

非厄米 Lieb 光子晶体中的高阶拓扑态与频率依赖趋肤效应 *

杨孝森[†] 陈张媛 封雅茹

(江苏大学物理与电子工程学院, 镇江 212013)

非厄米体系中增益与损耗的引入可诱导不同于传统厄米体系的拓扑现象, 其中非厄米趋肤效应和高阶局域态受到广泛关注. 本文以非厄米 Lieb 光子晶体为研究对象, 通过引入空间分布的增益与损耗构建非厄米模型, 系统研究其能带结构和拓扑性质. 结果表明, 该体系在多个光子带隙中存在高阶角局域态, 并呈现多带隙局域特征. 随着频率变化, 体态可由扩展态逐渐演化为局域态, 表现出显著的频率依赖非厄米趋肤效应. 通过分析复本征频谱的点隙拓扑, 本文建立了 Lieb 光子晶体中能谱拓扑与非厄米趋肤效应直接的拓扑关联. 此外, 非厄米性的引入打破了角态的简并性, 并实现了对角态空间分布的有效调控. 研究结果表明, Lieb 晶格的几何构型有利于实现多带隙高阶拓扑相及频率依赖趋肤效应, 为多功能拓扑光子器件设计提供了物理基础.

关键词: 非厄米; 光子晶体; 高阶拓扑态; 非厄米趋肤效应

PACS: 03.65.Vf, 42.70.Qs, 73.43.Nq

1 引言

近年来, 非厄米物理^[1-7] 由于能够描述开放系统中的增益与损耗效应, 已成为凝聚态物理^[8-15] 与光子学^[16-21] 等领域的重要研究方向. 与传统厄米体系不同, 非厄米体系通常具有复本征谱和双正交本征态^[22] 结构, 由此产生了一系列超越传统厄米范畴的物理特征, 例如奇异点^[23,24] 和非厄米趋肤效应^[25-36]. 其中, 非厄米趋肤效应表现为在开放边界条件下大量体态向系统边界发生宏观聚集, 导致传统基于布洛赫能带理论的体边对应关系发生破缺. 这些特性使得非厄米体系中的拓扑性质呈现出与厄米体系截然不同的行为.

在此背景下, 高阶拓扑绝缘体^[37] 作为拓扑物态的重要拓展, 其与非厄米效应的交织与耦合问题引起了广泛关注^[38-40]. 高阶拓扑体系支持在低于其维度的边界上产生拓扑受保护态, 如二维体系中受

对称性保护的角态. 现有研究揭示, 非厄米性的引入不仅重塑了边界态的能谱特性, 更诱导出一种全新的局域化机制, 驱动拓扑态在空间分布上展现出显著的方向依赖性. 然而, 目前学术界对于非厄米趋肤效应与高阶拓扑态之间复杂相互作用的理解尚处于初步阶段, 尤其是能带结构的拓扑特征如何调制非厄米局域化机制, 及其深层的物理调控逻辑, 仍缺乏系统性的理论与阐释.

Lieb 晶格作为一种典型的二维多子晶格结构, 其单个原胞内包含三个非平衡的子晶格点, 这种独特的周期性构型与丰富的子晶格间耦合多样性, 为探索非厄米高阶拓扑物理提供了理想的自由度与研究平台^[41-45]. 其多带隙结构^[46] 使得不同能带区域中可能出现多种拓扑态, 从而为探索非厄米趋肤效应与高阶拓扑态的协同调控提供了新的可能性. 然而, 在非厄米条件下, Lieb 晶格中体态局域行为的

[†] 通信作者. E-mail: yangxs@ujs.edu.cn

* 江苏省自然科学基金资助 (批准号: BK20231320)

频率依赖性及其拓扑起源仍有待深入研究.

