测值与真实值之间的平均偏差，越低的 RMSE 值代表更好的重构表现。对于重构的整体均方误差值 RMSE，其计算公式如下：

$$\text{RMSE} = \frac{\sum_{l=1}^L \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (x_{i,j}^l - \hat{x}_{i,j}^l)^2}}{nL}, \quad (37)$$

其中， $\hat{x}_{i,j}^l$ 代表第 l 层网络的预测值，即重构的整体误差值为各层的均方误差的平均值。

4.3.2 F1 值

F1 值常用于衡量二分类模型的分类表现。在第 l 层网络中，使用基于 GMM 的方法得到的边值向量 μ^l 的均值，对网络推断值 $\hat{x}_{i,j}^l$ 进行截断，从而得到第 l 层网络的二分类网络。需要注意的是，在 Lasso 方法中需使用聚类方法才能得出第 l 层网络的边值向量 μ^l ，且在 Signal-lasso 方法中，需要事先给出边值先验向量，相比之下，我们基于 GMM 的方法可在算法结束时返回所有层的边值向量。与 RMSE 类似，对于重构的整体 F1 值，应为所有层的 F1 值的平均值。则重构的 F1 值计算公式为

$$\text{F1} = \frac{\sum_{l=1}^L \frac{2 \times \text{Precision}^l \times \text{Recall}^l}{\text{Precision}^l + \text{Recall}^l}}{L}, \quad (38)$$

其中， $\text{Precision}^l = \frac{\text{TP}^l}{\text{TP}^l + \text{FP}^l}$ ， $\text{Recall}^l = \frac{\text{TP}^l}{\text{TP}^l + \text{FN}^l}$ ，且 TP^l 、 FP^l 和 FN^l 分别代表第 l 层网络中真阳、假阳和假阴样本的数量，更高的 F1 值代表更好的重构精准度。

需要注意的是，在 Lasso 方法中需使用聚类方法才能得出第 l 层的边值向量 μ^l ，且在 Signal-lasso 方法中，需要事先给出边值先验向量，相比之下，我们基于 GMM 的方法可在算法结束时返回所有层的边值向量。

4.4 主要结果

为验证所提方法的有效性，本节在配置 MATLAB R2023b 软件环境的 Windows 平台上开展了多层网络重构实验，实验结果均取 10 次独立运行结果的平均值。

4.4.1 重构多层网络

本节我们将多层网络的层数 L 设为 3，耦合强度 $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$ ，且 $[\lambda_{12}, \lambda_{13}]^T = [2, 1]^T$ ， $[\lambda_{21}, \lambda_{23}]^T = [2, 2]^T$ ， $[\lambda_{31}, \lambda_{32}]^T = [1, 2]^T$ 。每一层均是节点数 $n = 100$ 的相同稀疏程度的 BA 网络。为研究噪声水平对重构性能的影响，我们选取了不同信噪比强度的实验条件进行实验。且在本节实验中，信噪比强度与噪声强度对应关系如表 1 所示。

表 1 不同平均度 $\langle k \rangle$ 和信噪比条件下噪声标准差 σ_0 的估计结果

Table 1. Estimates of the noise standard deviation σ_0 under different average degrees $\langle k \rangle$ and signal-to-noise ratios

平均度 $\langle k \rangle$	信噪比 SNR_{DB}				
	60	70	75	80	90
10	(14.077, 0.076)	(4.446, 0.015)	(2.496, 0.008)	(1.406, 0.005)	(0.444, 0.001)
30	(34.220, 0.079)	(10.838, 0.024)	(6.088, 0.010)	(3.423, 0.007)	(1.082, 0.002)
50	(47.180, 0.090)	(14.941, 0.041)	(8.396, 0.010)	(4.725, 0.010)	(1.495, 0.003)

注：有序对中第一个数为 σ_0 的均值，第二个数为 σ_0 的标准差 ($M/Ln = 1.9$ ，基于 10 次独立重复实验，保留三位小数)。

由表 1 可知，若 SNR_{DB} 过低（如取 60），则噪声强度过大，难以获得可靠的实验结果；若 SNR_{DB} 过高（如取 90），则噪声过小，造成实验区分度不足。而 SNR_{DB} 取 70、75 和 80 能够有效体现算法在不同噪声强度下的性能差异，具有足够的区分度。在此基础上，我们在重构基于演化博弈动力学驱动的多层网络实验中，对不同算法的性能进行了比较。图 1 和图 2 分别展示了 F1 值和 RMSE 值指标随相对时间序列长度 M/Ln 的变化情况。可以得出以下观察结果：第一，当网络比较稀疏且信噪比较高时，Lasso 方法由于采用交叉验证选择稀疏性系数、Signal-lasso 方法得益于网络边值的先验信息，二者性能均优于

GMM 方法。第二，Lasso 方法仅在网络较为稀疏时表现良好。当 SNR_{DB} 固定，且网络逐渐变得稠密时，Lasso 方法性能表现会显著下降（观察图 1 的每一列可得此结果）。第三，当信噪比强度变低，或网络变得稠密时，基于 GMM 的重构方法优于 Lasso 和 Signal-lasso 方法。最后，当网络变的稠密、或网络信噪比降低时，我们的 GMM 方法收敛到精确重构的速度均快于 Lasso 方法和 Signal-lasso 方法。

