

考虑部分渗透的磁-电-热弹性体

倾斜裂纹的断裂力学分析*

郭宗华¹⁾ 郭怀民^{2†)} 刘官厅¹⁾

1) (内蒙古师范大学, 数学科学学院, 呼和浩特 010022)

2) (内蒙古科技大学包头师范学院, 数学科学学院, 包头 014030)

摘 要

磁-电-热弹性 (METE) 材料作为一种具有力、电、磁、热多场耦合特性的新型智能材料, 在传感器、制动器及微机电系统等领域具有重要应用。材料内部存在的裂纹等缺陷在多场载荷下易引发应力集中, 导致器件失效。本文基于 Muskhelishvili 复势理论, 构建了含倾斜角度的唇形延伸裂纹模型。利用保角变换技术将裂纹外部区域映射为单位圆外部, 并结合 Stroh 型公式, 导出了裂纹尖端处场强度因子和能量释放率的解析表达式。通过数值计算, 分析了裂纹几何尺寸 (裂纹长度、唇口高度、倾斜角度)、METE 耦合参数及边界渗透条件 (电渗透、磁渗透、热渗透) 对场强度因子和能量释放率的影响规律。结果表明: 裂纹倾斜角度的增大会抑制裂纹扩展; 电渗透、磁渗透及热渗透系数的增加均导致能量释放率显著降低, 其中热渗透系数的影响最为明显, 磁渗透系数的影响最弱。当唇口高度和倾斜角均为零时, 模型退化为经典的 Griffith 裂纹解, 验证了本文方法的正确性。研究结果为 METE 材料的断裂评估与器件设计提供了理论依据。

关键词: 磁-电-热弹性材料, 倾斜唇形延伸裂纹, 场强度因子, 能量释放率, 热渗透边界

PACS: 46.05+b, 46.50.+a, 46.25.-y

1 引 言

在实际服役过程中, 磁电弹性器件常处于交变电磁场或循环机械载荷作用下。材料的介电损耗、磁滞损耗以及热弹性耗散效应会在内部产生热量, 形成热流。此外, 裂纹尖端区域的场集中效应会进一步加剧局部温升, 使得热效应成为影响断裂行为不可忽略的因素。METE 材料作为一种具有力、电、磁、热多场耦合特性的新型智能材料, 在传

基金: 国家自然科学基金 (批准号: 12162027); 内蒙古自然科学基金重点项目 (批准号: 2024ZD21, 2025ZD024); 内蒙古自治区一流学科科研专项项目 (批准号: YLXKZX-NSD-001)

† 通信作者.E-mail: ghmin@163.com

第一作者.E-mail: guozh20256012@163.com

感器、制动器、微机电系统及高温环境下的智能器件等领域具有广阔的应用前景^[1-4]。Lifshitz 等^[1]最早指出磁有序晶体存在磁电效应。与传统压电或压磁材料相比，METE 材料的独特优势在于其力-电-磁-热四场耦合行为，但这也使得其断裂问题更为复杂^[2-7]。特别是在服役过程中，材料内部不可避免会引入微裂纹、孔洞等缺陷，在力、电、磁、热多场耦合载荷下，这些缺陷附近易诱发应力集中，进而引发裂纹萌生与扩展，最终导致器件性能退化甚至失效^[8-10]。特别是在温度变化显著的工作环境中，热应力与热流对裂尖场的耦合效应不可忽视。因此，建立合理的缺陷模型并揭示多场耦合下的断裂行为，对 METE 材料的设计与可靠性评估具有重要的理论意义和工程价值。

针对 METE 材料的断裂问题，学者们已开展了大量研究。在理论建模方面，Wang 和 Zhou^[11] 以及 Tan 等^[12]研究开发了热力学一致的磁电弹性材料脆性断裂的四阶相场模型，提出了一类新颖的对数退化函数，进行了 2D 和 3D 数值模拟，讨论了外部电磁场和边界渗透性对裂纹萌生与扩展的影响；Chen^[13]基于热力学基本原理，建立了磁电弹性固体动态断裂中的能量释放率和路径无关积分，考虑了多场全耦合效应。在典型缺陷模型的解析研究方面，Sulym 等^[14]研究了在远场机械载荷作用下，基体、曲线界面层及夹杂物三相体系的弹性力学行为；Tian 等^[15]研究有限厚度横观各向同性磁电弹性层内含埋藏币型圆盘裂纹在力、电、磁联合载荷作用下的断裂特性。此外，场强度因子^[16,17]、能量密度因子^[18,19]和能量释放率^[20-24]常被用作描述裂纹演化的断裂准则。

