

随机驱动 Kerr 谐振子的非平衡能量与光子输运 *

陆钰炜 陈逸甜 刘焕 王晨[†]

(浙江师范大学物理系, 浙江金华 321004)

非平衡量子输运是量子热力学与非平衡物理的交叉领域核心课题之一, 其中非线性光学腔中能量与光子流的调控对量子器件设计具有重要意义. 本文研究随机场驱动下 Kerr 非线性谐振子的非平衡输运性质. 通过在 Kerr 非线性项中引入随机涨落, 建立随机驱动 Kerr 谐振子模型, 并在弱系统-环境耦合条件下推导随机平均后的量子主方程. 基于 Matsubara 频率展开方法, 将非相干跃迁速率中的积分项分解为真空项, 高温项和量子项, 从而解析阐明非平衡交互的物理过程并提高计算效率. 非线性驱动因为能量输入过程引入跃迁通道的依赖性, 与线性驱动相比在强驱动区域更有利于能量输运. 研究表明, 驱动输入能流随热库温差和驱动强度增大而增强, 而 Kerr 非线性会抑制能量注入. 进一步分析发现, 光子流由于随机驱动增强受到抑制, Kerr 谐振子的有效温度升高形成温度壁垒, 阻碍了光子流的定向输运. 但在强随机驱动和强 Kerr 非线性下, 高激发态的有效参与可以增强光子流. 本文结果可为随机驱动量子输运调控和量子器件设计提供理论参考.

关键词: 量子能量输运, 量子主方程, 随机驱动, 开放量子系统

PACS: 05.60.-k, 42.50.Lc, 02.50.-r, 03.65.Yz

1 引言

量子输运基于量子力学与开放系统框架来研究物质, 能量与信息如何在量子系统中的流动^[1-4]. 与经典扩散输运不同, 量子输运深刻体现了隧穿, 量子相干与纠缠等纯量子效应, 并因离散能级结构而展现出显著的非经典响应特征^[5-7]. 非平衡量子输运是量子热力学, 量子光学与凝聚态物理学交叉领域的前沿课题^[8-10], 致力于探索量子系统在非平衡条件下的交换机制. 具体而言, 非平衡输运过程是由外部热力学差

[†] Corresponding author. E-mail: wangchen@zjnu.cn

* 浙江省自然科学基金 (批准号: LZ25A050001) 资助的课题.

(温度梯度, 电压差) [3,11–13], 含时驱动 [14–18] 或量子关联 [19,20] 打破系统平衡, 产生可观测物理量 (如热能) 产生定向净流及其涨落的物理过程 [21].

在量子光学系统中, 量子能量输运的研究近来受到了显著地关注 [8,22–26]. 光子作为能量与信息的理想载体, 其非平衡流动行为影响着光量子芯片 [23], 量子网络 [27,28] 及精密量子感知 [29] 的性能上限. 特别在非线性光学微腔中 [30–33], 对光子输运的精准调控是实现单光子路由 [27,34], 非经典光源制备 [35,36] 等核心功能的先决条件. 与此同时, 量子热力学致力于在微纳尺度下深入理解热机、制冷机和热泵等量子热器件的输运工作原理 [37]. 研究表明, 量子相干性, 压缩效应等要素可显著提升热机效率或制冷功率, 甚至有望突破经典热力学的理论边界 [38–40]. 因此, 深入理解量子光学体系中非平衡输运过程, 为设计量子热阀 [23], 量子热二极管 [24], 量子热晶体管 [41–43], 量子热泵 [17,44] 及量子电池 [45] 等下一代量子能量器件提供了关键的理论指导.

含时驱动一直是开放量子系统非平衡输运中一个重要的主题 [46]. 当系统处于周期性含时驱动下, 其输运行为与静态情形存在根本性差异 [17]. 周期性驱动催生了量子输入 [16,47,48], 量子热机器 [49,50], 时间晶体 [51] 及驱动-耗散量子电池 [52,53] 等前沿成果. 在此类驱动下, 系统打破细致平衡条件 [16], 驱动流甚至表现出逆热力学差流动 [54], 抑制噪声 [55] 等反常特征, 赋予系统远比静态输运更丰富的物理内涵. 当量子系统受到随机含时驱动时 [56,57], 随机含时涨落如何与离散能级, 量子相干性及微观散射过程耦合, 仍亟待系统性理解. 目前关于随机驱动的稳恒态量子输运研究多以二能级系统为典型 [13,58]. 其中在两端口体系中, 通过唯象调制两个热库的特征频率呈现出显著差异, 可以发现稳恒态泵浦特征. 但是现有解析工作主要停留在唯象处理系统-环境耦合与采用极端谱特征下 (例如 Einstein 单模) [13], 缺乏描述随机场如何调制量子跃迁速率的一般性解析表达式, 且难以从微观层面揭示可能存在的微观物理过程 (例如非弹性散射).

本文系统研究随机场驱动下 Kerr 非线性谐振子的非平衡能量输运. Kerr 非线性谐振子是研究非平衡交互过程的一类典型量子光学体系 [61]. Kerr 谐振子近来在耗散量子相变 [59,60], 量子时间晶体 [51], Kerr 频率梳 [62] 等前沿方向得到了广泛的研究. 在量子输运研究中, 单个 Kerr 谐振子在双端热库偏置下的非平衡稳态输运行为会展现出标度特征与能流的整流效应 [63,64]. 在耦合 Kerr 谐振子阵列中则可以观察到 Thouless 泵浦行为 [65]. 而在本文中, 随机驱动作用于谐振子的 Kerr 非线性项时, 能级间距将受随机过程非线性调制. 进而可能影响系统的非相干跃迁与能流分配. 在此复杂情况下, 随机驱动如何与系统非线性协同作用影响热流, 以及其中量子效应对总能流的具体贡献, 是个值得探索的问题. 本文旨在通过建立解析

与数值结合的分析方式, 重点探讨随机涨落如何调制 Kerr 谐振子与热库间的能量交换特征. 文中揭示了 Matsubara 频率展开下真空项, 高温极限项, 有限温量子项在非线性与低温区间对能量输运和光子输运过程的作用. 并定量分析了驱动输入能流 J_P , Kerr 谐振子系统与热库之间的能量交换 J_l , J_r 及光子流 I_r 对驱动强度 γ , 非线性强度 U_0 及温度偏差 ΔT 的依赖行为.

2 模型与方法

2.1 非平衡 Kerr 谐振子模型

耗散 Kerr 谐振子已经在量子光学 [60,62], 量子临界 [59], 精密测量 [51] 等领域得到了广泛的研究. 本文考虑一个受随机场驱动的 Kerr 非线性谐振子与两热库独立耦合的体系, 如图 1(a) 所示. 非平衡系统的总哈密顿量表示为

$$\hat{H} = \hat{H}_s(t) + \sum_{\mu=l,r} (\hat{H}_B^\mu + \hat{V}_\mu). \quad (1)$$

Kerr 谐振子系统的哈密顿量为 (全文设置 $\hbar = 1$)

$$\hat{H}_s(t) = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + (U_0 + \delta U(t)) (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2. \quad (2)$$

其中 $\hat{a}^\dagger$ 与 $\hat{a}$ 分别是光子的产生算符和湮灭算符, ω_0 为单模光子的频率, U_0 表示 Kerr 静态作用强度, $\delta U(t)$ 为随机驱动项, 对应的时间关联函数为

$$\langle \delta U(t) \delta U(\tau) \rangle = \gamma \delta(t - \tau), \quad (3)$$

γ 表示非线性作用的强度. 两个玻色热库的哈密顿量分别为 $\hat{H}_B^\mu = \sum_k \omega_{k,\mu} b_{k,\mu}^\dagger b_{k,\mu}$, $b_{k,\mu}^\dagger (b_{k,\mu})$ 是第 μ 个热库中频率为 $\omega_{k,\mu}$ 的玻色模的产生 (湮灭) 算符. 系统-热库相互作用为 $\hat{V}_\mu = \sum_k (g_{k,\mu} \hat{b}_{k,\mu}^\dagger + g_{k,\mu}^* \hat{b}_{k,\mu}) \hat{A}$, 其中系统算符取为 $\hat{A} = \hat{a}^\dagger + \hat{a}$, 耦合常数为 $g_{k,\mu}$. 玻色子热库由谱函数表征 $\kappa_\mu(\omega) = 2\pi \sum_k |g_{k,\mu}|^2 \delta(\omega - \omega_{k,\mu})$. 本文采用 Ohmic-Drude 型谱函数 $\kappa_\mu(\omega) = \alpha_\mu \omega / [1 + (\omega/\omega_c)^2]$ [66], 其中 α_μ 为耗散强度, ω_c 为截止频率. 对于 Kerr 谐振子, 在 Fock 基矢下 $\{|n\rangle\}$, 系统哈密顿量是可以直接对角的. 对应的本征能量方程为

$$\hat{H}_s(t)|n\rangle = [E_n + \delta U(t)n(n-1)]|n\rangle, \quad (4)$$

$E_n = \omega_0 n + U_0 n(n-1)$ 为非含时部分.

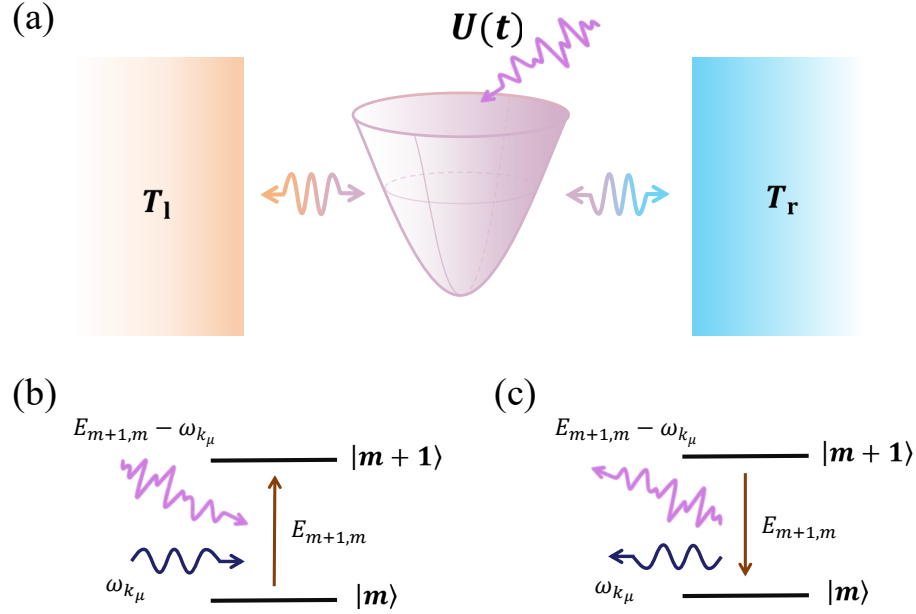


图 1 (a) 随机场驱动的 Kerr 非线性谐振子模型示意图. 中间的量子系统为 Kerr 谐振子, 随机驱动作用在 Kerr 非线性项上. 左右两侧为两个独立的玻色子热库, 平衡态下的温度分别为 T_l 与 T_r . 图 (b) 和 (c) 则基于公式 (15), 描述在 Fock 态 $|m\rangle$ 和 $|m+1\rangle$ 之间进行非相干跃迁的能量非弹性散射行为. 其中图 (b) 对应能量跃迁速率 $\Gamma_{e,\mu}^+(E_{m+1,m})$, 描述谐振子从 $|m\rangle$ 激发到 $|m+1\rangle$ 过程中, μ 热库提供能量 $\omega_{k,\mu}$, 同时随机驱动端补偿剩余的 $E_{m+1,m} - \omega_{k,\mu}$; 图 (c) 对应跃迁速率 $\Gamma_{e,\mu}^-(E_{m+1,m})$, 描述 $|m+1\rangle$ 弛豫到 $|m\rangle$ 过程中, μ 热库吸收能量 $\omega_{k,\mu}$, 同时随机驱动端吸收剩余的 $E_{m+1,m} - \omega_{k,\mu}$.