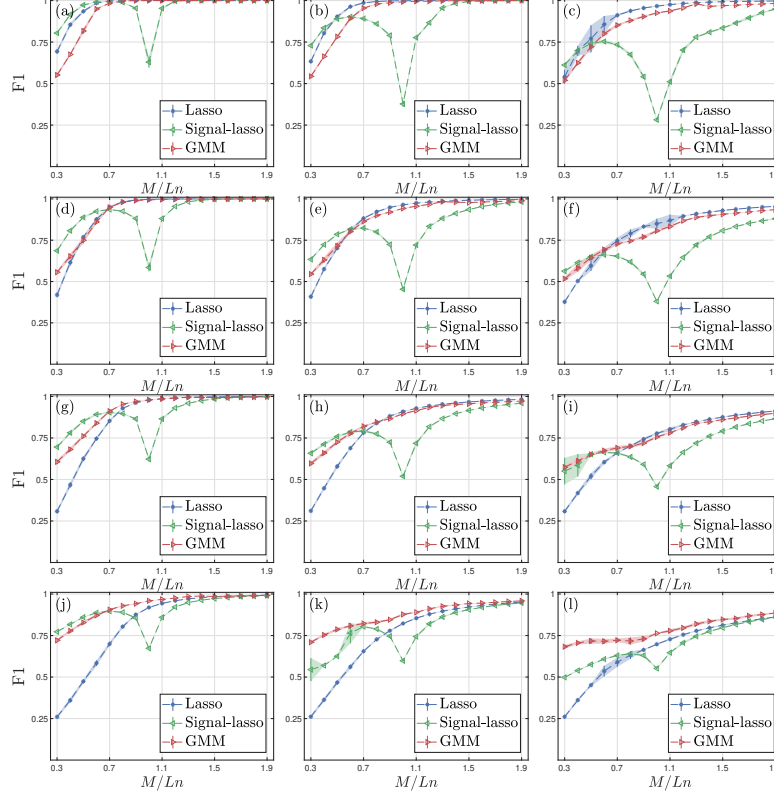


图 1 Lasso、Signal-lasso 和 GMM 方法在演化博弈动力学驱动的多层网络上的重构性能。图中给出了 F1 值随相对时间序列长度 $M/(Ln)$ 的变化。从上至下的四行分别对应平均度 $\langle k \rangle = 10, 20, 30, 50$ ，从左至右的三列分别对应信噪比 $\text{SNR}_{\text{DB}} = 80, 75, 70$ 。各层均为包含 100 个节点的 BA 网络。每个数据点表示 10 次独立实验的平均结果，阴影区域表示相应的标准差。后文图中均采用相同约定。

Fig. 1. Reconstruction performance of Lasso, Signal-lasso, and GMM on multiplex networks driven by evolutionary game dynamics. The F1 score is plotted as a function of the relative time-series length $M/(Ln)$. From top to bottom, the four rows correspond to average degrees $\langle k \rangle = 10, 20, 30$, and 50, respectively. From left to right, the three columns correspond to signal-to-noise ratios $\text{SNR}_{\text{DB}} = 80, 75$, and 70, respectively. Each layer is a 100-node BA network. Each data point represents the mean over 10 independent runs, and the shaded region indicates the corresponding standard deviation. The same convention is used in subsequent figures.

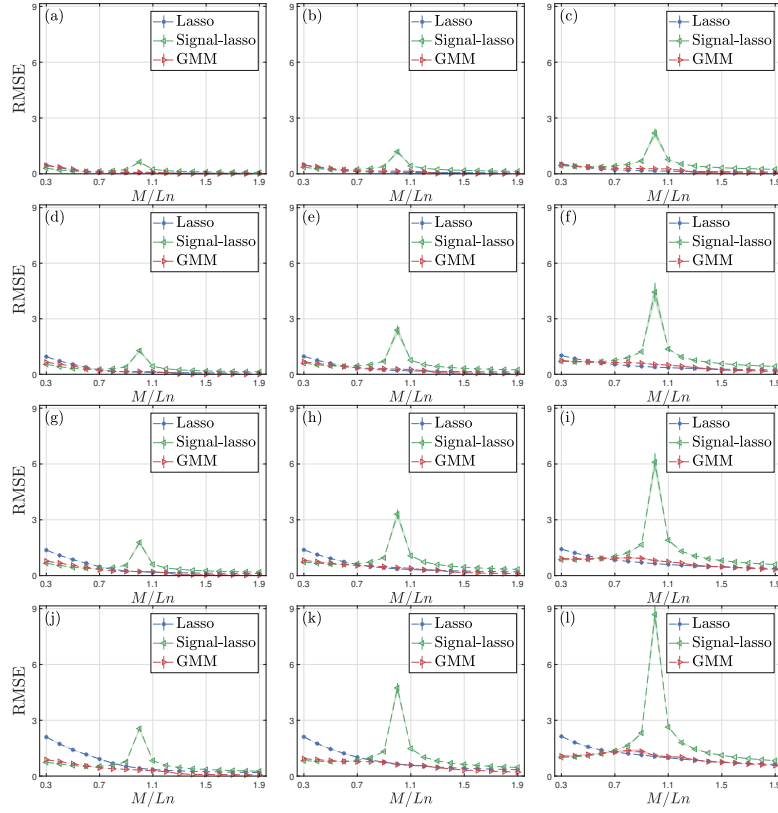


图 2 Lasso、Signal-lasso 和 GMM 方法在演化博弈动力学驱动的多层网络上的重构性能。图中给出了 RMSE 值随相对时间序列长度 $M/(Ln)$ 的变化。从上至下的四行分别对应平均度 $\langle k \rangle = 10, 20, 30, 50$ ，从左至右的三列分别对应信噪比 $\text{SNR}_{\text{DB}} = 80, 75, 70$ 。各层均为包含 100 个节点的 BA 网络。

Fig. 2. Reconstruction performance of Lasso, Signal-lasso, and GMM on multiplex networks driven by evolutionary game dynamics. The RMSE value is plotted as a function of the relative time-series length $M/(Ln)$. From top to bottom, the four rows correspond to average degrees $\langle k \rangle = 10, 20, 30$, and 50 , respectively. From left to right, the three columns correspond to signal-to-noise ratios $\text{SNR}_{\text{DB}} = 80, 75$, and 70 , respectively. Each layer is a 100-node BA network.