然而，上述研究大多假设裂纹为直线型或孔边对称型，对实际材料中更常见的具有倾斜角度的唇形延伸裂纹关注甚少。特别地，在包头市稀土研究院相关企业生产的 METE 材料在制备和使用过程中，因 $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$ 两相界面热膨胀系数失配产生裂纹与孔洞等缺陷，观察到了典型的唇形裂纹缺陷^[25]。这类缺陷表现为一个具有一定高度的唇口区域及其两端的延伸裂纹，且唇口与裂纹整体可能相对于载荷方向呈倾斜角度。目前，在热-电-磁部分渗透边界条件下，针对此类倾斜唇形延伸裂纹的断裂模型及其多物理场（热-力-电-磁）耦合行为尚未见报道。

近年来，国内学者^[26-30]对裂纹的偏折、分叉和唇口次生裂纹等经典问题进行了研究，并取得突破性进展。在此启发下，基于 Muskhelishvili 复势理论，构建了倾斜唇形延伸裂纹的缺陷模型。利用保角变换技术将物理平面上含倾斜唇形裂纹的外部区域映射为数学平面上单位圆的外部区域，结合 Stroh 型公式，推导了裂纹尖端处场强度因子和能量释放率的解析表达式。通过数值算例，定量分析了裂纹倾斜角及边界渗透条件（电渗透、磁渗透、热渗透）对场强度因子和能量释放率的影响规律。所得结果可退化为经典唇形

裂纹和 Griffith 裂纹解，验证了模型的有效性。本研究旨在为 METE 材料的断裂评估与热环境下器件优化设计提供理论依据。

2 基本方程

2.1 边值问题

为了便于数学计算，无限大横观各向同性 METE 介质中的某些孔口缺陷模拟如图1所示。设极化方向沿 x_3 轴，各向同性面为与之垂直的 x_1Ox_2 平面。METE 体在远场受均匀的面外剪切机械载荷 σ_{32}^∞ 、面内电载荷 D_2^∞ 、磁载荷 B_2^∞ 以及沿 x_2 方向的均匀热流 q_2^∞ (或温度梯度)。广义载荷向量可记为 $\Sigma_i^\infty = [\sigma_{3i}^\infty, D_i^\infty, B_i^\infty, h_i]^\top$ ($i=1,2$)，其中 $h_i = -\kappa_{ij}\theta_{,j}$ 为热流密度分量。唇形裂纹几何边界不规则(唇口高度 h 、半长为 a ，两端延伸裂纹长分别为 L_1 、 L_2)，内部场实际上会产生畸变，在本文数值算例所取的参数范围 ($h/a \leq 0.5$) 内，误差可控。在反平面剪切问题中，假设孔与裂纹表面不受外力的作用，裂缝内部介质(空气)的材料参数(介电常数 ε_0 、磁导率为 μ_0 、热导率为 κ_0)与外部的 METE 材料参数 (κ_{11} 、 μ_{11} 、 k_{11}) 存在量级差异时，可采用“低介电/低磁导/低热导近似”将内部场近似视为均匀场，这一处理方法已在磁电弹性断裂力学中被广泛采用^[20-24]。

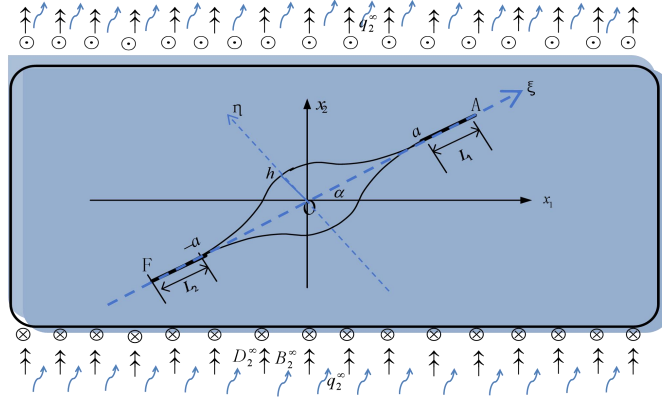


图1. 倾斜的唇形延伸裂纹缺陷模型

Fig.1. Lip-shaped inclined extension crack defect model

裂纹整体相对于 x_1 轴逆时针旋转角度 α ，其中 $\xi = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha$ ，
 $\eta = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha$ 。裂纹边界由唇口弧线和两侧延伸裂纹分段组成：