Fig. 1. A schematic description of the Kerr nonlinear resonator model driven by a stochastic field. The middle quantum system denotes the Kerr nonlinear resonator, with the stochastic driving acting on the Kerr nonlinear term. Two independent bosonic thermal reservoirs are located at two sides, with temperatures characterized by T_l and T_r , respectively. Based on Eq. (15), the incoherent inelastic scattering processes corresponding to transitions between the Fock states $|m\rangle$ and $|m+1\rangle$ are characterized by the transition rates (b) $\Gamma_{e,\mu}^+(E_{m+1,m})$, describing the excitation process from $|m\rangle$ to $|m+1\rangle$, where the μ thermal reservoir provides energy $\omega_{k,\mu}$ while the stochastic driving compensates the remaining energy $E_{m+1,m} - \omega_{k,\mu}$; and (c) $\Gamma_{e,\mu}^-(E_{m+1,m})$, describing the relaxation process from $|m+1\rangle$ to $|m\rangle$, where the μ thermal reservoir absorbs energy $\omega_{k,\mu}$ while the stochastic driving absorbs the remaining energy $E_{m+1,m} - \omega_{k,\mu}$.

2.2 量子主方程

在弱系统-热库耦合情况下, 采用 Born-Markov 近似推导非平衡 Kerr 谐振子系统的耗散运动方程. 在相互作用绘景中, 非线性谐振子系统的约化密度矩阵运动方程为 [66]

$$\frac{d\hat{\rho}_{s,I}(t)}{dt} = - \sum_{\mu} \int_0^{\infty} d\tau \text{Tr}_B \left\{ [\hat{V}_{\mu}(t), [\hat{V}_{\mu}(t-\tau), \hat{\rho}_{s,I} \otimes \hat{\rho}_B]] \right\}, \quad (5)$$

其中热库的平衡态密度矩阵为 $\hat{\rho}_B = \Pi_{\mu=l,r} [\exp(-\beta_{\mu} \hat{H}_B^{\mu}) / \mathcal{Z}_{\mu}]$, 逆温度为 $\beta_{\mu} = 1/k_B T_{\mu}$, 以及配分函数为 $\mathcal{Z}_{\mu} = \text{Tr}\{\exp(-\beta_{\mu} \hat{H}_B^{\mu})\}$. 由于 $\hat{H}_s(t)$ 在 Fock 态基矢下是对角的, 因此 $\hat{A}(t)$ 可以等价表述为 $\hat{A}(t) = \sum_{m,m'} e^{iE_{mm'}t + i\delta_{mm'}(t)} \langle m | \hat{A} | m' \rangle |m\rangle \langle m'|$, 其中能级差为 $E_{mm'} = E_m - E_{m'}$, 随机相位表示为

$$\delta_{mm'}(t) = [m(m-1) - m'(m'-1)] \int_0^t d\tau \delta\omega(\tau). \quad (6)$$

在之前的研究工作中, 随机相位与粒子激发数无关 [13]. 而本文的随机相位显著依赖于光子激发数, 这使得驱动导致的能级间距扩展不均匀. 进一步, 注意到 $\langle m | \hat{A} | m' \rangle$ 的非零元仅出现在约束条件 $m = m' \pm 1$ 中. 对于噪声, 随机相位的系综平均给出 $\langle e^{i\delta(t)} \rangle = \exp(-\gamma_{mm'}t/2)$, 其中随机过程引起展宽系数

$$\gamma_{mm'} = [m(m-1) - m'(m'-1)]^2 \gamma. \quad (7)$$

因此随机平均后的系统算符表述为

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \sum_{m,m'} e^{iE_{mm'}t - \gamma_{mm'}t/2} \langle m | \hat{A} | m' \rangle |m\rangle \langle m'|. \quad (8)$$

经过长时间演化后, 约化谐振子系统的动力学方程简化为

$$\frac{d\langle \hat{\rho}_{s,I} \rangle}{dt} = \sum_{m,m',\mu} \mathcal{L}_{m,m',\mu}^{\mu} [\langle \hat{\rho}_{s,I} \rangle], \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m,m',\mu}^{\mu} [\langle \hat{\rho}_{s,I} \rangle] = & [G_{\mu}^{-}(E_{m'm}) |m\rangle \langle m'| \langle \hat{\rho}_{s,I} | m'\rangle \langle m| \\ & - G_{\mu}^{+}(E_{m'm}) |m\rangle \langle m| \langle \hat{\rho}_{s,I} \rangle] + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (9b)$$

量子主方程中的有效速率 $G_{\mu}^{\pm}$ 定义为

$$G_{\mu}^{\pm}(E_{m',m}) = |\langle m | \hat{A} | m' \rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \kappa_{\mu}(\pm\omega) \frac{n_{\mu}(\pm\omega)}{\gamma_{m'm}/2 + i(E_{m',m} - \omega)}, \quad (10)$$

这里非零跃迁耦合系数 $\langle m | \hat{A} | m' \rangle = \sqrt{m} \delta_{m,m'+1} + \sqrt{m'} \delta_{m,m'-1}$, $n_{\mu}(\omega) = 1/(e^{\beta_{\mu}\omega} - 1)$ 为玻色-爱因斯坦分布函数. 通过方程 (9a) 可以发现, 有效速率 $G_{\mu}^{\pm}$ 的实部 $\Gamma_{\mu}^{\pm}(E_{m',m}) = 2\text{Re}\{G_{\mu}^{\pm}(E_{m',m})\}$ 决定了布居数的动

力学. Kerr 谐振子系统在 Fock 态下布居数 $P_{m,\sigma}$ 的演化方程为

$$\frac{dP_m}{dt} = \sum_{m',\mu} \left[\Gamma_{\mu}^{-}(E_{m',m}) P_{m'} - \Gamma_{\mu}^{+}(E_{m',m}) P_m \right], \quad (11)$$

其中非相干跃迁速率为

$$\Gamma_{\mu}^{\pm}(E_{m',m}) = |\langle m | \hat{A} | m' \rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\pm \alpha_{\mu} \omega}{1 + (\omega/\omega_c)^2} \frac{\gamma_{m'm} n_{\mu}(\pm\omega)}{(\gamma_{m'm}/2)^2 + (E_{m',m} - \omega)^2}. \quad (12)$$

2.3 能流与光子流定义

根据能量守恒定律, 在稳态下系统的内能不再随时间变化, 因此从系统流入左侧热库和右侧热库的净能量流之和等于驱动给系统的能量流. 因此, 随机驱动涌入系统的能量流 J_P 可表示为系统与两个热库之间能量交换的代数和

$$J_P = J_l + J_r. \quad (13)$$

正如公式 (12) 所描述的, 随机驱动的作用在于通过微观的调制系统和环境的非弹性能量交互过程, 直接影响系统流入热库和驱动端口的能量流. 基于能量交互过程分析, 从系统流入左侧热库 ($\mu = l$) 和右侧热库 ($\mu = r$) 的能量流分别定义为

$$J_l = \sum_{m,m'} \theta(E_{m',m}) \left[\Gamma_{e,l}^{-}(E_{m',m}) P_{m'} - \Gamma_{e,l}^{+}(E_{m',m}) P_m \right], \quad (14a)$$

$$J_r = \sum_{m,m'} \theta(E_{m',m}) \left[\Gamma_{e,r}^{-}(E_{m',m}) P_{m'} - \Gamma_{e,r}^{+}(E_{m',m}) P_m \right], \quad (14b)$$

其中 P_m 为系统处于 Fock 态 $|m\rangle$ 的概率, $\theta(E)$ 为 Heaviside 阶跃函数. 表达式 (14a) 与 (14b) 中的能量有效跃迁速率

$$\Gamma_{e,\mu}^{\pm}(E_{m',m}) = |\langle m | \hat{A} | m' \rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\pm \alpha_{\mu} \omega^2}{1 + (\omega/\omega_c)^2} \frac{\gamma_{m'm} n_{\mu}(\pm\omega)}{(\gamma_{m'm}/2)^2 + (E_{m',m} - \omega)^2}. \quad (15)$$

这里非相干跃迁速率 $\Gamma_{e,\mu}^{\pm}(E_{m',m})$ 展示了能量的非弹性散射过程. 具体而言, $\Gamma_{e,\mu}^{+}(E_{m',m})$ 可以描述 Kerr 谐振子从 $|m\rangle$ 向上激发到 $|m'\rangle$ 时, μ 热库提供 $\omega_{k,\mu}$ 能量, 而随机作用端则补偿剩余的 $E_{m',m} - \omega_{k,\mu}$, 例如如图 1(b) 所示. 而 $\Gamma_{e,\mu}^{-}(E_{m',m})$ 刻画了谐振子从 $|m'\rangle$ 向下弛豫到 $|m\rangle$ 时, 向 μ 热库释放 $\omega_{k,\mu}$ 能量, 而随机作用端则吸收剩余的 $E_{m',m} - \omega_{k,\mu}$, 如图 1(c) 所示. 而当随机作用消失时, 能量跃迁速率退化为 $\Gamma_{e,\mu}^{+}(E_{m+1,m}) = (m+1)E_{m+1,m}\kappa_{\mu}(E_{m+1,m})n_{\mu}(E_{m+1,m})$ 和 $\Gamma_{e,\mu}^{-}(E_{m+1,m}) = (m+1)E_{m+1,m}\kappa_{\mu}(E_{m+1,m})[1+n_{\mu}(E_{m+1,m})]$ [63]. 需要指出的是, 这里的量子主方程推导已经考虑了 Born-Markov 近似. 所以热库的截止

频率 ω_c 需要远大于系统的本征能级. 因此, 我们没法像引文 [15] 那样, 通过调节一个热库截止频率小于系统本征能级, 来实现随机泵浦效应.