此外，可在图 1 和图 2 中观察到一个显著现象，当信噪比较低（即噪声强度较高）时，Signal-lasso 和 GMM 方法在 $M/Ln \approx 1$ 附近均会出现波动。但 GMM 方法波动幅度明显小于 Signal-lasso 方法，但 Lasso 方法很少出现波动。其原因在于，Lasso 方法中的稀疏项系数通过 5 倍交叉验证自适应选择，而 Signal-lasso 方法和 GMM 方法中的正则化系数完全依赖经验设定，未针对特定的实验场景进行优化。然而，GMM 方法得益于对 α_l 的影响的定量分析，并在迭代过程中自动更新 α_l 的值，从而在一定程度上抑制了波动幅度。

4.4.2 基于真实网络拓扑的重构实验

在本节中，我们对从互联网开源数据库获取的真实多层网络进行重构，并对比不同算法的性能表现。所用网络数据集为覆盖全球不同国家或地区的 364 种细分农产品贸易网络^[45]。我们将全部农产品划分为 10 个品类，分别为大宗谷物与主粮类、油料油脂与油粕类、杂豆薯芋与杂粮类、新鲜果蔬与坚果类、畜禽肉类与活体畜禽类、蛋奶与乳制品类、加工食品与预制食品类、饲料与饲用作物类、嗜好品与调味品类、非食用工业用农产品类，据此构建 10 层无向贸易网络。从上述 10 层无向网络中，按 3 层、3 层、2 层、2 层的规模分为四组，每组独立剔除网络内的孤立不连通节点后，最终构建得到四个多层网络，依次命名为 aP1、aP2、aP3 与 aP4。各网络的名称、网络层数、耦合强度、网络大小、以及边密度等核心参数如表 2 所示。

表 2 真实世界网络的基本拓扑特征

Table 2. Basic topological properties of real-world networks

网络名称	种类名称	耦合强度	网络大小	边密度
aP1($L = 3$)	大宗谷物与主粮类	1	171	0.2340
	油料油脂与油粕类	2		0.2702
	杂豆薯芋与杂粮类	3		0.2067
aP2($L = 3$)	新鲜果蔬与坚果类	1	171	0.2967
	畜禽肉类与活体畜禽类	2		0.2096
	蛋奶与乳制品类	3		0.2241
aP3($L = 2$)	加工食品与预制食品类	1	159	0.4926
	饲料与饲用作物类	2		0.1318
aP4($L = 2$)	嗜好品与调味品类	1	202	0.3225
	非食用工业用农产品类	2		0.2540

可以从图3和图4中结果得出以下结论：第一，在较为稠密的 aP3 和 aP4 网络中，GMM 方法始终表现优异；在相对较稀疏的 aP1 和 aP2 网络中，GMM 方法并非全部领先于对比算法。第二，与前面结论类似，Signal-lasso 方法的 F1 值在 $M/Ln \approx 1$ 时仍出现明显波动。第三，当噪声水平变大时，Signal-lasso 方法的 RMSE 值在 $M/Ln \approx 1$ 时的波动也会变大。最后，Lasso 方法收敛到完全重构的速度与网络规模

及噪声大小无明显关联。

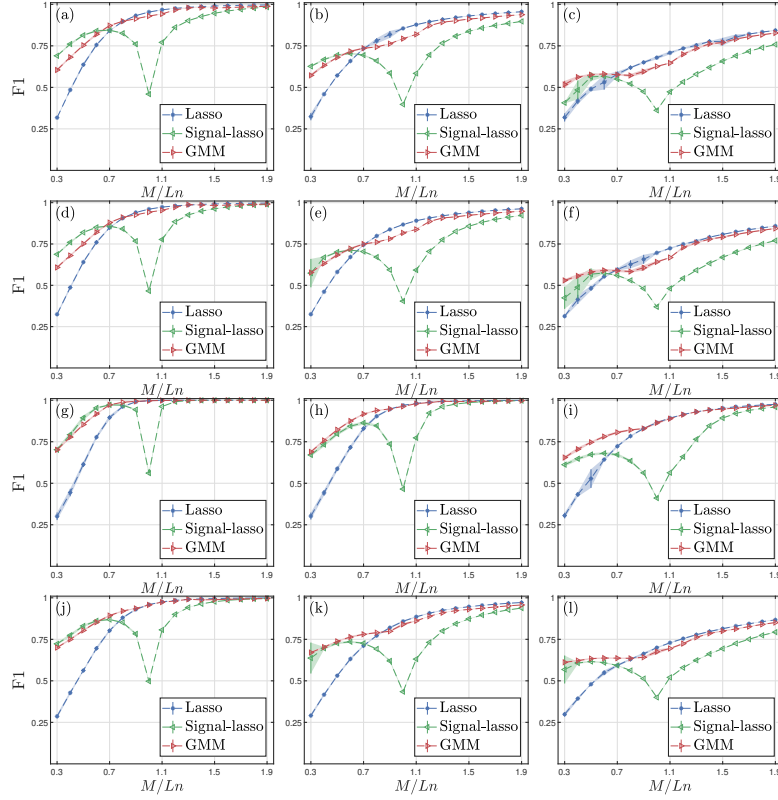


图 3 Lasso、Signal-lasso 和 GMM 方法在真实多层网络上的重构性能。图中给出了 F1 值随相对时间序列长度 $M/(Ln)$ 的变化。从上至下的四行分别对应 aP1、aP2、aP3 和 aP4 网络，从左至右的三列分别对应信噪比 $\text{SNR}_{\text{DB}} = 85, 80, 75$ 。