$$\begin{cases} \eta = \pm h \sqrt{1 - (\xi/a)^2} \text{ (椭圆弧近似)}, & -a \leq \xi \leq a, \\ \eta = 0, & -L_2 - a \leq \xi \leq -a \quad \text{and} \quad a \leq \xi \leq a + L_1 \end{cases}$$

假设孔与裂纹内部的电场、磁场和热场是均匀的，其势函数可表示为：

$$\phi = -E_1^0 x_1 - \lambda_d E_2^0 x_2, \quad \psi = -H_1^0 x_1 - \lambda_b H_2^0 x_2, \quad \theta = -\Theta_1^0 x_1 - \lambda_t \Theta_2^0 x_2$$

其中 ϕ 、 ψ 、 θ 分别为电势、磁势和温度变化 ($\theta = T - T_0$)； E_k^0 ， H_k^0 ， Θ_k^0 ($k=0,1$) 分别表示由远场载荷确定的电场强度、磁场强度和温度梯度分量； λ_d 、 λ_b 和 λ_t 分别为电渗透、磁渗透和热渗透系数，取值范围为 $[0,1]$ 。当 $\lambda_d = \lambda_b = \lambda_t = 0$ 时，边界条件退化为全非渗透（绝缘、绝热）情况；当 $\lambda_d = \lambda_b = \lambda_t = 1$ 时，退化为全渗透（导电、导磁、等温）情况。为简化分析，本文将这些渗透系数视为常数，采用线性插值描述部分渗透边界。

稳态热传导满足傅里叶定律：

$$q_i = -\lambda_{ij} T_{,j} \quad (i, j = 1, 2)$$

其中 q_i 为热流密度分量， λ_{ij} 为热传导系数张量。对于横观各向同性材料， $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda$ ，非对角元为零。

为了研究问题的方便，建立空间直角坐标系，并将电磁极化方向记为 x_3 轴方向，在 $x_1 O x_2$ 平面上各向同性，本构方程可表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{3j} \\ D_j \\ B_j \\ S \end{bmatrix} = C_0 \begin{bmatrix} u_{3,j} \\ \phi_{,j} \\ \psi_{,j} \\ -\Delta T \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

其中

$$C_0 = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & q_{15} & -\beta_{15} \\ e_{15} & -\kappa_{11} & -d_{11} & -p_{15} \\ q_{15} & -d_{11} & -\mu_{11} & -m_{15} \\ -\beta_{15} & -p_{15} & -m_{15} & \rho c / T_0 \end{bmatrix}$$

其中矩阵 C_0 为非奇异。 u ， ϕ ， ψ ， $\Delta T = T - T_0$ 分别表示位移、电势、磁势和温度变化； σ_{3j} ， D_j ， B_j ， S 分别表示应力、电位移、磁感强度和熵密度； q_{15} ， e_{15} ， d_{11} 分别表示压磁、压电、磁电耦合常数； μ_{11} ， κ_{11} ， c_{44} 分别表示磁导率、介电常数和弹性常数； β_{15} ， p_{15} ， m_{15} 分别表示热力耦合常数、热电耦合常数、热磁耦合常数； ρ 为密度， c 为比热容， T_0 为参考温度。

在不考虑体电荷密度、体电流、体力和内热源的情况下，平衡方程和热传导方程可统一表示为

$$\sigma_{3j,j}=0, \quad D_{j,j}=0, \quad B_{j,j}=0, \quad q_{j,j}=0 \quad (j=1,2) \quad (2)$$

将本构方程 (1) 代入式 (2)，并注意到材料常数矩阵 C_0 非奇异，可得广义位移向量

$\mathbf{u}=[u_3, \phi, \psi, T]^T$ 的每个分量均满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2) \quad (3)$$

因此， $\mathbf{u}$ 可表示为解析函数向量的实部：

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{f}(z)} \quad , \quad z = x_1 + ix_2 \quad (4)$$