而对于光子流, 可以基于耗散方程 (11) 与光子数运动方程 $d\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle/dt \equiv \sum_m m dP_m/dt = (I_l + I_r)$ 得到流出左, 右两端的光子流为

$$I_l = \sum_{m' > m} (m' - m) \left[\Gamma_l^+(E_{m',m}) P_m - \Gamma_l^-(E_{m',m}) P_{m'} \right], \quad (16a)$$

$$I_r = \sum_{m' > m} (m' - m) \left[\Gamma_r^+(E_{m',m}) P_m - \Gamma_r^-(E_{m',m}) P_{m'} \right]. \quad (16b)$$

光子流中的 $\Gamma_l^\pm(E_{m',m})$ 为光子数跃迁速率, 其表达式请见公式 (12). 需要说明的是, 这与公式 (15) 中的能量跃迁速率不同. 由于, 随机驱动本身不能注入光子, 所以稳恒态光子流满足粒子数守恒条件 $I_l + I_r = 0$.

需要说明的是, 基于耗散方程 (9a), 能量流 (13, 14a, 14b) 和光子流 (16a, 16b), 笔者具备研究 Kerr 谐振子瞬态输运行为的能力. 但是当前工作主要集中在稳恒态的输运特征上.

3 Matsubara 频率求和

众所周知, 直接对能量交互跃迁速率 (15) 进行数值积分缺乏物理优化与计算效率. 考虑到跃迁速率依赖温度和量子效应, 本文采用经典的 Matsubara 频率展开方法对跃迁速率进行分解. 需要指出, 这是本文的方法创新点之一. 玻色-爱因斯坦分布函数在 Matsubara 展开形式下为 $n_\mu(\omega) = \frac{1}{\beta_\mu\omega} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega}{\beta_\mu(\omega^2 + \nu_n^2)}$ [67], 其中 $\nu_n = 2\pi n/\beta_\mu$ 为第 n 个 Matsubara 频率. 将上述展开代入方程 (15), 能量跃迁速率可解析地表示为

$$\begin{aligned} \Gamma_{e,\mu}^\pm(E_{m',m}) = & |\langle m|\hat{A}|m'\rangle|^2 \left\{ \frac{\alpha\omega_c^2}{\beta} \frac{E_{m'm}}{E_{m'm}^2 + (\omega_c + \gamma_{m'm}/2)^2} \mp \frac{\alpha\omega_c^2}{2} \left[1 - \frac{\omega_c(\gamma_{m'm}/2 + \omega_c)}{E_{m'm}^2 + (\omega_c + \gamma_{m'm}/2)^2} \right] \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha\omega_c^2}{\beta} \frac{E_{m'm}}{E_{m'm}^2 + (\nu_n + \gamma_{m'm}/2)^2} \left[1 - \frac{\omega_c^2(\omega_c + \nu_n + \gamma_{m'm})}{[E_{m'm}^2 + (\omega_c + \gamma_{m'm}/2)^2](\omega_c + \nu_n)} \right] \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

其中等号右边大括号里的第一项表示高温极限贡献, 对应 $n_\mu(\omega)$ 的高温项 $1/(\beta_\mu\omega)$; 第二项为真空极限贡献, 对应 $-1/2$; 而第三项则为有限温量子贡献, 对应离散项 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega}{\beta_\mu(\omega^2 + \nu_n^2)}$. 类似的, 对于光子数跃迁速率 (12) 通过 Matsubara 频率求和方法可以简化为

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^\pm(E_{m',m}) = & |\langle m|\hat{A}|m'\rangle|^2 \left\{ \frac{\alpha_\mu\omega_c}{\beta_\mu} \frac{\gamma_{m'm}/2 + \omega_c}{E_{m'm}^2 + (\omega_c + \gamma_{m'm}/2)^2} \mp \frac{\alpha_\mu\omega_c^2}{2} \frac{E_{m'm}}{E_{m'm}^2 + (\omega_c + \gamma_{m'm}/2)^2} \right. \\ & \left. + \frac{2\alpha_\mu\omega_c^2}{\beta_\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\omega_c + \nu_n + \gamma_{m'm}/2)E_{m'm}^2 + (\gamma_{m'm}/2)(\omega_c + \gamma_{m'm}/2)(\nu_n + \gamma_{m'm}/2)}{(\omega_c + \nu_n)[E_{m'm}^2 + (\omega_c + \gamma_{m'm}/2)^2][E_{m'm}^2 + (\nu_n + \gamma_{m'm}/2)^2]} \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

上述两个表达式将复杂的频率积分转化为快速 Matsubara 频率求和, 使得物理计算过程变得清晰. 在实际计算过程中, 求和截断数取为 $N_{\text{tr}} = 5 \times 10^4$, 足以保证跃迁速率快速收敛.

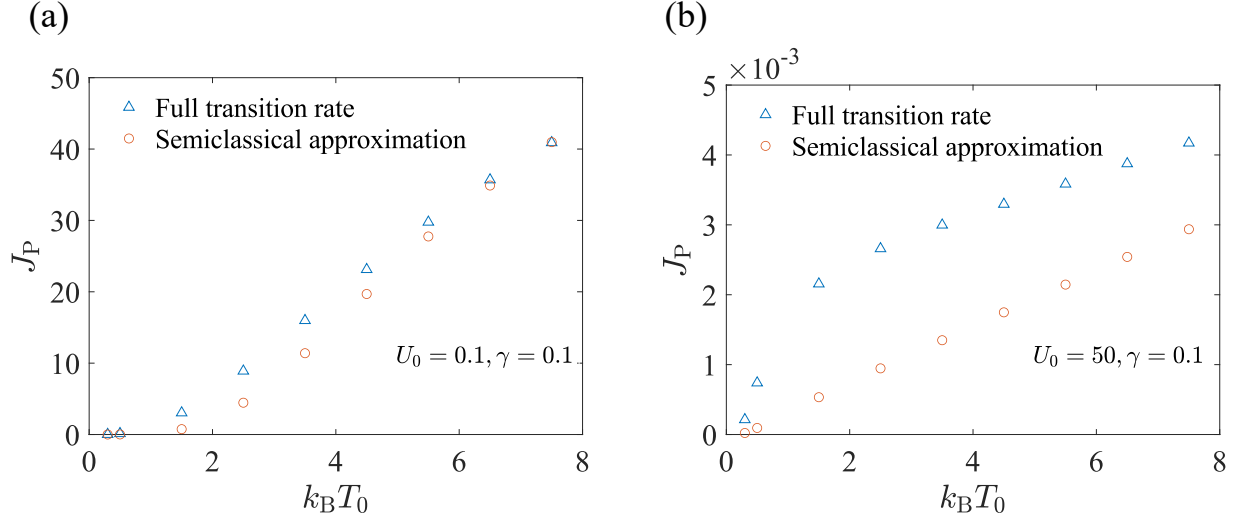


图 2 基于 Matsubara 频率展开, 不同展开项对能流 J_P 的贡献: (a) $U_0 = 0.1$, (b) $U_0 = 50$. 红色圈 (Semiclassical approximation) 为跃迁速率 $\Gamma_{\mu}^{\pm}(E_{m'm})$ 中保留真空项和高温项得到的 J_P ; 蓝色三角 (Full transition rate) 表示跃迁速率完整保留真空项, 高温项以及量子项得到的 J_P . 谐振子频率设置为能量单位 $\omega_0 = 1$, 其他系统参数设置为 Matsubara 求和的截断数 $N_{\text{tr}} = 5 \times 10^4$, 光子截断数 $N_{\text{ph}} = 100$, 随机驱动强度 $\gamma = 0.1$, 系统-热库耦合强度 $\alpha_l = \alpha_r = 0.01$, 热库截止频率 $\omega_c = 10$, 热库温度 $k_B T_l = k_B T_r = k_B T_0 = 2$.

Fig. 2. Based on the Matsubara frequency expansion, the contributions of different expansion terms to the energy current J_P are shown for (a) $U_0 = 0.1$ and (b) $U_0 = 50$. The red circles (semiclassical approximation) represent J_P obtained by retaining only the high-temperature and vacuum terms in the transition rates, and the blue triangles (full transition rate) represent J_P obtained by retaining the full contributions, including the high-temperature, vacuum, and quantum terms. The resonator frequency is set as the energy unit $\omega_0 = 1$. The other system parameters are set as the Matsubara summation number truncation $N_{\text{tr}} = 5 \times 10^4$, the photon number truncation $N_{\text{ph}} = 100$, the random drive strength $\gamma = 0.1$, the system-reservoir coupling strengths $\alpha_l = \alpha_r = 0.01$, the reservoir cutoff frequency $\omega_c = 10$, and the reservoir temperatures $k_B T_l = k_B T_r = k_B T_0 = 2$.

基于 Matsubara 频率展开方法, 本文已经将 (能流, 光子流) 非相干跃迁速率的积分表达式解析地分解为真空项, 高温项以及量子项. 为了研究有限温量子项对驱动输入能流的贡献, 图 2 展示了能量全跃迁速

率 (Full transition rate) (17) 与仅保留真空与高温项的半经典近似 (Semiclassical approximation) 下随机输入能流的对比情况. 研究发现, 在弱非线性区间 (如 $U_0 = 0.1$ 下的图 2(a)), 量子项的附加贡献并不显著, 半经典近似与完整跃迁速率的计算结果基本吻合. 这说明谐振子极限下的非平衡输运由真空项和高温项主导. 然而, 在强非线性极限下 (如 $U_0 = 50$ 下的图 2(b)), 量子项对输运过程的贡献变得重要. 需注意的是, 低温下两点的视觉接近源于能流 J_P 的较小绝对数值. 事实上, 此时量子项的相对修正率最高. 这一现象的微观物理机制可归结为 Kerr 非线性极大地增加了高阶激发的困难性. 有效抑制了 Kerr 谐振子向第二激发态及更高能级的非相干跃迁. 最终导致多能级谐振子系统在低温条件下实质上退化为有效二能级模型, 此时系统的非线性特性凸显 [63,68]. 而随着环境温度的升高, 高温热激发逐渐占据主导地位. 跃迁速率中的高温项贡献随之增大. 强烈的热涨落效应逐渐掩盖了离散能级结构带来的非线性限制 [63]. 因此, 量子项的相对影响力随温度升高而减小, 系统行为最终又会趋近于半经典极限.