Fig. 3. Reconstruction performance of Lasso, Signal-lasso, and GMM on real multiplex networks. The F1 score is plotted as a function of the relative time-series length $M/(Ln)$. From top to bottom, the four rows correspond to the aP1, aP2, aP3, and aP4 networks, respectively. From left to right, the three columns correspond to signal-to-noise ratios $\text{SNR}_{\text{DB}} = 85, 80$, and 75 , respectively.

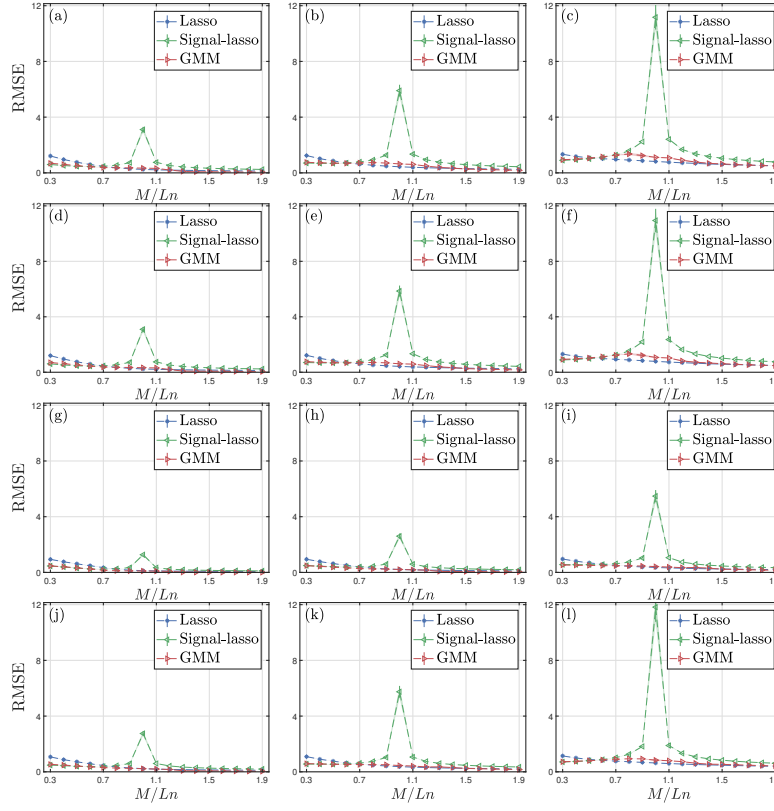


图 4 Lasso、Signal-lasso 和 GMM 方法在真实多层网络上的重构性能。图中给出了 RMSE 值随相对时间序列长度 $M/(Ln)$ 的变化。从上至下的四行分别对应 aP1、aP2、aP3 和 aP4 网络，从左至右的三列分别对应信噪比 $\text{SNR}_{\text{DB}} = 85, 80, 75$ 。

Fig. 4. Reconstruction performance of Lasso, Signal-lasso, and GMM on real multiplex networks. The RMSE value is plotted as a function of the relative time-series length $M/(Ln)$. From top to bottom, the four rows correspond to the aP1, aP2, aP3, and aP4 networks, respectively. From left to right, the three columns correspond to signal-to-noise ratios $\text{SNR}_{\text{DB}} = 85, 80$, and 75 , respectively.

4.4.3 α_l 对算法性能影响

在算法 1 推导中定义 $\alpha_l = \sigma_0^2 / \sigma_l^2$ ，其中 σ_0^2 为噪声方差， σ_l^2 则代表先验模型在第 l 层网络中的方差。在仿真实验中， σ_0^2 由信噪比强度 SNR_{DB} 决定， SNR_{DB} 越低则 σ_0^2 越高。因此，在网络变得稠密，或噪声水平较高时，需相应地提高 α_l 的初始赋值，以提升算法的重构精度。本节进一步研究在层数为 2 和 3 的节点数为 100 的多层网络中，当 α_l 取值为 $\max(\alpha_l, t * M/(Ln))$ 时，参数 t 对算法重构性能的影响。本节设置四种不同的实验条件，实验结果表明，在不同的实验条件中，参数 t 的取值对重构性能均具有显著影响。