其中 $\mathbf{f}(z)=[f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)]^T$ 是解析函数向量。引入广义应力函数向量 Φ ，可得

$$\Phi = C_0 \mathbf{f}(z) + \overline{C_0 \mathbf{f}(z)} \quad (5)$$

其中 $\Phi=[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4]^T$ ，应力函数向量与解析函数向量的关系为：

$$\Phi_k = (C_0 \mathbf{f}(z))_k + \overline{(C_0 \mathbf{f}(z))_k} \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (6)$$

本文模型基于稳态热传导、小变形线弹性、反平面剪切及弱热弹性耦合假设。本构方程 (1) 已计入热应力（温度对应力影响），但忽略应力对热流的反向耦合——该高阶项在稳态小变形问题中可安全忽略^[20-22]。模型适用于METE器件在准静态热-电-磁-力载荷下的断裂评估。

2.2 磁-电-热部分渗透边界条件

裂纹和唇口表面的力学、电学、磁学和热学边界条件可转化为矢量函数 $\mathbf{f}(z)$ ^[25]

$$\mathbf{f}(z) = c^\infty z + \mathbf{f}_0(z) \quad (7)$$

其中 c^∞ 是远场载荷条件下的复常数向量， $\mathbf{f}_0(z)$ 是待定的复函数向量，且 $\mathbf{f}(\infty)=0$ 。

由文献[32]，将式 (7) 代入式 (4) 和式 (5) 得

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{2\infty} x_1 - \sum_{1\infty} x_2 + 2\text{Re}[\mathbf{\kappa}_0(z)] \\ \phi &= -E_1^\infty x_1 - E_2^\infty x_2 + 2\text{Im}[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(z)]_2 \\ \psi &= -H_1^\infty x_1 - H_2^\infty x_2 + 2\text{Im}[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(z)]_3 \\ T &= -\Theta_1^\infty x_1 - \Theta_2^\infty x_2 + 2\text{Im}[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(z)]_4 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 $E_i^\infty, H_i^\infty, \Theta_i^\infty$ 分别为远场电场、磁场和温度梯度分量； $[\cdot]_j$ 代表向量 $[\cdot]$ 的第 j 行元素

($j=1, 2, 3, 4$)， $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_0^{-1}$ ， $\mathbf{\kappa}_0(z) = \mathbf{C}\mathbf{f}_0(z)$ ， $\mathbf{C} = i\mathbf{C}_0$ (i 为虚数单位)。

在唇口和裂纹面上，满足如下势和法向通量的连续条件：

$$\phi_0 = \phi, \varphi_0 = \varphi, \psi_0 = \psi, T_0 = T \quad (9)$$

将式(8)代入式(9)，有

$$\left. \begin{aligned} \sum^{2\infty} x_1 - \sum^{1\infty} x_2 + 2\text{Re}[\kappa_0(z)] &= 0 \\ (E_1^\infty - E_1^0)x_1 + (E_2^\infty - \lambda_d E_2^0)x_2 - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(z)]_2 &= 0 \\ (H_1^\infty - H_1^0)x_1 + (H_2^\infty - \lambda_b H_2^0)x_2 - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(z)]_3 &= 0 \\ (\Theta_1^\infty - \Theta_1^0)x_1 + (\Theta_2^\infty - \lambda_t \Theta_2^0)x_2 - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(z)]_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中

$$\Sigma^{2\infty} = [\sigma_{32}^\infty, D_2^\infty - \lambda_d D_2^0, B_2^\infty - \lambda_b B_2^0, q_2^\infty - \lambda_t q_2^0]^T,$$

$$\Sigma^{1\infty} = [\sigma_{31}^\infty, D_1^\infty - D_1^0, B_1^\infty - B_1^0, q_1^\infty - q_1^0]^T$$