接下来解析分析在弱随机驱动极限 $\gamma/\omega_0 \ll 1$ 下, 驱动强度对跃迁速率的影响. 当 $\gamma/\omega_0 = 0$ 时, 方程 (17) 中的能量交互跃迁速率与静态光-物质相互作用输运模型中的跃迁速率完全一致, 此时 $J_P = 0$ [63]. 而对于弱随机驱动情形, 跃迁速率可关于 γ 作级数展开. 考虑到 γ 为小量, 忽略 γ^2 及以上高阶项, 速率 (15) 近似为

$$\Gamma_{e,\mu}^{\pm}(E) = |\langle m|\hat{A}|m'\rangle|^2 [A_{\mu}^{\pm} + B_{\mu}^{\pm}\gamma + O(\gamma^2)], \quad (19)$$

其中系数 $A_{\mu}^{\pm}$ 和 $B_{\mu}^{\pm}$ 分别表示为

$$A_{\mu}^{\pm} = \frac{\alpha\omega_c^2 E}{\beta D_c} \mp \frac{\alpha\omega_c^2}{2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{D_c}\right) + \frac{2\alpha\omega_c^2}{\beta} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{D_c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E}{D_n}, \quad (20a)$$

$$B_{\mu}^{\pm} = -\frac{\alpha\omega_c^3 E}{\beta D_c^2} \pm \frac{\alpha\omega_c^2}{2} \left(\frac{\omega_c}{2D_c} - \frac{\omega_c^3}{D_c^2}\right) - \frac{2\alpha\omega_c^2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{E}{D_n} \left(\frac{\omega_c^2}{D_c(\omega_c + \nu_n)} - \frac{\omega_c^3}{D_c^2} \right) + \frac{E\nu_n}{D_n^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{D_c}\right) \right], \quad (20b)$$

这里 $D_c = E^2 + \omega_c^2$, $D_n = E^2 + \nu_n^2$. 线性项 $B_{\mu}^{\pm}\gamma$ 则代表了随机驱动引起的物理修正, 其来源于能级差 E 受随机驱动引起的展宽效应. 相应的, 通过驱动涌入谐振子的稳态流满足 $J_P \propto \gamma$, 这一结论经过数值验证.

4 稳恒态输运

4.1 能量流

图 3 比较了非线性驱动与线性驱动条件下稳态输入热流 J_P 随驱动强度 γ 的变化行为. 其中, 非线性驱动描述了方程 (8) 中的随机驱动强度 $\gamma_{mm'} = [n(n-1) - n'(n'-1)]^2 \gamma$ 依赖于能级结构; 而线性驱动下

驱动强度描述成 $\gamma_{mm'} = \gamma$. 两种驱动方式下 J_P 均随 γ 增大而增强并最终趋于饱和. 在 γ 较小的区域, 两曲线几乎重合; 而随着 γ 继续增大, 非线性驱动下的 J_P 开始显著高于线性驱动结果. 这种差异主要来源于非线性驱动引入的跃迁通道依赖性. 对于 Kerr 非线性谐振子, 非线性驱动 $\delta U(t)$ 对能级差的影响程度不同, 这种差异由 $[n(n-1) - n'(n'-1)]^2$ 表征. 当 γ 较大时, 激发高占据态跃迁, 更强的涨落作用增强了跃迁速率, 从而提高了稳态输入能流. 因此, 相比于所有跃迁通道作用强度相同的线性驱动, 非线性驱动更有利于促进非线性系统中的能量输运.

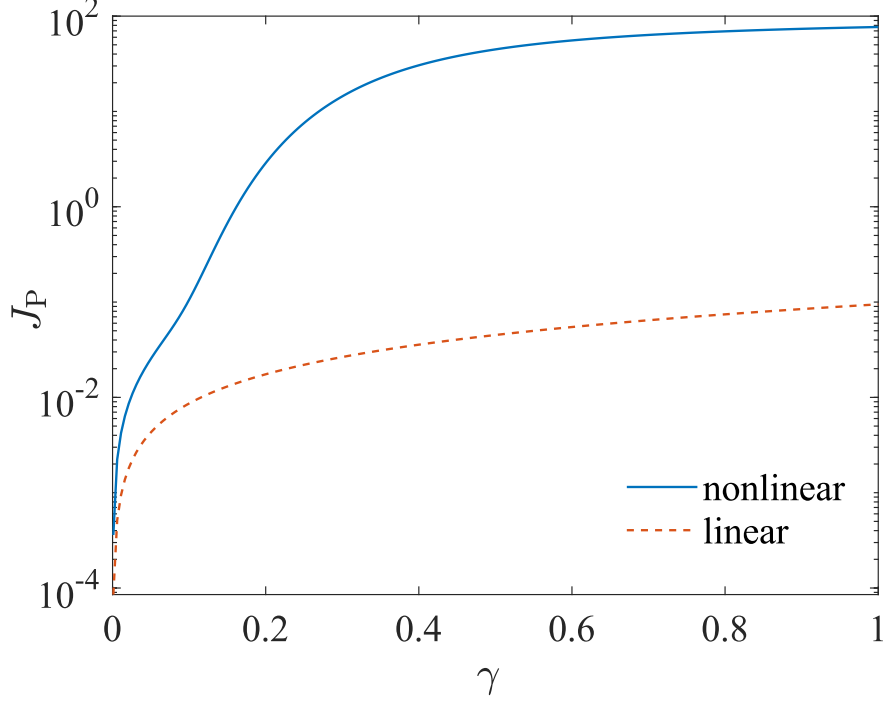


图 3 输入能流 J_P 在非线性随机驱动与线性驱动下调制驱动强度 γ 的变化行为. 蓝色实线表示非线性驱动下的结果, 不同跃迁通道对应的实际驱动强度不同, 刻画为 $\gamma_{mm'} = [m(m-1) - m'(m'-1)]^2\gamma$. 红色虚线表示线性驱动下的结果, 刻画为 $\gamma_{mm'} = \gamma$. 其他系统参数设置为 $\omega_0 = 1, U_0 = 0.2, N_{\text{tr}} = 5 \times 10^4, N_{\text{ph}} = 100, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10, k_B T_l = k_B T_r = 1$.

Fig. 3. The input energy current $\log_{10}(J_P)$ as a function of the driving strength γ under nonlinear and linear driving cases. The blue solid line represents the result for nonlinear driving, where the effective

driving strength depends on the specific transition channel, characterized by

$\gamma_{mm'} = [m(m-1) - m'(m'-1)]^2\gamma$. The red dashed line represents the result for linear driving, characterized by $\gamma_{mm'} = \gamma$. Other system parameters are set as $\omega_0 = 1, U_0 = 0.2, N_{\text{tr}} = 5 \times 10^4,$

$N_{\text{ph}} = 100, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10,$ and $k_B T_l = k_B T_r = 1$.

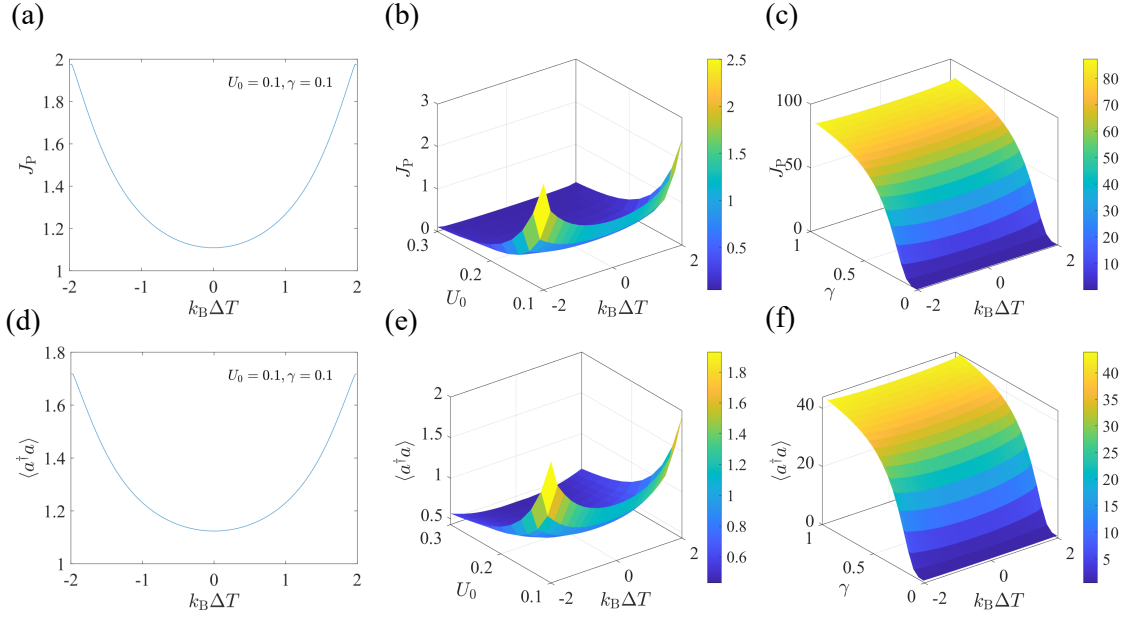


图 4 驱动输入能流 J_P 与平均光子数 $\langle a^\dagger a \rangle$ 随温度偏差 $k_B \Delta T$, Kerr 非线性强度 U_0 与随机驱动强度 γ 的变化行为. (a) 固定 $U_0 = 0.1, \gamma = 0.1$, J_P 随 $k_B \Delta T$ 的变化行为; (b) J_P 随 U_0 与 $k_B \Delta T$ 的变化行为, 其中 $\gamma = 0.1$; (c) J_P 随 γ 与 $k_B \Delta T$ 的变化行为, 其中 $U_0 = 0.1$; (d) 固定 $U_0 = 0.1, \gamma = 0.1$ 时, $\langle a^\dagger a \rangle$ 随 $k_B \Delta T$ 的变化行为; (e) $\langle a^\dagger a \rangle$ 随 U_0 与 $k_B \Delta T$ 的变化行为, 其中 $\gamma = 0.1$; (f) $\langle a^\dagger a \rangle$ 随 γ 与 $k_B \Delta T$ 的变化行为, 其中 $U_0 = 0.1$. 其他系统参数设置为 $N_{\text{tr}} = 5 \times 10^4, N_{\text{ph}} = 100, \omega_0 = 1, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10, k_B T_l = k_B T_0 + k_B \Delta T/2, k_B T_r = k_B T_0 - k_B \Delta T/2, k_B T_0 = 1$.