基于上述问题, 本文构建了非厄米 Lieb 光子晶体模型, 通过在光子晶体中引入空间分布的增益与损耗, 系统研究其能带结构、高阶拓扑角态及非厄米趋肤效应的空间分布特性. 研究表明, 该体系在多个光子带隙中均可支持稳定的高阶拓扑角态, 表现出多带隙高阶拓扑相. 进一步分析发现, 体态随频率变化由扩展态逐渐演化为局域态, 呈现出显著的频率依赖趋肤效应. 通过对复频谱结构的分析, 建立了能谱点隙拓扑结构与态局域方向之间的对应关系, 从拓扑角度揭示了非厄米趋肤效应的形成机制. 同时, 非厄米性还能够打破角态的简并性, 并实现其空间分布的有效调控. 本研究表明, 非厄米效应在高阶拓扑光子体系中具有重要的协同作用. 相关结果不仅深化了对非厄米拓扑物理的理解, 也为多频段、可调控拓扑光子器件的设计提供了新的理论依据.

2 非厄米 Lieb 晶格光子晶体的结构

本文研究基于二维 Lieb 晶格构建的光子晶体模型, 其结构构型如图 1(a) 所示. 该晶格由 A、B、C 三个子晶格构成, 遵循标准的 Lieb 晶格构型. 如图 1(b) 所示, 我们在原胞的介质柱中引入平衡的增益与损耗以实现非厄米调控. 介质柱的相对介电常数定义为 $\epsilon_r = 15 \pm i\gamma$, 其中 γ 代表非厄米强度. 此外, 通过沿 z 轴施加外部磁场可以打破时间反演对称性, 使相对磁导率呈张量形式^[47]:

$$\mu_r = \begin{bmatrix} \mu & i\kappa & 0 \\ -i\kappa & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 $\kappa = 14\mu_0$ 、 $\mu = 12.4\mu_0$, μ_0 为真空磁导率. 数值计算中, 设定晶格常数 $a = 1 \mu\text{m}$, 介质柱半径 $r = 0.07a$.

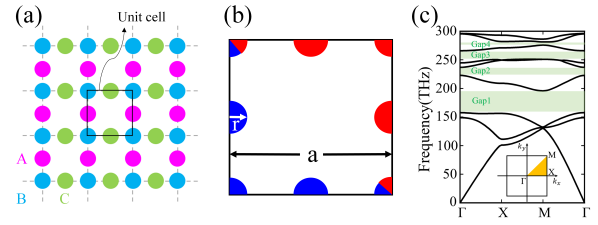


图 1 非厄米 Lieb 光子晶体能带结构 (a) 晶格结构示意图, 其中 A、B 和 C 对应三个子晶格; (b) 原胞结构放大图, 红色和蓝色区域分别代表增益与损耗介质; (c) 周期边界条件下的体能带结构, 插图为第一布里渊区 (Γ 、X、M 为高对称点), 绿色阴影表示光子带隙 (Gaps 1-4) .

Fig. 1. Band structure of non-Hermitian Lieb photonic crystals. (a) Schematic of the lattice consisting of three sublattices A, B, and C; (b) Geometry of the unit cell, where red and blue regions represent gain and loss, respectively; (c) Bulk band structure under periodic-boundary conditions; the inset shows the first Brillouin zone with the high-symmetry points Γ , X and M. Green shading denotes photonic band gaps (Gaps 1-4).

为阐述非厄米 Lieb 光子晶体的独特物理特性, 在不失一般性的情况下, 本文选取 $\gamma = 3$ 进行深入研究. 图 1(c) 展示了周期边界条件下沿第一布里渊区高对称路径 Γ -X-M- Γ 的能带结构. 结果表明, 体系中存在多个稳定的拓扑带隙 (Gaps 1-4), 这为后续探究拓扑边界态及高阶拓扑态提供了理想的频率区间. 上述及后文中的所有数值仿真均采用商用有限元软件包 COMSOL Multiphysics 完成.

3 非厄米 Lieb 晶格光子晶体的高阶拓扑态

3.1 多带隙拓扑角态

为探究非厄米 Lieb 光子晶体在开放边界条件下的拓扑特性, 我们构建了由 10×10 个原胞组成的有限尺寸超胞结构, 如图 2(a) 所示. 超胞的四周边界均被设置为开放边界条件, 并设置宽度为 $g = 0.12a$ 的空气间隙, 旨在抑制边界处的波反射对体态的干涉, 从而提升复频谱中局域态的辨识度^[46].