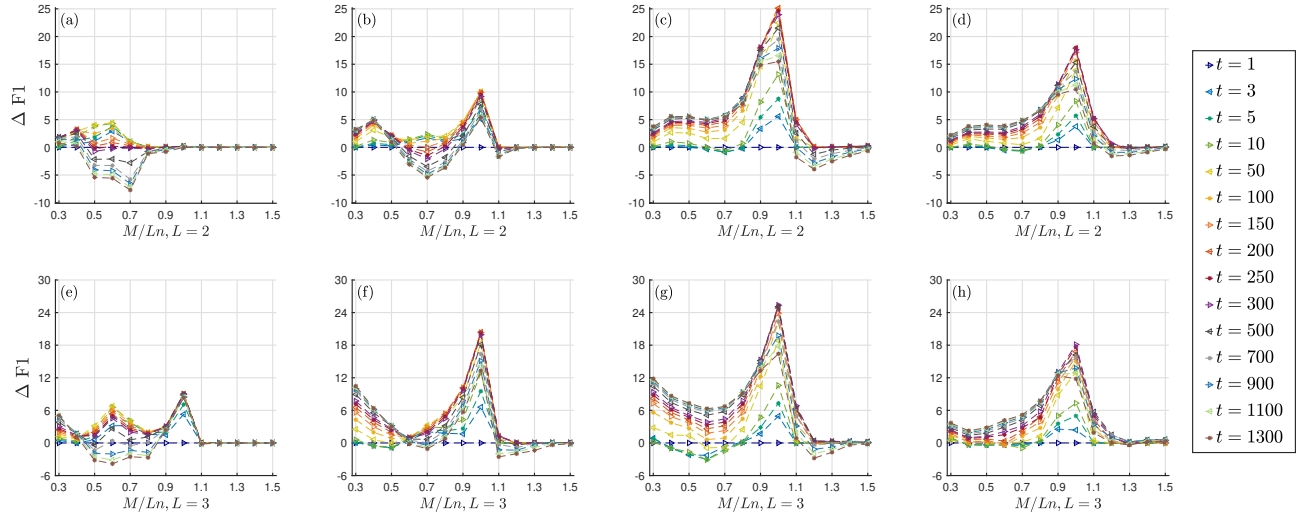


图 5 不同 $\langle k \rangle$ 和 SNR_{DB} 条件下, 参数 t 对 F1 值的影响。子图 (a) 和 (e) 对应 $\langle k \rangle = 10, \text{SNR}_{\text{DB}} = 80$; 子图 (b) 和 (f) 对应 $\langle k \rangle = 30, \text{SNR}_{\text{DB}} = 80$; 子图 (c) 和 (g) 对应 $\langle k \rangle = 30, \text{SNR}_{\text{DB}} = 70$; 子图 (d) 和 (h) 对应 $\langle k \rangle = 50, \text{SNR}_{\text{DB}} = 70$ 。 ΔF1 定义为 $\text{F1}(t) - \text{F1}(t = 1)$ 。

Fig. 5. Effect of the parameter t on the F1 score under different $\langle k \rangle$ and SNR_{DB} conditions. Subfigures (a) and (e) correspond to $\langle k \rangle = 10, \text{SNR}_{\text{DB}} = 80$. Subfigures (b) and (f) correspond to $\langle k \rangle = 30, \text{SNR}_{\text{DB}} = 80$. Subfigures (c) and (g) correspond to $\langle k \rangle = 30, \text{SNR}_{\text{DB}} = 70$. Subfigures (d) and (h) correspond to $\langle k \rangle = 50, \text{SNR}_{\text{DB}} = 70$. ΔF1 is defined as $\text{F1}(t) - \text{F1}(t = 1)$.

图 5 展示了在不同实验条件下, 参数 t 取不同倍数 (以 $t = 1$ 为基准参考值) 对算法性能产生的相对影响。从此图中可以观察到以下现象: 在网络较稀疏且噪声水平较低时 (图 5(a) 和图 5(e)), t 值越大, 算法性能反而下降; 但是当 M/Ln 趋近于 1 时, 不同 t 的取值对算法性能影响的差异较小。当网络平均度增大至 30 且噪声水平仍较低时 (图 5(b) 和图 5(f)), t 的取值越大, 给算法带来的增益越大。所以在同等大小的信噪比情况下, 网络越稠密, t 的取值应当越大。

当 $\langle k \rangle = 30$ 时 (图 5(b) 与图 5(c), 和图 5(f) 与图 5(g)), 可以看出当网络稀疏程度固定而采样噪声增大时, 较大的 t 值持续为算法带来增益。这表明: 对于固定稀疏程度的网络, 随着噪声增强, 使算法性能达到最优的 t 值也在增大。但增益并非随 t 无限增大而无限提升, 所以 t 的取值应当保持在一个合理的范围内。