Fig. 4. Behaviors of the pump energy current J_P and the average photon number $\langle a^\dagger a \rangle$ as functions of the temperature bias $k_B \Delta T$, the Kerr nonlinearity strength U , and the random driving strength γ . (a) J_P as a function of $k_B \Delta T$ for fixed $U_0 = 0.1, \gamma = 0.1$; (b) J_P as a function of U_0 and $k_B \Delta T$ with $\gamma = 0.1$; (c) J_P as a function of γ and $k_B \Delta T$ with $U_0 = 0.1$; (d) $\langle a^\dagger a \rangle$ as a function of $k_B \Delta T$ for fixed $U_0 = 0.1, \gamma = 0.1$; (e) $\langle a^\dagger a \rangle$ as a function of U_0 and $k_B \Delta T$ with $\gamma = 0.1$; (f) $\langle a^\dagger a \rangle$ as a function of γ and $k_B \Delta T$ with $U_0 = 0.1$. The other system parameters are set as $\omega_0 = 1, N_{\text{tr}} = 5 \times 10^4, N_{\text{ph}} = 100, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10, k_B T_l = k_B T_0 + k_B \Delta T/2, k_B T_r = k_B T_0 - k_B \Delta T/2$, and $k_B T_0 = 1$.

图 4(a)-4(c) 分析了在稳恒态下, 输入能流 J_P 随温度偏差 $k_B \Delta T$, Kerr 非线性强度 U_0 与驱动强度 γ 的变化行为. 当固定 Kerr 非线性强度与驱动强度时 (如图 4(a) 中的 $U_0 = 0.1, \gamma = 0.1$), 系统的输入能流 J_P 随左右热库温差 $k_B \Delta T$ 的绝对值增大而递增, 且在系统处于热平衡 ($\Delta T = 0$) 时, 能流 J_P 降至最低.

这表明系统偏离平衡态的程度越强, 系统与外部环境的能量交换过程越能被有效激发, 进而驱动能流的能力也越大. 为进一步揭示 Kerr 非线性和随机驱动对稳态输运的协同作用, 图 4(b) 和 4(c) 展示了能流在不同参数空间下的三维调制行为. 图 4(b) 中固定了 $\gamma = 0.1$, 可以观察到在相同的温度偏差 ΔT 下, Kerr 非线性强度 U_0 越弱, 输入能流 J_P 越强, 能流随 $k_B \Delta T$ 变化的曲线有更剧烈的响应幅度. 而固定 $U_0 = 0.1$ 时, 图 4(c) 展示了 J_P 随 γ 与 $k_B \Delta T$ 的变化. 在相同温度偏置下, 随机驱动强度 γ 越强, 促使 J_P 越大. 由此可得, 较弱的非线性相互作用 U_0 与较强的随机场驱动 γ 协同配合, 有利于系统与热库之间的能量交换, 从而能够最大限度地促进外部向系统输入能量.

为了刻画随机驱动对 Kerr 谐振子带来的有效温度影响, 本文通过图 4(d)-4(f) 分析系统的平均光子数 $\langle a^\dagger a \rangle$ 来阐明上述能流变化的内在机制. 当固定 $U_0 = 0.1, \gamma = 0.1$ 时, 图 4(d) 显示 $\langle a^\dagger a \rangle$ 随温度偏置 $k_B \Delta T$ 的增大而显著增加, 这对应着驱动端的有效温度也同步提高. 这种由于驱动光子而导致的有效高温, 进一步加剧了 Kerr 谐振子与两侧热库之间的温差偏差, 从而强化了外部能量持续注入非线性谐振子的过程. 类似的行为也可以在图 4(e) (固定 $\gamma = 0.1$) 观察到. 此外, 当 Kerr 非线性强度 U_0 越大, 腔内累积的平均光子数 $\langle a^\dagger a \rangle$ 越少^[63]. 可以预见对应的输入能流也随之减弱. 与之对应, 图 4(f) (固定 $U_0 = 0.1$) 则直观地揭示了在相同的温度偏差下, 随机驱动强度 γ 的增强会导致平均光子数激增. 进而提升输入能流的强度. 因此, 较小的非线性强度 U_0 与较大的随机驱动 γ 共同促使了大量光子在谐振子内部积聚, 表征了系统的有效温度的显著升高.

同时, 注意到 $\langle a^\dagger a \rangle$ 与输入能量流 J_P 的行为展现出了高度相似性. 具体而言, 考虑弱随机驱动强度 (例如图 4(a)), 谐振子与温度高的玻色子热库有更高效率的非弹性交互过程, 表现为更大的非相干跃迁速率. 使得随机驱动可以有效激发谐振子内的光子数. 当刻画系统的有效热态温度 T_s 为

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \frac{\sum_m m e^{-E_m/k_B T_s}}{\sum_m e^{-E_m/k_B T_s}}, \quad (21)$$

其中 $E_m = \omega_0 m + U_0 m(m-1)$ ($m \geq 0$). 可以发现 T_s 随着温差 ΔT 增大而相应升高, 如图 5(a) 所示. 这就对应了 $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ 随温差变大而激发增强的结果, 如图 4(d). 同时, 由于谐振子与低温端口温差不断增大, 提升了随机端口能量流输入到低温端口, 如图 5(c). 而考虑较强随机驱动的情况时, 类似的, 随机驱动项通过高温端口的散射交互过程显著增大了谐振子的有效温度, 如图 5(b). 在大温差下, 使得输入流 J_P 向两个端口输入近似等量的能流 $J_{I(r)} \approx J_P/2$, 如图 5(d). 从而解释了平均光子数和驱动输入能量流随着热库温差 ΔT 表现出相似的行为.

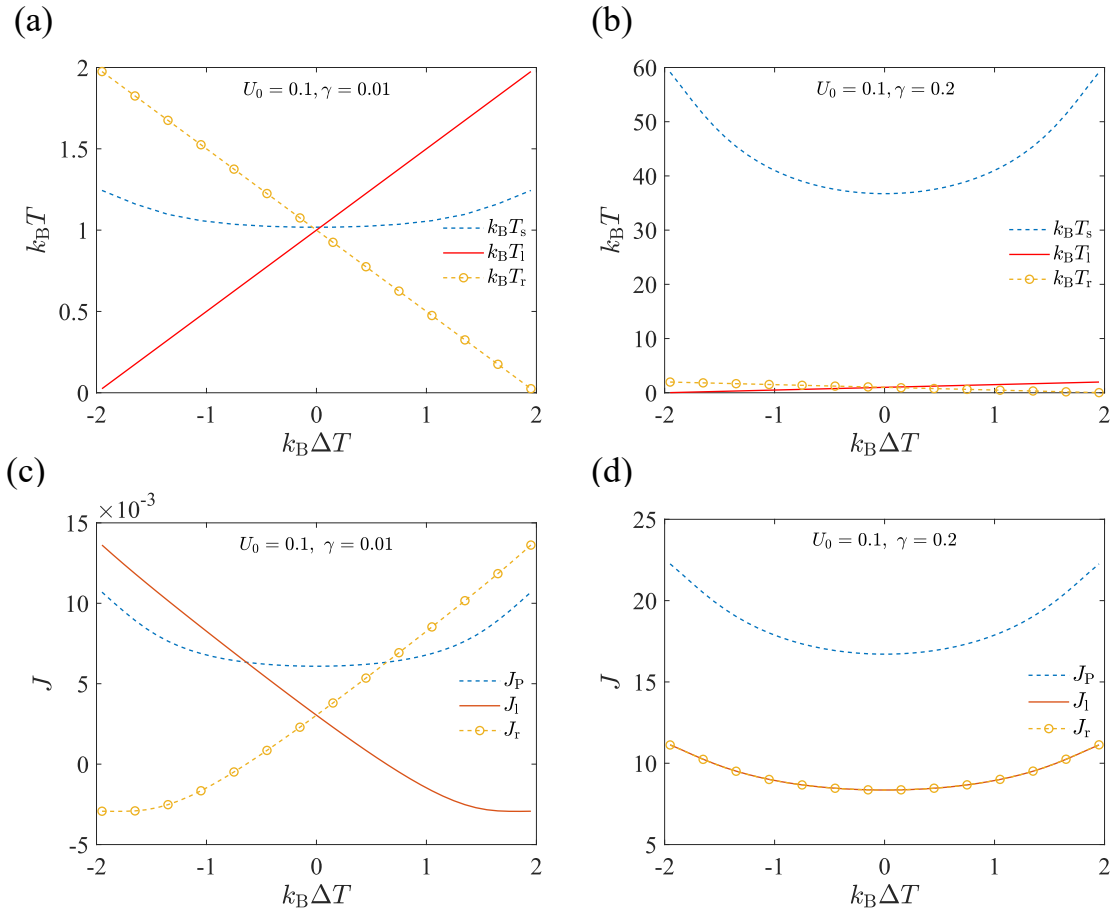


图 5 (a) 弱驱动 $\gamma = 0.01$ 和 (b) 强驱动 $\gamma = 0.2$ 时系统的有效温度 $k_B T_s$ (21), 左侧玻色热库温度 $k_B T_l$ 及右侧玻色热库 $k_B T_r$ 随温度偏差 $k_B \Delta T$ 的变化行为. (c) 弱驱动 $\gamma = 0.01$ 和 (d) 强驱动 $\gamma = 0.2$ 时驱动输入能流 J_P , 系统流入左侧玻色热库的能流 J_l 及流入右侧玻色热库能流 J_r 随 $k_B \Delta T$ 的变化行为. 其他系统参数设置为 $\omega_0 = 1, U_0 = 0.1, N_{tr} = 5 \times 10^4, N_{ph} = 100, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10, k_B T_l = k_B T_0 + k_B \Delta T/2, k_B T_r = k_B T_0 - k_B \Delta T/2, k_B T_0 = 1$.