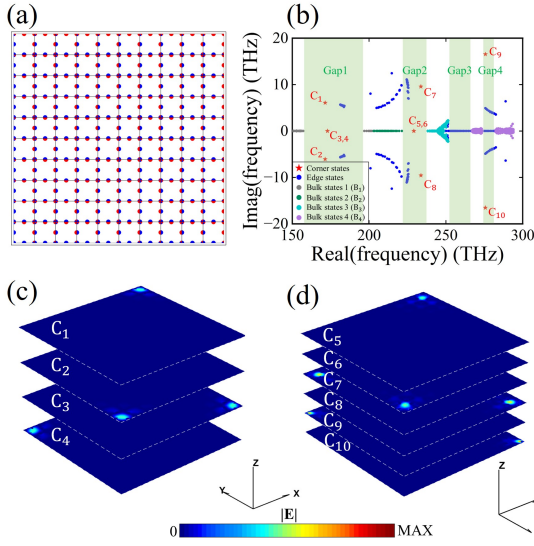


图 2 高阶拓扑角态 (a) 非厄米 Lieb 光子晶体超胞结构示意图, 由 10×10 个原胞阵列组成, 四周采用开放边界条件, 并设置空气间隙宽度为 $g = 0.12a$; (b) 超胞的复本征频谱. 图中分类标注了不同类型的本征态: 体态 (B_1 - B_4)、边界态 (蓝色圆点) 以及高阶拓扑角态 (红色五角星); 浅绿色阴影区域表示四个光子带隙; (c),(d) 分别对应 (b) 中红色五角星标记的高阶拓扑角态 C_1 - C_{10} 的本征模场空间分布.

Fig. 2. Higher-order topological corner states. (a) Schematic of the non-Hermitian Lieb photonic crystal supercell consisting of a 10×10 unit-cell array. Open-boundary conditions are applied to all boundaries with an air gap of width $g = 0.12a$; (b) Complex eigenfrequency spectrum of the supercell. Various eigenstates are categorized: bulk states (B_1 - B_4), edge states (blue circles), and higher-order topological corner states (red pentagrams). Light-green shaded regions indicate the four photonic band gaps; (c), (d) Spatial eigenmode field profiles of the corner states C_1 - C_{10} , corresponding to the red pentagrams in (b).

图 2(b) 展示了该非厄米超胞的复本征频谱. 依据本征态的波函数空间分布特征, 可将其划分为体态 (B_1 - B_4)、边界态 (蓝色圆点) 以及高阶拓扑角态 (红色五角星). 对应于系统的四个光子带隙 (浅绿色阴影区域), 高阶拓扑角态以离散点形式分布于带隙内, 在频谱上与体态及边界态实现了显著的分. 值得注意的是, 部分角态的本征频率为纯实数, 而其

余角态则以复共轭对的形式出现; 这表明非厄米效应打破了厄米系统原有的频率简并.

为进一步揭示角态的空间分布特征, 图 2(c), (d) 给出了图 2(b) 中角态 C_1 - C_{10} 的本征模场分布. 结果显示, 这些本征态均强烈局域于超胞的四个角落, 表现出典型的高阶拓扑特性. 与厄米体系中受对称性保护的四重简并角态不同, 非厄米性的引入诱导了角态在复频谱上的显著分化. 具体而言, 非厄米效应打破了频率简并, 使原本处于带隙中央的简并态演化为具有不同虚部的本征态. 同时, 每个角态仅局域于超胞的单一角落, 这表明非厄米性不仅能解除角态的频率简并, 还能够实现显著的拓扑空间模选择效应 [18].

此外, 该体系在多个光子带隙中均展现出稳定的拓扑角态. 这种多带隙结构不仅显著拓宽了拓扑态工作的频率范围, 为多频段局域模式的操控提供了更高的自由度.