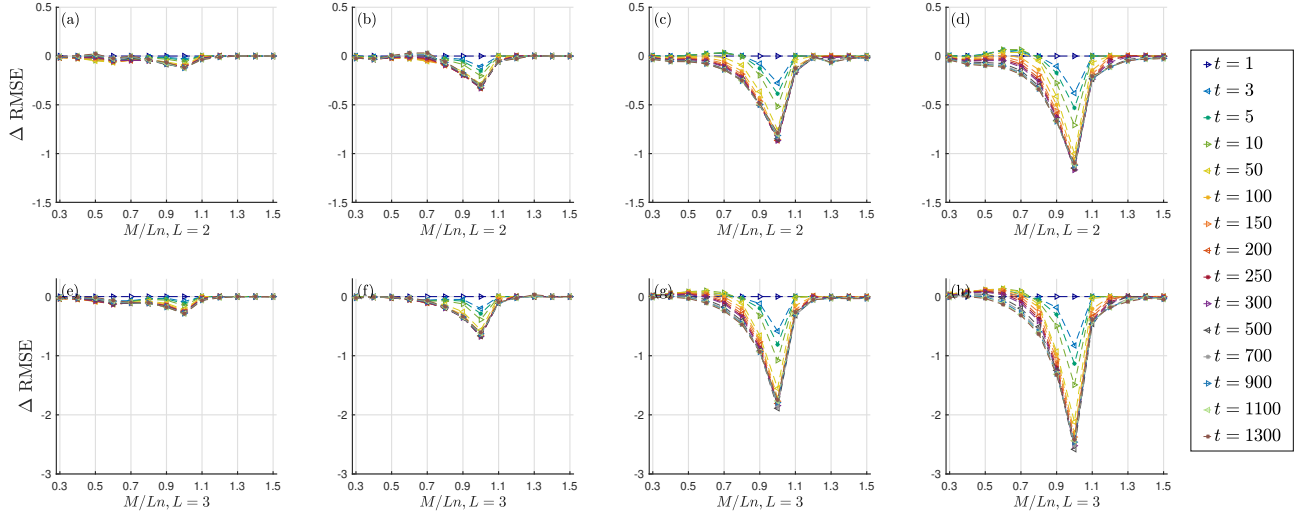


图 6 不同 $\langle k \rangle$ 和 SNR_{DB} 条件下, 参数 t 对 RMSE 值的影响。子图 (a) 和 (e) 对应 $\langle k \rangle = 10, \text{SNR}_{\text{DB}} = 80$; 子图 (b) 和 (f) 对应 $\langle k \rangle = 30, \text{SNR}_{\text{DB}} = 80$; 子图 (c) 和 (g) 对应 $\langle k \rangle = 30, \text{SNR}_{\text{DB}} = 70$; 子图 (d) 和 (h) 对应 $\langle k \rangle = 50, \text{SNR}_{\text{DB}} = 70$ 。 ΔRMSE 定义为 $\text{RMSE}(t) - \text{RMSE}(t = 1)$ 。

Fig. 6. Effect of the parameter t on RMSE under different $\langle k \rangle$ and SNR_{DB} conditions. Subfigures (a) and (e) correspond to $\langle k \rangle = 10, \text{SNR}_{\text{DB}} = 80$. Subfigures (b) and (f) correspond to $\langle k \rangle = 30, \text{SNR}_{\text{DB}} = 80$. Subfigures (c) and (g) correspond to $\langle k \rangle = 30, \text{SNR}_{\text{DB}} = 70$. Subfigures (d) and (h) correspond to $\langle k \rangle = 50, \text{SNR}_{\text{DB}} = 70$. ΔRMSE is defined as $\text{RMSE}(t) - \text{RMSE}(t = 1)$.

类似的, 对比图 6 可知, 当网络变得更稠密且噪声增大时, 不同 t 的取值在不同的 M/Ln 下均能提升算法性能。具体而言: 当 $M/Ln = 0.3$ 时, t 的不同取值对算法性能影响差异较小。当 $M/Ln \leq 0.9$ 时, 总体上 t 值越大, 性能增益越显著。

综上所述, 算法中参数 t 的取值应随 M/Ln 动态调整, 且可以得出结论: t 的取值应当 M/Ln 的增大而增大。为综合在不同条件下 t 的取值对算法增益的影响, 我们最终在算法中设定: 当 $M/Ln \leq 1.5$ 时, 将 α_l 更新为 α_l 和 $150 * M/Ln$ 的最大值 $\max(\alpha_l, 150 * M/Ln)$ 。

4.4.4 初始化策略对算法的影响

由于本文采用 EM 算法求解变量更新式, 算法 1 中使用 K-means 算法对 $\mathbf{X}^l$ 进行聚类, 以获得 μ^l 的初始值。为评估不同初始化策略对算法鲁棒性的影响, 本节设置两种对比策略: 将 μ^l 初始化为全零向量, 以及随机初始化。相应实验结果如图 7 所示。