Fig. 5. (a) Behaviors of the system effective temperature $k_B T_s$ (21), the left Bose thermal bath temperature $k_B T_l$, and the right Bose thermal bath temperature $k_B T_r$ as functions of the temperature bias $k_B \Delta T$ for weak driving $\gamma = 0.01$; (b) for strong driving $\gamma = 0.2$. Behaviors of the pump energy current J_P , the energy current flowing into the left Bose thermal bath J_l , and the energy current flowing into the right Bose thermal bath J_r as functions of $k_B \Delta T$ for (c) weak driving strength $\gamma = 0.01$ and (d) strong driving strength $\gamma = 0.2$. The other system parameters are set as $\omega_0 = 1, U_0 = 0.1, N_{tr} = 5 \times 10^4, N_{ph} = 100, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10, k_B T_l = k_B T_0 + k_B \Delta T/2, k_B T_r = k_B T_0 - k_B \Delta T/2$, and $k_B T_0 = 1$.

本文还分析了强 Kerr 非线性极限下的输入能流行为, 如图 6(a) 所示. 结果表明随着驱动强度 γ 增大, J_P 单调增大. 但是相对于近简谐极限而言, 输入能流强度整体减弱, 并且对温差响应比较微弱. 类似的, 图 6(b) 中的光子平均数 $\langle a^\dagger a \rangle$ 也能被随机驱动激发, 但是随温差变化幅度较小. 这与 J_P 的调制行为自治.

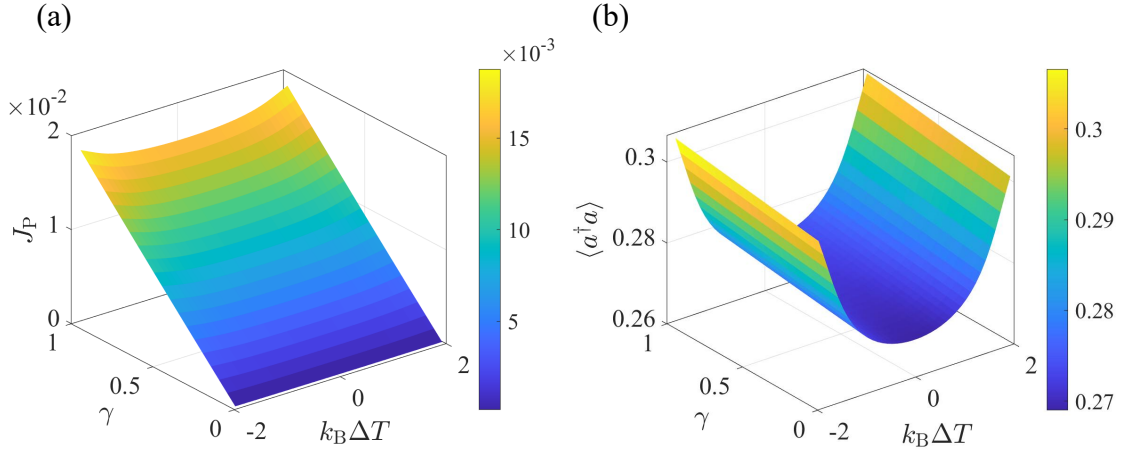


图 6 固定 $U_0 = 50$ 时 (a) 输入能流 J_P 和 (b) 平均光子数 $\langle a^\dagger a \rangle$ 随 γ 与 $k_B \Delta T$ 的变化行为. 其他系统参数设置为 $\omega_0 = 1, N_{tr} = 5 \times 10^4, N_{ph} = 100, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10, k_B T_l = k_B T_0 + k_B \Delta T/2, k_B T_r = k_B T_0 - k_B \Delta T/2, k_B T_0 = 1$.

Fig. 6. (a) The input energy current J_P and (b) the average photon number $\langle a^\dagger a \rangle$ as functions of γ and $k_B \Delta T$ with fixed $U_0 = 50$. The other system parameters are set as $\omega_0 = 1, N_{tr} = 5 \times 10^4, N_{ph} = 100, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10, k_B T_l = k_B T_0 + k_B \Delta T/2, k_B T_r = k_B T_0 - k_B \Delta T/2$, and $k_B T_0 = 1$.

此外, 图 7(a)-7(b) 分别展示了输入能流 J_P 和从 Kerr 谐振子流向右侧热库的能流 J_r 随着随机驱动强度 γ 和 Kerr 非线性强度 U_0 变化的依赖关系. 从全局参数视角, 可观察稳恒态能量输运的非线性响应. 在对称热库设置下, 从系统流入左右两侧热库的能流展现出高度对称性 $J_l = J_r$, 故仅以 J_r 为代表展示. 进一步研究表明, 能流随参数变化呈现出显著的非线性饱和特性: 固定 U_0 可以观察到能流 J_P 随 γ 变化的行为, 非线性强度 U_0 较小时, 能流随驱动强度 γ 呈现出近线性增长特征; 而当 γ 较大时, 该曲线随 γ 的增长开始弯曲并趋于平缓, 且随着 U_0 的增大, 线性增长的区间越长. 同时, 在固定 γ 后观察能流随 U_0 的变化: 随机驱动强度 γ 较小时, 能流在低 U_0 区域快速衰减, 并在进入大 U_0 极限后趋于饱和, 且随着 γ 的增大, 能流衰减的越缓慢. 这进一步印证了弱非线性有利于能量输运的结论, 且在大的非线性强度区间系统的输运行为对 U_0 不敏感.

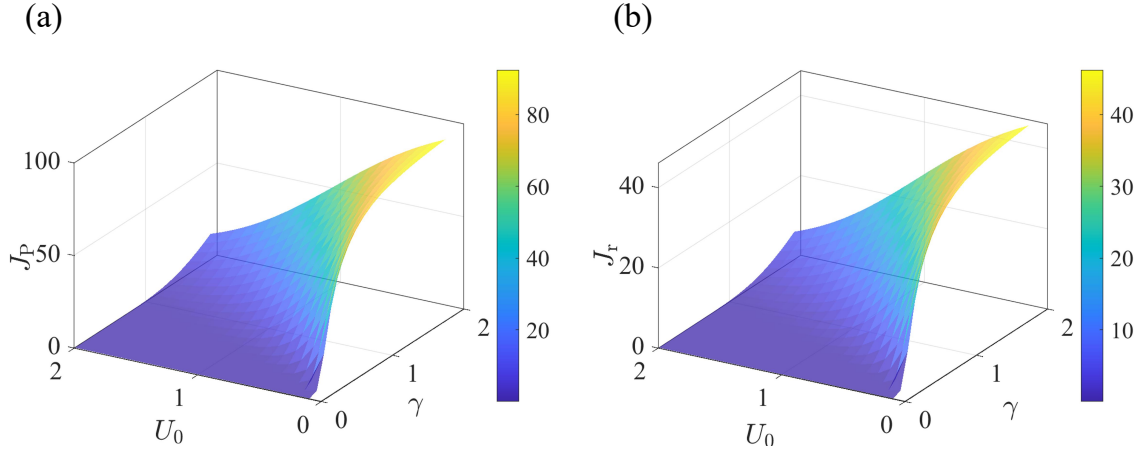


图 7 (a) 输入能流 J_P 及 (b) Kerr 谐振子系统流入右侧热库的能流 J_r 随 γ 与 U_0 的变化行为. 其他系统参数设置为 $\omega_0 = 1$, $N_{tr} = 5 \times 10^4$, $N_{ph} = 100$, $\alpha_l = \alpha_r = 0.01$, $\omega_c = 10$, $k_B T_l = k_B T_r = k_B T_0 = 1$.

Fig. 7. (a) The input energy current J_P and (b) energy current J_r flowing from the Kerr resonator system into the right reservoir, as functions of γ and U_0 . Other system parameters are set as $\omega_0 = 1$,

$$N_{tr} = 5 \times 10^4, N_{ph} = 100, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10, \text{ and } k_B T_l = k_B T_r = k_B T_0 = 1.$$

4.2 光子流

由于稳恒态下光子流守恒关系 $I_l + I_r = 0$, 考虑 Kerr 谐振子系统流出到右侧玻色库的光子流 I_r 在温度偏差 $k_B \Delta T$, Kerr 非线性强度 U_0 以及随机驱动强度 γ 的共同作用下展现出的非平衡输运行为. 图 8(a)-8(c) 描述了当固定 Kerr 非线性强度时 (如图 8(a) 中的 $U_0 = 0.1$), 由于 $k_B \Delta T$ 决定了非平衡输运方向, I_r 关于 $k_B \Delta T$ 则呈现近似反对称分布: 随着 $k_B |\Delta T|$ 的减小, $|I_r|$ 逐渐减小, 并在 $k_B \Delta T = 0$ 时几乎为零. 同时, 随着随机驱动强度 γ 的增强, I_r 明显减弱并逐渐趋于饱和. 这是由于较强的随机涨落提升了 Kerr 谐振子的有效温度, 形成了一个较强的温度壁垒, 从而抑制了光子输运. 类似的行为也可以在图 8(b) (固定 $\gamma = 0.1$) 观察到. Kerr 非线性强度 U_0 的增强会增大系统能级之间的失谐程度, 从而减少了系统与热库之间的跃迁通道, 最终同样的抑制光子输运. 为进一步揭示随机驱动与 Kerr 非线性之间存在的竞争与协同关系, 图 8(c) 展示了光子流 I_r 在 (γ, U_0) 参数空间中的三维调制行为. 在弱随机区域, γ 较小时, 光子流 I_r 随着 U_0 的增大而逐渐减小, 表现出与前文类似的非线性抑制行为. 然而, 在较强随机驱动区域, 随着 U_0 的增大, 光子流 I_r 反而逐渐增强. 高占据态被有效的激发参与光子交互过程. 这表明较强的非线性随机驱动结合适当的 Kerr 非线性有利于光子输运.

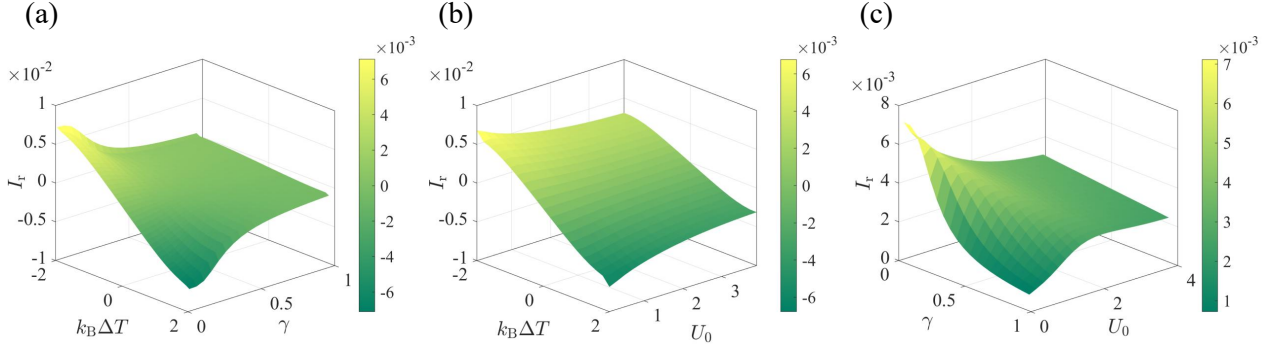


图 8 Kerr 谐振子系统流出右侧热库的光子流 I_r 随系统参数 γ , U_0 及 $k_B \Delta T$ 的变化行为. (a) 光子流 I_r 随 $k_B \Delta T$ 与 γ 的变化行为, 其中 $U_0 = 0.1$. (b) 光子流 I_r 随 $k_B \Delta T$ 与 U_0 的变化行为, 其中 $\gamma = 0.1$. (c) 光子流 I_r 随 γ 与 U_0 的变化行为, 其中 $k_B \Delta T = -2$. 其他系统参数设置为 $\omega_0 = 1, N_{tr} = 5 \times 10^4, N_{ph} = 100, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10, k_B T_l = k_B T_0 + k_B \Delta T/2, k_B T_r = k_B T_0 - k_B \Delta T/2, k_B T_0 = 1$.