3.2 拓扑边界态与频率依赖趋肤效应

在前述对高阶拓扑角态的讨论中, 我们阐明了非厄米性可以解除频率简并并实现空间模选择效应. 为进一步勾勒该体系的拓扑图景, 本节将研究范畴从零维角态扩展至一维边界态以及整体体态空间分布特征.

图 3(a)-3(c) 展示了在开放边界条件下, 一维拓扑边界态的归一化本征模场分布. 这些态对应于图 2(b) 中复本征频谱中虚部为正、负和零的本征态. 具体而言, 图 3(a) 与 3(b) 对应一对互为复共轭的本征频率, 其模场均局域于超胞边界, 并呈现明显的镜像对称性. 相比之下, 图 3(c) 所示边界态具有纯实本征频率, 其本征模场同样局域于边界.

与受能隙保护的拓扑边界态不同, 体态的空间分布表现出截然不同的行为. 在传统厄米体系中, 体态遵循布洛赫定理呈空间扩展分布; 但在本研究的非厄米 Lieb 光子晶体中, 大量体态表现出向超胞边界单向聚拢的特性, 即非厄米趋肤效应. 如图 3(d)-3(f) 所示, 该体系的非厄米趋肤效应呈现出独特的频率依赖性. 处于较低能带的体态 B_2 (图 3(d)) 仅表现出微弱的边界聚集趋势, 电场在超胞内部仍保持较强的扩展性, 表明在该频率区间内, 非厄米效应对态空间演化的主导作用尚不显著.

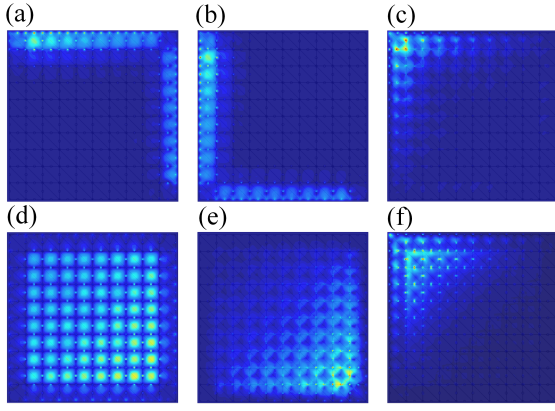


图 3 拓扑边界态与非厄米趋肤效应 (a)-(c) 对应图 2 (b) 中复本征频率的虚部为分别为正、负和零的一维边界态归一化本征模场分布；(d) 体态 B_2 仅表现出微弱的非厄米趋肤效应；(e) 体态 B_3 与 (f) B_4 展示了显著的非厄米趋肤效应。

Fig. 3. Topological edge states and non-Hermitian skin effects. (a)-(c) Normalized eigenmode field profiles of the one-dimensional edge states, corresponding to the complex eigenfrequencies in Fig. 2(b) with positive, negative, and zero imaginary parts, respectively; (d) The bulk state B_2 exhibits only a weak non-Hermitian skin effect; (e) Bulk states B_3 and (f) B_4 demonstrate significant non-Hermitian skin effects.

然而，随着本征频率升高至高能带，非厄米效应对体系性质的支配作用显著增强，导致体态 B_3 与 B_4 （图 3(e) 和 3(f)）表现出极强的趋肤局域化特征，其模场分别向右下与左上边界发生显著的单向堆积。这种从类布洛赫扩展态到强趋肤局域态的演化过程，揭示了体系内非厄米强度与能带结构之间的复杂耦合。上述结果表明，利用这种频率敏感的非厄米趋肤效应，可以在单一物理平台上实现光场局域程度与分布位置的精细调控，为设计多功能、频率选择性的非厄米光子器件提供了新的物理途径。

4 非厄米趋肤效应的物理机制

为了揭示该体系中非厄米趋肤效应的物理机制，我们构建了沿 x 方向施加周期边界条件、沿 y 方向施加开放边界条件 (PBC_x-OBC_y) 的带状超胞结构，并在其上、下边界处引入了宽度为 g 的空气间隙，如图 4(a) 所示。图 4(b) 展示了该带状结构沿 k_x 方向