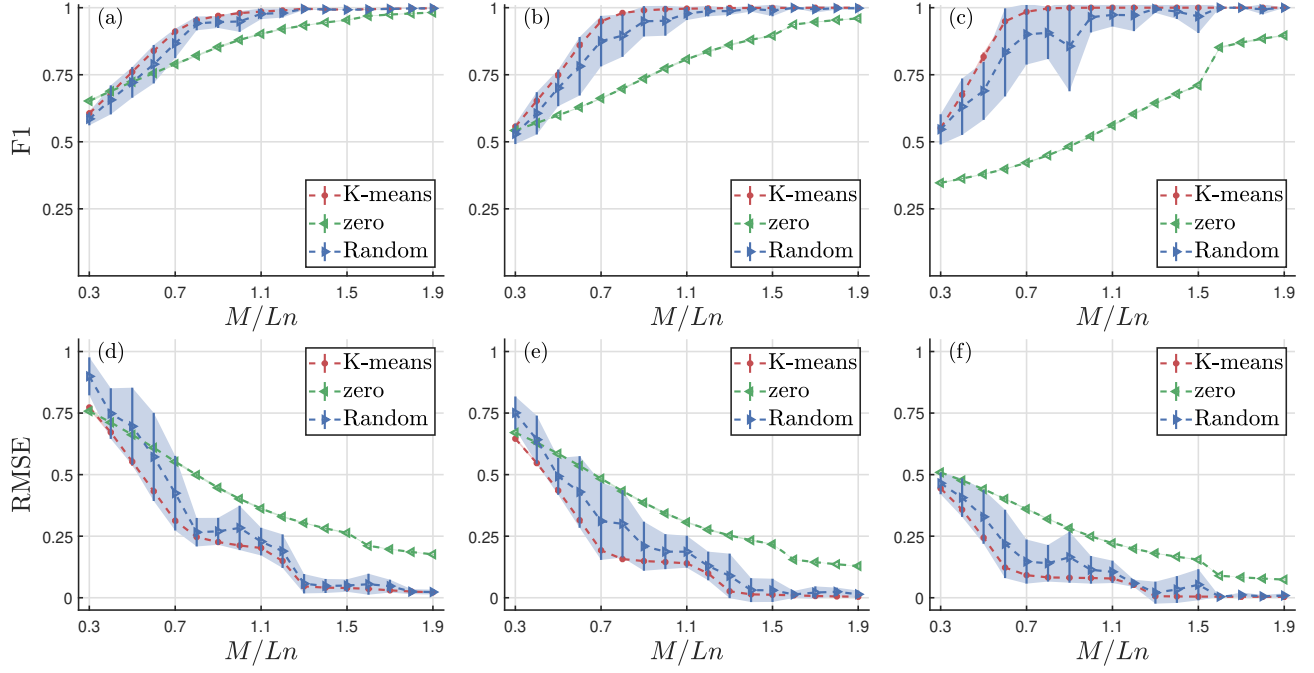


图 7 采用 K-means 初始化、全零初始化和随机初始化三种策略对 μ^l 进行初始化时，算法 1 得到的 F1 值和 RMSE 值。各子图对应的平均度分别为 $\langle k \rangle = 10$ (子图 (a) 和 (d))、 $\langle k \rangle = 20$ (子图 (b) 和 (e)) 以及 $\langle k \rangle = 30$ (子图 (c) 和 (f))。SNR_{DB} = 80。

Fig. 7. F1 and RMSE values obtained by Algorithm 1 when μ^l is initialized using three strategies: K-means initialization, all-zero initialization, and random initialization. The panels correspond to average degrees $\langle k \rangle = 10$ (panels (a) and (d)), $\langle k \rangle = 20$ (panels (b) and (e)), and $\langle k \rangle = 30$ (panels (c) and (f)), respectively. SNR_{DB} = 80.

由图 7 可以观察到以下现象：第一，采用 K-means 聚类初始化时，算法表现最为稳定；相比之下，随机初始化策略下算法性能波动较大。第二，全零初始化时算法表现最差。由此可得出结论：由于 EM 算法对初始值较为敏感，选择合适的初始化策略对于保障算法的高效性与稳定性至关重要。

5 结论

综上所述，我们提出了一种基于高斯混合模型 (GMM) 的框架，用于在仅能观测到多层网络中各节点聚合信号的条件下实现网络重构。该方法在贝叶斯估计框架下将网络拓扑结构视为待估计参数，具体而言，将各层网络的边建模为一个高斯混合模型，从而驱动模型参数收敛至各层网络的边权值。与依赖强边值先验的 Signal-lasso 方法相比，GMM 方法在算法结束时可直接输出网络边值，且在高噪声场景下具有更强

的鲁棒性。与依赖交叉验证选择正则化系数的 Lasso 方法相比, GMM 在低平均度和低噪声时表现相对逊色, 但是在网络变得稠密、噪声水平较高时, GMM 能够提供更优的重构精度。

我们的方法仍有许多可改进之处。例如当节点聚合信号并非节点每层信号之和时, 如何设计有效的重构算法仍是具有挑战性的问题。此外, 由于 EM 算法固有的非凸性, 如何依据观测信号给出更优的初始网络赋值, 对提升算法的鲁棒性与收敛性能具有重要意义。

参考文献

- [1] Lee K M, Min B, Goh K I 2015 *Eur. Phys. J. B* **88** 48
- [2] Smith-Aguilar S E, Aureli F, Busia L, Schaffner C, Ramos-Fernández G 2019 *Primates* **60** 277
- [3] Bullmore E, Sporns O 2009 *Nat. Rev. Neurosci.* **10** 186
- [4] Parente F, Colosimo A 2021 *Sci. Rep.* **11** 15525
- [5] Battiston F, Nicosia V, Latora V 2014 *Phys. Rev. E* **89** 032804
- [6] Zhang W, Yao J, Wang H O 2016 *Proc. 2016 Am. Control Conf. (ACC)* Boston, USA, July 6–8, 2016 p 3752
- [7] Jain P B, Nguyen T T, Mináč J, Muller L E, Budzinski R C 2023 *Chaos* **33** 103128
- [8] Seif A, Zarei M 2025 *Chaos Solitons Fractals* **196** 116412
- [9] Pastor-Satorras R, Castellano C, Van Mieghem P, Vespignani A 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 925
- [10] Li Y T, Wu X Q, Zhong S, Huang Z H 2023 *Chaos* **33** 083145
- [11] Martin T, Ball B, Newman M E J 2016 *Phys. Rev. E* **93** 012306
- [12] Zhang H F, Liu K P, Wang H, Ma C 2025 *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.* **55** 8544
- [13] Timme M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 224101
- [14] Xu X, Zhu C, Zhu X Q 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 088901 (in Chinese) [徐翔, 朱承, 朱先强 2021 物理学报 70 088901]
- [15] Ma C, Fu J, Zhang H F, Chen G 2025 *Phys. Rev. E* **112** 064310
- [16] Ma C, Chen H S, Lai Y C, Zhang H F 2018 *Phys. Rev. E* **97** 022301
- [17] Li J W, Shen Z S, Wang W X, Grebogi C, Lai Y C 2017 *Phys. Rev. E* **95** 032303