Fig. 8. The photon current I_r flowing from the Kerr resonator system into the left reservoir, as functions of γ , U_0 , and $k_B \Delta T$. (a) I_r as a function of $k_B \Delta T$ and γ with $U_0 = 0.1$; (b) I_r as a function of $k_B \Delta T$ and U_0 with $\gamma = 0.1$; (c) I_r as a function of γ and U_0 with $k_B \Delta T = -2$. Other system parameters are set as

$$\omega_0 = 1, N_{tr} = 5 \times 10^4, N_{ph} = 100, \alpha_l = \alpha_r = 0.01, \omega_c = 10, k_B T_l = k_B T_0 + k_B \Delta T/2,$$

$$k_B T_r = k_B T_0 - k_B \Delta T/2, \text{ and } k_B T_0 = 1.$$

5 实验可行性

为了获得正 Kerr 非线性项, 根据之前的超导电路实验, 本文考虑采用微波谐振子耦合超导型非线性非对称电感式元器件 (SNAIL) 来实现可能的 Kerr 谐振子模型, 其中超导型非线性非对称电感式元器件由 3 个大约瑟夫森结和 1 个小约瑟夫森结构成 [69]. 耦合体系的哈密顿量可以表示为

$$H = C \frac{\Phi_0^2}{2} \dot{\phi}^2 + U_{S-R}, \quad (22)$$

其中 C 为构成谐振子的电容强度, Φ_0 为磁通量子, ϕ 表示正则相位坐标. 耦合系统的势能表示为 $U_{S-R} = \frac{E_L}{2} (\phi - \phi_s)^2 - \beta E_J \cos(\phi_s) - 3E_J \cos(\frac{\phi_{ext} - \phi_s}{3})$, $E_L = \Phi_0^2/L$ 是电感能量, L 为电感强度, E_J 为约瑟夫森能, β 是小结与大结的能量之比, ϕ_{ext} 为外部磁通导致的相位, ϕ_s 为 SNAIL 内的相位差. 通过对总势能 U_{S-R} 在相位极小值点 ϕ_m 做泰勒展开, 系统在二次量子化后的哈密顿量可以有效表示为 [70]

$$\hat{H}_{S-R} = \hbar \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g_3 (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^3 + \hbar g_4 (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4, \quad (23)$$

其中 $\hat{a}^\dagger$ ($\hat{a}$) 为谐振子的产生 (湮灭) 算符, $\hbar\omega_0 = \sqrt{8E_C E_J c_2}$ 为占据能, $\hbar g_3 = c_3 \sqrt{E_C \hbar\omega_0}/6c_2$ 和 $\hbar g_4 = c_4 E_C/12c_2$ 为非线性耦合强度, $E_C = e^2/2C$ 为电容能, 系数 $c_k = \frac{1}{E_J} (d^k U_{S-R}/d\phi^k)|\phi_m$. 利用高阶微扰修正, 耦合系统的本征能量可得 $E_m/\hbar = m\omega_0 + 6(g_4 - 5g_3^2/\omega_s)m(m+1)$. 因此, 混合系统的 Kerr 非线性强度 $\hbar U_0 = d^2 E_m/dm^2$ 可以得到为 [70,71]

$$\hbar U_0 = 12\hbar \left(g_4 - \frac{5g_3^2}{\omega_0} \right). \quad (24)$$

当 $g_4 > 5g_3^2/\omega_s$ 时, 就可以得到 Kerr 光子-光子排斥强度. 此时, Kerr 谐振子的有效哈密顿量表示为 $\hat{H}_{\text{eff}} = \hbar(\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a})$. 如果考虑在 Kerr 非线性作用上加入随机项 $\delta U(t)$, 例如在 g_3 或 g_4 上引入随机过程, 则可能得到方程 (2) 中的随机驱动 Kerr 谐振子的哈密顿量. 实验上, $\omega_0/2\pi$ 调制为 4.08–5.0 GHz, U_0 已报道的约为 5.0 MHz [71]. 而通过表达式 (24) 知道 $U_0 \propto E_C$, 如果未来的实验能够调大 E_C 并减少 E_J , 则可能进一步增大 U_0 并减少 ω_0 , 可能达到本文的部分参数区间.

此外, 基于电路量子电动力学平台 [8,23], 把 Kerr 谐振子系统两端接入介观玻色子热库. 通过随机驱动项与热库温差协同作用下, 可以产生能量流和光子流. 从而可能可以利用计数方式, 通过多次非平衡轨迹测量方式 [22], 统计得到稳恒态能量流与光子流. 而对于平均光子数, 原则上可以基于输入-输出的弱测量理论 [72], 得到输出功率谱密度. 进而, 可以提取出腔内光子的有源辐射谱 $S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle \hat{a}^\dagger(t + \tau) \hat{a}(t) \rangle$ [73]. 从而, 反推腔内的平均光子数为 $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_a(\omega)$.

6 结论

本文基于系统-环境弱耦合推导出的量子主方程, 利用 Matsubara 频率展开探讨了随机 Kerr 作用驱动下谐振子的非平衡能量流与光子数流. 文章主要研究结果为:

从方法角度, 在非相干跃迁速率的表达式中引入 Matsubara 频率展开方法, 将速率积分有效分解为真空项, 高温项和量子项求和. 从而利用 Matsubara 频率展开方法, 解析给出了超越 Einstein 谱函数极限的跃迁速率 [15], 使复杂的频率积分变为频率求和, 使得物理过程的计算变得清晰. 当随机驱动强度趋于 0, 基于 Matsubara 频率展开的非相干跃迁速率自然退化为引文 [63] 的两端口结果. 具体研究表明, 在近简谐区域, 真空项与高温项的半经典性对非平衡输运行为起到主要贡献. 而在强 Kerr 非线性作用区间, 由于对高阶激发的强烈抑制, 离散能级的量子效应凸显, 谐振子系统退化为有效二能级模型. 但随着环境温度升高, 强烈的热涨落效应逐渐掩盖了量子特性的非线性限制, 系统行为最终又会趋于半经典特征.

从微观交互图像角度, 通过非相干跃迁速率的表达式, 发现由于随机作用引起的跃迁能级展宽效应, 从

而揭示了由于随机驱动导致的热库-Kerr 谐振子-驱动端口之间微观非弹性散射能量交互过程, 如图 1(b) 和 1(c) 所示.

从非平衡流角度, 本文发现强随机驱动协同弱 Kerr 非线性作用可以有效向谐振子系统输入能量. 强随机驱动协同强 Kerr 非线性作用有效增强光子流. 在弱随机驱动近似下解析获得随机驱动强度与稳态输入能流之间的线性关系. 具体而言, 比较了非线性驱动与线性驱动对稳态输入能流的影响. 发现在较强驱动区域, 非线性驱动的交互过程由于引入了跃迁通道依赖性, 能够更有效地促进能量传输. 同时, 发现在远离热平衡条件下, Kerr 谐振腔中的输入能流与平均光子数均显著增强, 系统可表现出有效高温特性; 弱 Kerr 非线性相互作用与强随机驱动协同作用, 能够很大程度地促进外部输入能量向系统的泵入. 而过强的 Kerr 非线性则会导致光子间强烈的相互排斥, 引发类似能级阻塞的效应, 最终抑制能量的输入能力. 本文还分析了光子流 I_r 在系统参数共同作用下的变化行为. 结果表明, 随机驱动强度 γ 的增强会有效提升 Kerr 谐振子的有效温度, 加剧光子输运的壁垒效应, 通常会抑制有效光子输运. 而 Kerr 非线性强度 U_0 通常会通过增大能级失谐和压缩有效跃迁通道抑制光子流. 但在强随机驱动区域, 高占据态在较强的 Kerr 非线性强度下又能够有效的参与光子输运过程, 使光子流得到一定增强.

此外, 本文所提出的模型在超导电路量子电动力学平台上可能有一定的实现可行性. 这为实际量子系统的设计提供了一种可能路径. 本研究对加深非线性光学腔中非平衡能量与光子流动调控的理解和为随机驱动量子能量器件设计提供了理论参考.

致谢

感谢中国浙江省自然科学基金 LZ25A050001 对本项工作的资助.