的投影能带图。其中，灰色散点代表体态，红色曲线对应拓扑边界态，彩色点则标注了在 PBC_x-OBC_y 下呈现不同程度非厄米趋肤效应的体态。

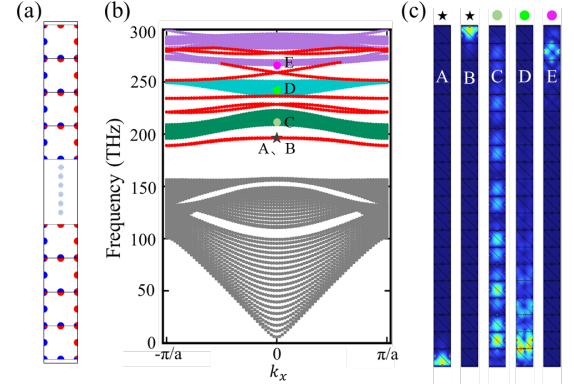


图 4 PBC_x-OBC_y 下非厄米光子晶体超胞的拓扑性质 (a) 带状超胞示意图，由 1×20 个原胞沿 y 方向阵列而成；(b) 沿 k_x 方向的投影能带结构，其中灰色散点、红色曲线及彩色散点分别对应体态、拓扑边界态以及具有非厄米趋肤效应的体态；(c) 图 (b) 中标记点 A-E 对应的本征模场空间分布。

Fig. 4. Topological properties of the non-Hermitian photonic crystal supercell with PBC_x-OBC_y . (a) Schematic of the ribbon supercell consisting of a 1×20 array of unit cells along the y -direction; (b) Projected band structure along the k_x direction; gray dots, red curves, and colored dots denote bulk states, topological edge states, and bulk states exhibiting the non-Hermitian skin effect, respectively; (c) Spatial distributions of the eigenmode fields corresponding to points A-E marked in (b).

首先，在拓扑带隙区域可以观察到多条拓扑边界态。以最低频率附近的一对边界态为例，其结论具有普适性。如图 4(b) 所示，两条边界态上的代表点分别标记为 A 和 B，它们的本征频率互为复共轭。其对应的本征模场分布（图 4(c)）显示，态 A 主要局域于超胞下边界，而态 B 则局域于上边界。

随着频率进一步升高，体态逐渐表现出非厄米趋肤效应。在第一与第二带隙之间的体态中，标记为 C 的本征模仅表现出较弱的非厄米趋肤效应，其模场分布开始向边界方向轻微偏移。进入更高频带后，非厄米趋肤效应显著增强，如标记点 D 和 E 的所示：D 态强烈局域于下边界，而 E 态则主要聚集于上边界，呈现出明显的方向选择性。图 4(c) 进一步

对比了 A-E 态的模场特征, 揭示了拓扑边界态与趋肤体态在不同频段的共存现象, 且非厄米趋肤效应强度随频率展现出由弱到强的连续演化特性.

非厄米趋肤效应的物理起源可以追溯到体系在周期边界条件下复本征频谱所具有的点隙拓扑结构. 这种拓扑性质通常通过缠绕数 $W(k_x, f_0)$ 刻画. 当该拓扑不变量为非零值时, 根据非厄米趋肤效应的非布洛赫体边对应关系, 大量体态将在开放边界条件下向系统边界聚集. 对于给定的实频率参考点 f_0 , 沿波矢 k_y 方向的缠绕数定义为:

$$W(k_x, f_0) = \oint_0^{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial k_y} \log \det[H(k_x, k_y) - f_0], \quad (2)$$

缠绕数 W 的几何意义可通过复本征频谱在复平面内的轨迹直观理解. 当波矢 k_y 扫过整个布里渊区时, 在周期边界条件下得到的本征频率将形成一条复频率轨迹, 并可能围绕参考频率 f_0 形成闭合环路. 根据非布洛赫体边对应关系, 非零的缠绕数意味着体系在 y 方向具有非平庸的点隙拓扑, 导致体态在开放边界条件下向特定边界发生空间聚集.