为求解以上边值问题，式（10）可以进一步写为

$$\left. \begin{aligned} \sum^{2\infty} \text{Re}[z] - \sum^{1\infty} \text{Im}[z] + 2\text{Re}[\kappa_0(z)] &= 0 \\ (E_1^\infty - E_1^0)\text{Re}[z] + (E_2^\infty - \lambda_d E_2^0)\text{Im}[z] - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(z)]_2 &= 0 \\ (H_1^\infty - H_1^0)\text{Re}[z] + (H_2^\infty - \lambda_b H_2^0)\text{Im}[z] - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(z)]_3 &= 0 \\ (\Theta_1^\infty - \Theta_1^0)\text{Re}[z] + (\Theta_2^\infty - \lambda_t \Theta_2^0)\text{Im}[z] - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(z)]_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式（11）可表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\sum^{2\infty}(z+\bar{z}) + \frac{i}{2}\sum^{1\infty}(z-\bar{z}) + 2\text{Re}[\mathbf{Y}\kappa_0(z)] &= 0 \\ \frac{1}{2}(E_1^\infty - E_1^0)(z+\bar{z}) - \frac{i}{2}(E_2^\infty - \lambda_d E_2^0)(z-\bar{z}) - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(z)]_2 &= 0 \\ \frac{1}{2}(H_1^\infty - H_1^0)(z+\bar{z}) - \frac{i}{2}(H_2^\infty - \lambda_b H_2^0)(z-\bar{z}) - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(z)]_3 &= 0 \\ \frac{1}{2}(\Theta_1^\infty - \Theta_1^0)(z+\bar{z}) - \frac{i}{2}(\Theta_2^\infty - \lambda_t \Theta_2^0)(z-\bar{z}) - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(z)]_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3 问题的解

为了求解方便，将图1中物理平面上倾斜的唇口裂纹外部区域映射到数学平面上单位圆外部区域如图2

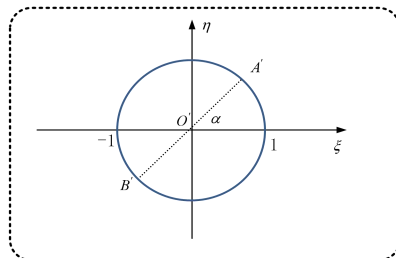


图2. 唇口外部区域到单位圆外部的保角变换

Fig.2. Conformal transformation from the external region of the lip to the exterior domain of the unit circle

其中 $A \rightarrow A', F \rightarrow B', z = \infty \leftrightarrow \zeta = \infty$

3.1 拱形变换函数

为了求解式 (4) 中的复函数向量, 利用保角变换技术构建变换函数如下

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a\rho e^{i\alpha}}{2} \left\{ \mu(\zeta) - \frac{m}{\mu(\zeta)} + \frac{\mu(\zeta)}{\rho^2[\mu^2(\zeta) - m]} \right\} \quad (13)$$

其中

$$\frac{h}{a} = \frac{2m}{1-m^2}, \quad \rho = \frac{1}{1-m} \quad (0 \leq m < 1) \quad (14)$$

$$\mu(\zeta) = \frac{\zeta}{4e^{i\alpha}} \left[\varepsilon_1 \left(1 + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)^2 + \varepsilon_2 \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)^2 + \sqrt{\left(\varepsilon_1 \left(1 + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)^2 + \varepsilon_2 \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{\zeta}\right)^2\right)^2 - \frac{16e^{2i\alpha}}{\zeta^2}} \right] \quad (15)$$

其中

$$\varepsilon_i = \frac{(1+l_i)^2 + b^2 + b + (1+l_i)\sqrt{l_i^2 + 2l_i + b^2}}{(1+b)(1+l_i + \sqrt{l_i^2 + 2l_i + b^2})} \quad (i=1,2), \quad (16)$$

$$m = \frac{b-1}{b+1}$$

$$\omega(e^{i\alpha}) = (a+L_1)e^{i\alpha} = \frac{a}{2} \left(1+l_1 + \frac{1}{1+l_1}\right) e^{i\alpha}, \quad (17a)$$

$$\omega(e^{i(\alpha+\pi)}) = (a+L_2)e^{i(\alpha+\pi)} = \frac{a}{2} \left(1+l_2 + \frac{1}{1+l_2}\right) e^{i(\alpha+\pi)} \quad (17b)$$