参考文献

- [1] Haug H J W, Jauho A P 2008 *Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors* (Berlin: Springer) p63-p73
- [2] Kimble H J 2008 *Nature* **453** 1023
- [3] Landi G T, Poletti D, Schaller G 2022 *Rev. Mod. Phys.* **94** 045006

- [4] Chen X B, Duan W H 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 186302 (in Chinese) [陈晓彬, 段文晖 2015 物理学报 **64** 186302]
- [5] Datta S 2005 *Quantum Transport: Atom to Transistor* (Cambridge: Cambridge University Press) p217-p240
- [6] Cui L J, Jeong W, Hur S, Matt M, Klockner J C, Pauly F, Nielaba P, Cuevas J C, Meyhofer E, Reddy P 2017 *Science* **355** 1192
- [7] Li J, Chen L, Feng M 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 033701 (in Chinese) [李冀, 陈亮, 冯芒 2024 物理学报 **73** 033701]
- [8] Pekola J P, Karimi B 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 041001
- [9] Dorfman K E, Voronine D V, Mukamel S, Scully M O 2013 *PNAS* **110** 2746
- [10] Vu TV, Saito K 2023 *Phys. Rev. X* **13** 011013
- [11] Wang J S, Peng J B, Zhang Z Q, Zhang Y M, Zhu T 2023 *Front. Phys.* **18** 43602
- [12] Wang R Q, Wang C, Lu J C, Jiang J H 2022 *Advances in Physics: X* **7** 2082317
- [13] Segal D 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 105901
- [14] Sinitsyn N A, Nemenman I 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 220408
- [15] Segal D 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 260601
- [16] Ren J, Hanggi P, Li B W 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 170601
- [17] Wang Z, Wang L Q, Chen J Z, Wang C, Ren J 2022 *Front. Phys.* **17** 13201
- [18] Wang Z, Ren J 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 230503 (in Chinese) [王子, 任捷 2021 物理学报 **70** 230503]
- [19] Micadei K, Peterson J P S, Souza A M, Sarthour R S, Oliveira I S, Landi G T, Batalhao T B, Serra R M, Lutz E 2019 *Nature Communications* **10** 2456
- [20] Huang K Y, Zhang Q, Liu X J, Li R Q, Long X Y, Liu H F, Wang X Y, Fan Y A, Zheng Y X, Feng Y F, Zhou Y, Ng J, Nie X F, Man Z X, Lu D W 2026 *Phys. Rev. Lett.* **136** 050403
- [21] Esposito M, Harbola U, Mukamel S 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1665
- [22] Yang C, Wei X R, Sheng J T, Wu H B 2020 *Nature Communications* **11** 4656
- [23] Ronzani A, Karimi B, Senior J, Chang Y C, Peltonen J T, Chen C D, Pekola J P 2018 *Nature Physics* **14** 991

- [24] Senior J, Gubaydullin A, Karimi B, Peltonen J T, Ankerhold J, Pekola J P 2020 *Communications Physics* **3** 40
- [25] Kong J R, Mao M, Liu H, Wang C 2025 *Acta Physica Sinica* **74** 214201 (in Chinese) [孔俊然, 毛芒, 刘焕, 王晨, 2025 物理学报 **74** 214201]
- [26] Chen Y T, Kong J R, Liu H, Wang C 2026 *Acta Physica Sinica* **75** 090601 (in Chinese) [陈逸甜, 孔俊然, 刘焕, 王晨, 2026 物理学报 **75** 090601]
- [27] Zhou L, Yang L P, Li Y, Sun C P 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 103604
- [28] Tang H, Shang X W, Shi Z Y, He T S, Feng Z, Wang T Y, Shi R X, Wang H M, Tan X, Xu X Y, Wang Y, Gao J, Kim M S, Jin X M 2024 *npj Quantum Information* **10** 29
- [29] Gao H X, Sun K H, Qu D K, Wang K K, Xiao L, Yi W, Xue P 2025 *Phys. Rev. Lett.* **134** 146602
- [30] Aspelmeyer M, Kippenberg T J, Marquardt F 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 1391
- [31] Chen W J, Ozdemir S K, Zhao G M, Wiersig J, Yang L 2017 *Nature* **548** 192
- [32] Chen Y L, Fu Q D, Xu Z X, Ye F W 2025 *Laser and Photonics Reviews* **20** e01528
- [33] Schirber M 2026 *Physics* **19** s36
- [34] Hoi I C, Wilson C M, Johansson G, Palomaki T, Peropadre B, Delsing P 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 073601
- [35] Schaefferbeke Q, Avriller R, Frederiksen T, Pistolesi F 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 246601
- [36] Zhou Y H, Liu T, Su Q P, Zhang X Y, Wu Q C, Chen D X, Shi Z C, Shen H Z, Yang C P 2025 *Phys. Rev. Lett.* **134** 183601
- [37] Benenti G, Casati G, Saito K, Whitney R S 2017 *Physics Reports* **694** 1
- [38] Scully M O, Zubairy M S, Agarwal G S, Walther H 2003 *Science* **299** 862
- [39] Scully M O 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 207701
- [40] Wang R Q, Wang C, Lu J C, Jiang J H 2022 *Adv. Phys.: X* **7** 2082317
- [41] Lim J W, Majumder A, Mittapally R, Gutierrez A R, Luan Y X, Meyhofer E, Reddy P 2024 *Nature Communications* **15** 5584
- [42] Majland M, Christensen K S, Zinner N T 2020 *Phys. Rev. B* **101** 184510

- [43] Wang C, Wang L Q, Ren J 2021 *Chin. Phys. Lett.* **38** 010501
- [44] Li H N, Fernandez-Alcazar L J, Ellis F, Shapiro B, Kottos T 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 165901
- [45] Campaioli F, Gherardini S, Quach J Q, Polini M, Andolina G M 2024 *Rev. Mod. Phys.* **96** 031001
- [46] Kohler S, Lehmann J, Hanggi P 2005 *Physics Reports* **406** 379
- [47] Takahashi K, Fujii K, Hino Y, Hayakawa H 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 150602
- [48] Funo K, Lambert N, Nori F, Flindt C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 150603
- [49] Gupt N, Bhattacharyya S, Das B, Datta S, Mukherjee V, Ghosh A 2022 *Phys. Rev. E* **106** 024110
- [50] Lu J C, Liu J J, Jiang J H, Wang C 2025 *Phys. Rev. B* **111** 245407
- [51] Li Y H, Wang C Y, Tang Y J, Liu Y C 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 183803
- [52] Bai S Y, An J H 2020 *Phys. Rev. A* **102** 060201(R)
- [53] Wang Z H, Yu H W, Wang J 2025 *J. Phys. Chem. Lett.* **16** 12018
- [54] Sinitsyn N A, Nemenman I 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 220408
- [55] Strass M, Hanggi P, Kohler S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 130601
- [56] Kampen N G V, 2011 *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Amsterdam: Elsevier) p171-p172
- [57] Hussein R, Kohler S, Bayer J C, Wagner T, Haug R J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 206801
- [58] Segal D 2009 *J. Chem. Phys.* **130** 134510
- [59] Rodriguez S R K, Casteels W, Storme F, Zambon N C, Sagnes I, Gratiet L L, Galopin E, Lemaitre A, Amo A, Ciuti C, Bloch J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **134** 123801
- [60] Fink T, Schade A, Hofling S, Schneider C, Imamoglu A, 2018 *Nat. Phys.* **14** 365
- [61] Kippenberg T J, Spillane S M, Vahala K J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 083904
- [62] Del'Haye P, Schliesser A, Arcizet O, Wilken T, Holzwarth R, Kippenberg T J 2007 *Nature* **450** 1214
- [63] Purkayastha A, Dhar A, Kulkarni M 2016 *Phys. Rev. A* **94** 052134
- [64] Liu J Y, Nian L L, Zhou N J, Xiong L, Lv J T, Zheng B 2025 *Phys. Rev. A* **111** L040201
- [65] Ravets S, Pernet N, Mostaan N, Goldman N, Bloch J 2025 *Phys. Rev. Lett.* **134** 093801
- [66] Weiss U 2012 *Quantum Dissipative Systems, 4th ed.* (Singapore: World Scientific) p8-p13,p30-p33

- [67] Mahan G D, 2000 *Many-particle Physics* 3rd ed. (New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers) p110
- [68] Chen X M, Wang C, Sun K W 2018 *Physica A* **492** 1399
- [69] Frattini N E, Sivak V V, Lingenfelter A, Shankar S, Devoret M H 2018 *Phys. Rev. Applied* **10** 054020
- [70] Frattini N E, Vool U, Shankar S, Narla A, Sliwa K M, Devoret M H 2017 *Appl. Phys. Lett.* **110** 222603
- [71] He X L, Lu Y, Bao D Q, Xue H, Jiang W B, Wang Z, Roudsari A F, Delsing Per, Tsai J S, Lin Z R 2023 *Nature Communications* **14** 6358
- [72] Clerk A A, Devoret M H, Girvin S M, Marquardt F, Schoelkopf R J 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1155
- [73] Lang C, Bozyigit D, Eichler C, Steffen L, Fink J M, Abdumalikov A A, Baur M, Filipp S, da Silva M P, Blais A, Wallraff A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 243601

录用稿件，非最终出版稿

Nonequilibrium energy and photon transport in a stochastically driven Kerr resonator*

LU Yuwei CHEN Yitian LIU Huan WANG Chen[†]

(*Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, Zhejiang, China*)

Abstract

Nonequilibrium quantum transport in quantum optical systems has attracted increasing attention in quantum thermodynamics and nonequilibrium physics. In particular, the regulation of energy flow in Kerr nonlinear cavities plays an important role in the design and optimization of quantum thermal devices. Recently, stochastic driving has been recognized as an effective mechanism for inducing nonequilibrium energy exchange and enhancing transport performance in open quantum systems. To explore the influence of nonlinear field fluctuations on quantum transport, we investigate the nonequilibrium transport properties of a Kerr nonlinear resonator under stochastic driving, with particular attention to both energy and photon currents. In this model, stochastic driving is introduced into the Kerr nonlinear interaction term. Meanwhile, the resonator is coupled to two bosonic thermal reservoirs. Under the weak system-reservoir coupling condition, the stochastic-averaged quantum master equation is derived to describe the dissipative dynamics and steady-state transport behavior of the system. The incoherent transition rates reveal the inelastic scattering processes associated with energy exchange among the system, thermal reservoirs, and stochastic driving channel. Based on the Matsubara frequency expansion method, the integral terms in the transition rates are decomposed into the vacuum term, the high-temperature term, and the quantum correction term. In the weak stochastic-driving limit, an approximate expansion demonstrates the linear

* Project supported by the Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (Grant No. LZ25A050001).

[†] Corresponding author. E-mail: wangchen@zjnu.cn

dependence of the input energy current on the nonlinear driving strength. Compared with linear driving, nonlinear driving introduces transition-channel-dependent energy injection processes, which become more favorable for energy transport in the strong-driving regime. Our results show that the stochastic input energy current increases with both the temperature bias and the stochastic driving strength, while stronger Kerr nonlinearity suppresses the input current. The average photon number exhibits similar behavior, indicating that both the temperature bias and nonlinear driving effectively increase the resonator's effective temperature and induce stochastic energy injection. Further analysis reveals that the photon current is suppressed as the stochastic driving strength increases because the elevated effective temperature inside the Kerr resonator forms a thermal barrier that hinders directional photon transport. However, in the strong stochastic-driving regime, increasing the Kerr nonlinearity can instead enhance the photon current. Moreover, the studied model in this article may be realized based on the circuit quantum electrodynamics setup. This may provide a possible route to design the practical quantum system. We hope that these results can deepen the understanding of stochastic-driven quantum transport in stochastic quantum systems and provide theoretical insights for the design and optimization of quantum thermal devices.

Keywords: quantum energy transport, quantum master equation, stochastic driving, open quantum system