这一内在关联在该非厄米 Lieb 光子晶体中得到了完美验证. 在 $k_x = \pi/a$ 处, 我们对比了周期边界条件 (灰色点) 与 OBC_y (彩色点) 下的复本征频谱, 如图 5(a) 所示. 在周期边界条件下, 本征频率形成了围绕特定参考频率的闭合回路, 其缠绕数分别为 $W = +1$ 与 $W = -1$. 该拓扑不变量直接锁定了 OBC_y 下体态的局域方向: 当 $W = +1$ 时, 体态向上边界聚集; 当 $W = -1$ 时, 体态向下边界局域.

为验证上述拓扑预测, 图 5(b) 和 5(c) 分别给出了两个典型频率区间的归一化本征模场分布. 在 249-252 THz 区间 ($W = -1$), 模场显著向超胞下边界聚集; 而在 270-294 THz 区间 ($W = +1$), 模场转而向上边界局域. 数值仿真结果与点隙拓扑预测的趋肤方向完全吻合. 这表明, 非厄米趋肤效应的产生源于体系复本征频谱所具有的非平庸点隙拓扑结构. 缠绕数 W 在周期边界条件下的能谱拓扑与开放边界条件下的体态分布之间建立了明确的因果对应, 直接锁定了开放边界条件下体态的局域方位, 从拓扑本质上揭示了非厄米趋肤效应的形成机制.

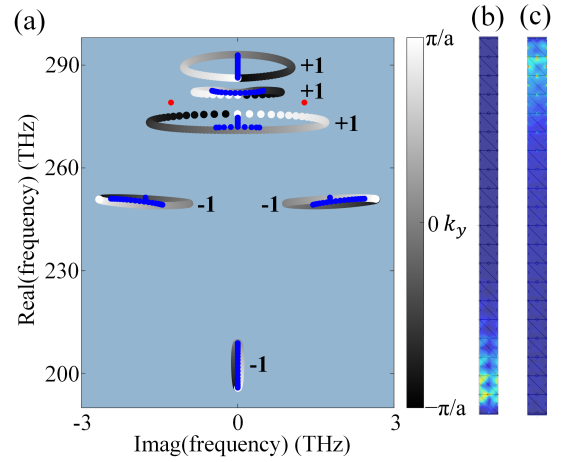


图 5 周期边界条件下本征频谱的点隙拓扑 (a) 对应图 4(b) 中 $k_x = \pi/a$ 处的复本征频谱, 其中灰色和彩色散点分别代表周期边界条件与 OBC_y 条件下的本征频率; (b, c) 分别为频率位于 249-252 THz 和 270-294 THz 区间的归一化本征模场分布.

Fig. 5. Point-gap topology of the eigenfrequency spectrum under periodic-boundary conditions. (a) Complex eigenfrequency spectrum at $k_x = \pi/a$ [referring to Fig. 4(b)], where gray and colored dots represent the eigenfrequencies under periodic-boundary conditions and OBC_y , respectively; (b, c) Normalized eigenmode field profiles in the frequency ranges of 249-252 THz and 270-294 THz, respectively.

5 结论

本文系统研究了非厄米 Lieb 光子晶体中的角局域态、边界态与非厄米趋肤效应. 研究发现, 通过引入平衡增益损耗, 该体系在多个带隙附近可支持表现为实频率或复共轭频率的角局域态与一维边界态. 进一步分析表明, 体态分布随频率发生明显演化, 可由较弱边界聚集逐渐转变为强局域非厄米趋肤效应. 通过投影能带与复频谱点隙拓扑分析, 本文建立了点隙缠绕数与体态局域方向之间的对应关系, 从点隙拓扑角度阐明了非厄米趋肤效应的形成机制. 尽管本文以 Lieb 光子晶体为具体平台, 但所揭示的频率依赖非厄米趋肤效应具有一定普适性, 可推广至多种光子晶体结构. 未来通过引入额外空间对称性调控, 有望实现趋肤效应在拓扑边界子空间中的选

择性投影, 从而进一步探索拓扑态与非厄米趋肤效应的杂化行为^[48,49]. 本研究不仅深化了对非厄米高阶拓扑物理的理解, 也为设计基于频率调控的新型拓扑光子器件提供了理论支撑.