- [18] Gleeson J P, Melnik S, Ward J A, Porter M A, Mucha P J 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026106
- [19] Zhang Y Y, Zhang H F, Ding X, Ma C 2025 *Chaos* **35** 093128
- [20] Tibshirani R 1996 *J. R. Stat. Soc. Ser. B* **58** 267
- [21] Ma C, Lai Y C, Li X, Zhang H F 2023 *Phys. Rev. E* **108** 034304
- [22] Yan M, Zhang H F, Wang H, Ma C, Chen G 2026 *Chaos* **36** 033103
- [23] Hoerl A E, Kennard R W 1970 *Technometrics* **12** 55
- [24] Hao C Q, Wang J, Deng B, Wei X L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 148901 (in Chinese) [郝崇清, 王江, 邓斌, 魏熙乐 2012 物理学报 61 148901]
- [25] Donoho D L 2006 *IEEE Trans. Inf. Theory* **52** 1289
- [26] Muthukrishnan R, Rohini R 2016 *Proc. 2016 IEEE Int. Conf. Adv. Comput. Appl. (ICACA)* Coimbatore, India, October 24, 2016 p 18
- [27] Wu K, Hao X X, Liu J, Liu P H, Shen F 2020 *IEEE Trans. Cybern.* **52** 5136
- [28] Huang K K, Wang Z, Jusup M 2018 *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.* **7** 466
- [29] Elgabli A, Elghariani A, Al-Abbasi A O, Bell M 2017 *Proc. 51st Asilomar Conf. Signals Syst. Comput.* Pacific Grove, CA, USA, October 29–November 1, 2017 p 1660
- [30] Shi L, Shen C, Jin L B, Shi Q, Wang Z, Boccaletti S 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 043210
- [31] Huang W F, Xie Y, Ye Z Q, Li X N, Jia Y, Zhan X 2026 *Chaos Solitons Fractals* **208** 118120
- [32] Ma C, Chen H S, Li X, Lai Y C, Zhang H F 2020 *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **19** 124
- [33] Kaiser D, Patwardhan S, Kim M, Radicchi F 2024 *Phys. Rev. E* **109** 024313
- [34] He R H, Zhang H F, Wang H, Ma C 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 178901 (in Chinese) [何瑞辉, 张海峰, 王欢, 马闯 2024 物理学报 73 178901]
- [35] Boluki S, Esfahani M S, Qian X N, Dougherty E R 2017 *BMC Bioinformatics* **18** 552
- [36] Werhli A V, Husmeier D 2007 *Stat. Appl. Genet. Mol. Biol.* **6** 15
- [37] Peel L, Peixoto T P, De Domenico M 2022 *Nat. Commun.* **13** 6794
- [38] Wu C F J 1983 *Ann. Stat.* **11** 95

- [39] Bilmes J A 1998 *A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and Its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models* Technical Report ICSI-TR-97-021
- [40] Ruel J J, Ayres M P 1999 *Trends Ecol. Evol.* **14** 361
- [41] Denny M 2019 *Conserv. Physiol.* **7** cox053
- [42] Boyd R 1989 *J. Theor. Biol.* **136** 47
- [43] Szabó G, Tóke C 1998 *Phys. Rev. E* **58** 69
- [44] Poncela J, Gómez-Gardeñes J, Traulsen A, Moreno Y 2009 *New J. Phys.* **11** 083031
- [45] De Domenico M, Nicosia V, Arenas A, Latora V 2015 *Nat. Commun.* **6** 6864

录用稿件，非最终出版稿

Multiplex network reconstruction from cross-layer aggregated states based on a Gaussian mixture model*

XIA Mingzhi¹⁾ ZHANG Haifeng²⁾ MA Chuang^{1)†}

1) (*School of Internet, Anhui University, Hefei 230039, China*)

2) (*School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China*)

Abstract

Multiplex networks provide a fundamental framework for describing complex systems in which the same set of nodes interact through multiple types of connections. Inferring the layer-specific topology of such networks is essential for understanding their structural organization and dynamical behavior. Most existing reconstruction methods, however, rely on the assumption that node states in each layer can be observed separately. This assumption is often difficult to satisfy in privacy-sensitive, resource-limited, or experimentally constrained scenarios, where only cross-layer aggregated node states are available. In this work, we study the reconstruction of multiplex networks from aggregated observations and propose a Bayesian reconstruction framework based on a Gaussian mixture model. Taking evolutionary game dynamics on multiplex networks as a representative example, we first transform the aggregated payoff observations into a linear inverse problem, in which the unknown variables encode the adjacency information of all layers. To improve the reliability of reconstruction under limited and noisy observations, we

* This work was funded by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 62476002, 62473001) and by the Key Project of Anhui Provincial Excellent Young Teacher Cultivation Program, China (Grant No. YQZD2025004).

† Corresponding author. E-mail: chuang_m@126.com

introduce a layer-wise Gaussian mixture prior for the edge values. This prior only assumes that each layer contains two possible edge states, without requiring the explicit values of these states. The edge values, mixture weights, variances, interlayer coupling parameters, and observation noise level are then adaptively estimated through an iterative expectation-maximization procedure. Numerical experiments on synthetic multiplex networks driven by evolutionary game dynamics show that the proposed method achieves robust reconstruction performance, especially when the networks are relatively dense or the observations contain strong noise. In these regimes, sparsity-based Lasso reconstruction deteriorates, whereas Signal-lasso depends on stronger prior knowledge of the edge values. Experiments on real-world multiplex trade networks further demonstrate the applicability of the proposed framework. These results indicate that layer-resolved network structures can be inferred from cross-layer aggregated signals with only weak prior information. The proposed method therefore provides a feasible approach for reconstructing multiplex networks under incomplete observations.

Keywords: Multiplex networks; network reconstruction; Bayesian inference; Gaussian mixture model; aggregated observations; evolutionary game dynamics

非最终出版稿

录用稿件，