公式 (13) 将含有唇形裂纹的无限大物理平面变换到数学平面上的单位圆外部区域. 通过新映射函数, 式 (12) 转化为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum^{2\infty} (\omega(\sigma) + \overline{\omega(\sigma)}) + \frac{i}{2} \sum^{1\infty} (\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}) + 2\text{Re}[\kappa_0(\sigma)] = 0 \\ & \frac{1}{2} (E_1^\infty - E_1^0)(\omega(\sigma) + \overline{\omega(\sigma)}) - \frac{i}{2} (E_2^\infty - \lambda_d E_2^0)(\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}) - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(\sigma)]_2 = 0 \\ & \frac{1}{2} (H_1^\infty - H_1^0)(\omega(\sigma) + \overline{\omega(\sigma)}) - \frac{i}{2} (H_2^\infty - \lambda_b H_2^0)(\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}) - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(\sigma)]_3 = 0 \\ & \frac{1}{2} (\Theta_1^\infty - \Theta_1^0)(\omega(\sigma) + \overline{\omega(\sigma)}) - \frac{i}{2} (\Theta_2^\infty - \lambda_b \Theta_2^0)(\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}) - 2\text{Im}[\mathbf{Y}\kappa_0(\sigma)]_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

当 $\alpha = 0$ 时 $\overline{\omega(\sigma)} = \omega(\sigma)$ ，式 (18) 可简化为

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^{2\infty} \omega(\sigma) + \mathbf{Cf}_0(\sigma) + \overline{\mathbf{Cf}_0(\sigma)} &= 0 \\ (E_1^\infty - E_1^0) \omega(\sigma) + i[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma) - \overline{\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma)}]_2 &= 0 \\ (H_1^\infty - H_1^0) \omega(\sigma) + i[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma) - \overline{\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma)}]_3 &= 0 \\ (\Theta_1^\infty - \Theta_1^0) \omega(\sigma) + i[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma) - \overline{\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma)}]_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

对式 (19) 两端乘以 $d\sigma/[2\pi i(\sigma - \zeta)]$ ，其中 ζ 为单位圆内任一点，沿单位圆周 γ 进行

Cauchy积分得

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^{2\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mathbf{Cf}_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\mathbf{Cf}_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma &= 0 \\ (E_1^\infty - E_1^0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + i \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma) - \overline{\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma)}]_2}{\sigma - \zeta} d\sigma &= 0 \\ (H_1^\infty - H_1^0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + i \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma) - \overline{\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma)}]_3}{\sigma - \zeta} d\sigma &= 0 \\ (\Theta_1^\infty - \Theta_1^0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + i \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma) - \overline{\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\sigma)}]_4}{\sigma - \zeta} d\sigma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中 $\mathbf{f}_0(\zeta)$ 为单位圆内的解析函数，对单位圆内任一点 ζ ，式 (20) 可化为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Cf}_0(\zeta) &= -\Sigma^{2\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \\ i[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\zeta)]_2 &= -(E_1^\infty - E_1^0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \\ i[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\zeta)]_3 &= -(H_1^\infty - H_1^0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \\ i[\mathbf{Y}\mathbf{\kappa}_0(\zeta)]_4 &= -(\Theta_1^\infty - \Theta_1^0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由式 (13) 可知， $\omega(\zeta)$ 除一级极点 $\zeta = e^{i\alpha}$ ， $\zeta = e^{i(\pi+\alpha)}$ 外，在单位圆内是解析的，由留数定理得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \omega(\zeta) - \frac{a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4\zeta} \quad (22)$$

将式 (22) 代入式 (21)，并由文献[27]得

$$E_1^\infty = E_1^0, \quad H_1^\infty = H_1^0, \quad \Theta_1^\infty = \Theta_1^0$$

$$D_2^\infty - \lambda_d D_2^0 = \frac{e_{15}}{c_{44}} \sigma_{32}^\infty, \quad B_2^\infty - \lambda_b B_2^0 = \frac{q_{15}}{c_{44}} \sigma_{32}^\infty, \quad q_2^\infty - \lambda_q q_2^0 = 0$$

电位移分量 D_2^0 与电场的可通性 λ_d 有关，磁感应分量 B_2^0 与磁场的可通性 λ_b 有关，热流密

度 q_2^0 与热流的可通性 λ_t 有关。

对 $\mathbf{F}_0(\zeta) = d\mathbf{f}_0(\zeta)/d\zeta$ ， $\omega'(\zeta)$ 可以由 (13) 式求导得

$$\omega'(\zeta) = \frac{a\rho e^{i\alpha}}{2} \left\{ 1 + \frac{m}{\mu^2(\zeta)} - \frac{\mu^2(\zeta) + m}{\rho^2[\mu^2(\zeta) - m]^2} \right\} \mu'(\zeta) \quad (23)$$