参考文献

- [1] Zeuner J M, Rechtsman M C, Plotnik Y, Lumer Y, Nolte S, Rudner M S, Segev M, Szameit A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 040402
- [2] Leykam D, Bliokh K Y, Huang C, Chong Y D, Nori F 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 040401
- [3] Lee J Y, Ahn J, Zhou H, Vishwanath A 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 206404
- [4] Song F, Yao S, Wang Z 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 246801
- [5] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
- [6] Hu Y M, Song F, Wang Z 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 230307 (in Chinese) [胡渝民, 宋飞, 汪忠 2021 物理学报 **70** 230307]
- [7] Ji X, Geng H, Akhtar N, Yang X 2025 *Phys. Rev. B* **111** 195419
- [8] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [9] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, Musslimani Z H, Rotter S, Christodoulides D N 2018 *Nat. Phys.* **14** 11
- [10] Yao S, Song F, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 136802
- [11] Yokomizo K, Murakami S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 066404
- [12] Pan L, Chen X, Chen Y, Zhai H 2020 *Nat. Phys.* **16** 767
- [13] Li Y, Ji X, Chen Y, Yan X, Yang X 2022 *Phys. Rev. B* **106** 195425
- [14] Ji X, Ding W, Chen Y, Yang X 2024 *Phys. Rev. B* **109** 125420
- [15] Ji X, Yang X 2024 *J. Phys.: Condens. Matter* **36** 243001
- [16] Zhao H, Qiao X, Wu T, Midya B, Longhi S, Feng L 2019 *Science* **365** 1163
- [17] Li X, Liu Y, Lin Z, Ng J, Chan C T 2021 *Nat. Commun.* **12** 6597
- [18] Wang Q, Qian J, Jiang L 2023 *Opt. Express* **31** 5363
- [19] Reisenbauer M, Rudolph H, Egyed L, Hornberger K, Zasedatelev A V, Abuzarli M, Stickler B A, Delić U 2024 *Nat. Phys.* **20** 1629
- [20] Zheng X, Jalali Mehrabad M, Vannucci J, Li K, Dutt A, Hafezi M, Mittal S, Waks E 2024 *Nat. Commun.* **15** 10881
- [21] Yang X, Feng Y, Wahab A, Geng H 2026 *Phys. Rev. A* **113** 023506
- [22] Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, Bergholtz E J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 026808
- [23] Feng L, El-Ganainy R, Ge L 2017 *Nat. Photonics* **11** 752
- [24] Öztürk F E, Lappe T, Hellmann G, Schmitt J, Klaers J, Vewinger F, Kroha J, Weitz M 2021 *Science* **372** 88
- [25] Song F, Yao S, Wang Z 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 170401
- [26] Li L, Lee C H, Mu S, Gong J 2020 *Nat. Commun.* **11** 5491
- [27] Scheibner C, Irvine W T M, Vitelli V 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 118001
- [28] Zhang X, Tian Y, Jiang J H, Lu M H, Chen Y F 2021 *Nat. Commun.* **12** 5377
- [29] Zhang K, Yang Z, Fang C 2022 *Nat. Commun.* **13** 2496
- [30] Li Z, Wang L W, Wang X, Lin Z K, Ma G, Jiang J H 2024 *Nat. Commun.* **15** 6544
- [31] Gliozzi J, De Tomasi G, Hughes T L 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 136503
- [32] Zhao E, Wang Z, He C, Poon T F J, Pak K K, Liu Y J, Ren P, Liu X J, Jo G B 2025 *Nature* **637** 565
- [33] Shen R, Chen T, Yang B, Lee C H 2025 *Nat. Commun.* **16** 1340
- [34] Wang S, Wang B, Liu C, Qin C, Zhao L, Liu W, Longhi S, Lu P 2025 *Phys. Rev. Lett.* **134** 243805
- [35] Wu J, Hu Y, He Z, Deng K, Huang X, Ke M, Deng W, Lu J, Liu Z 2025 *Phys. Rev. Lett.* **134** 176601
- [36] Zhang Q, Xiong L, Tong S, Qiu C 2026 *Nat. Commun.* **17** 2198
- [37] Yan Z B 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 226101 (in Chinese) [严忠波 2019 物理学报 **68** 226101]
- [38] Rangi C, Tam K M, Moreno J 2024 *Phys. Rev. B* **109** 064203
- [39] Li L, Wei Y, Wu G, Ruan Y, Chen S, Lee C H, Ni Z 2025 *Phys. Rev. B* **111** 075132

- [40] Shi A, Bao L, Peng P, Ning J, Wang Z, Liu J 2025 *Phys. Rev. B* **111** 094109
- [41] Diebel F, Leykam D, Kroesen S, Denz C, Desyatnikov A S 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 183902
- [42] Mukherjee S, Spracklen A, Choudhury D, Goldman N, Öhberg P, Andersson E, Thomson R R 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 245504
- [43] Vicencio R A, Cantillano C, Morales-Inostroza L, Real B, Mejía-Cortés C, Weimann S, Szameit A, Molina M I 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 245503
- [44] Xia S, Ramachandran A, Xia S, Li D, Liu X, Tang L, Hu Y, Song D, Xu J, Leykam D, Flach S, Chen Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 263902
- [45] Chang Y J, Lu Y H, Wang Y, Xu X Y, Zhou W H, Cui W H, Wang X W, Gao J, Qiao L F, Jin X M 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 110501
- [46] Xiong Z K, Liu Y, Fan X, Zhou B 2026 *New J. Phys.* **28** 055001
- [47] Zhu W, Gong J 2023 *Phys. Rev. B* **108** 035406
- [48] Lee C H, Li L, Gong J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 016805
- [49] Zou D, Chen T, He W, Bao J, Lee C H, Sun H, Zhang X 2021 *Nat. Commun.* **12** 7201

Higher-order topological states and frequency-dependent skin effect in non-Hermitian Lieb photonic crystals*

YANG Xiaosen[†] CHEN Zhangyuan FENG Yaru

(*School of Physics and Electronic Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

Abstract

The introduction of gain and loss into non-Hermitian systems can induce topological phenomena distinct from those in Hermitian systems, among which the non-Hermitian skin effect and higher-order localized states have attracted broad attention. In this work, we investigate a non-Hermitian Lieb photonic crystal with spatially distributed gain and loss, and systematically study its band structure and topological properties. Finite-element calculations of the complex band structure and finite-supercell eigenmodes, together with a point-gap winding-number analysis, are used to examine the topological properties and non-Hermitian skin effect of the photonic crystal. The results show that higher-order corner-localized states can appear in multiple photonic band gaps, exhibiting multi-gap localization features. As the frequency varies, bulk states gradually evolve from extended states to localized states, showing a pronounced frequency-dependent non-Hermitian skin effect. By analyzing the point-gap topology of the complex eigenfrequency spectrum, we establish a direct topological connection between spectral topology and the non-Hermitian skin effect in Lieb photonic crystals. The results indicate that the sign of the winding number is associated with the boundary toward which the bulk states accumulate, offering an interpretation

[†] Corresponding author. E-mail: yangxs@ujs.edu.cn

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (Grant No. BK20231320).

of the frequency-dependent skin localization. In addition, the introduction of non-Hermiticity lifts the degeneracy of corner states and enables effective control of their spatial distributions. Our results indicate that the lattice geometry of the Lieb lattice is favorable for realizing multi-gap higher-order topological phases and frequency-dependent skin effects, providing a physical basis for the design of multifunctional topological photonic devices.

Keywords: Non-Hermitian; Photonic crystal; Higher-order topological states; Non-Hermitian skin effect

录用稿件，非最终出版稿