将式 (13) 代入式 (22)，并由式 (23) 得

$$\mathbf{CF}_0 = -[\omega'(\zeta) + \frac{a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)e^{2i\alpha}}{4\zeta^2}] \varphi_1^\infty \quad (24)$$

其中

$$\varphi_{,1}^\infty = (\sigma_{32}^\infty \cos \alpha, \Delta D_2^\infty, \Delta B_2^\infty, \Delta q_2^\infty)^T$$

当裂纹面对电、磁、热完全非渗透时，对应的渗透系数为零，当裂纹面对电、磁、热完全渗透时，对应的渗透系数为1。在部分渗透情况下，采用线性插值法，将两种极端情况按渗透系数加权平均得

$$\Delta D_2^\infty = (1 - \lambda_d) D_2^\infty \cos \alpha + \lambda_d \frac{e_{15}}{c_{44}} \sigma_{32}^\infty \cos \alpha \quad (25a)$$

$$\Delta B_2^\infty = (1 - \lambda_b) B_2^\infty \cos \alpha + \lambda_b \frac{q_{15}}{c_{44}} \sigma_{32}^\infty \cos \alpha \quad (25b)$$

$$\Delta q_2^\infty = (1 - \lambda_t) q_2^\infty \cos \alpha \quad (25c)$$

其中式 (25a) 第一项来自远场电位移的投影，第二项来自压电效应的贡献；(25b) 的第一项来自远场磁感应的投影，第二项来自压磁效应，即应力通过压磁常数 q_{15} 诱导磁感应， $\frac{q_{15}}{c_{44}}$ 将应力转换为等效磁感应；对于式 (25c)，稳态热传导中，热流与应力之间没有直接线性耦合，若考虑热弹性耦合（如热应力引起的热流），通常为瞬态效应或高阶小量，在稳态反平面问题中被忽略。

从等效介质理论角度看，部分渗透裂纹面可视为完全非渗透与完全渗透两种极限组分以并联方式形成的等效界面，其中 λ 即为导通组分的面积分数（或“导通比例”）。从控制方程属性看，本构方程 (1) 和平衡方程 (2) 均为线性系统，边界条件的线性组合是自洽的数学处理； $\lambda = 0$ 和 $\lambda = 1$ 分别给出全非渗透和全渗透极限，线性插值则自然描述了介于两者之间的连续过渡。该线性插值模型在磁电弹性断裂力学中已被广泛采用

[25,32,33], 并获得了实验与数值研究的支持——在考虑裂纹张开位移变化的非线性本构关系中, 电边界条件会从全非渗透连续过渡至全渗透, 证实了连续过渡描述的合理性。

3.2 场强度因子

场强度因子定义为

$$\kappa = \begin{Bmatrix} K_{\sigma} \\ K_D \\ K_B \\ K_q \end{Bmatrix} = \lim_{z \rightarrow z_j} 2\sqrt{2\pi(z - z_j)} \mathbf{CF}_0 \quad (26)$$

其中 $z_1 = (a + L_1)e^{i\alpha}$, $z_2 = (a + L_2)e^{i(\alpha+\pi)}$ 而 K_{σ}^j , K_D^j , K_B^j 分别表示裂尖A或F处的场强度因子。将式 (13) 代入式 (26), 在 ζ 平面上, 式 (26) 变为

$$\begin{Bmatrix} K_{\sigma_{32}}^A \\ K_{D_2}^A \\ K_{B_2}^A \\ K_{q_2}^A \end{Bmatrix} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow e^{i\alpha}} \sqrt{\omega(\zeta) - \omega(e^{i\alpha})} \frac{\mathbf{CF}_0(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (27)$$

将式 (23) 和式 (24) 代入式 (27), 利用洛必达法则可得

$$\begin{Bmatrix} K_{\sigma_{32}}^A \\ K_{D_2}^A \\ K_{B_2}^A \\ K_{q_2}^A \end{Bmatrix} = \frac{a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1 + e^{-2i\alpha}}{2\sqrt{\omega''(e^{i\alpha})}} \begin{pmatrix} \sigma_{32}^{\infty} \cos \alpha \\ \Delta D_2^{\infty} \\ \Delta B_2^{\infty} \\ \Delta q_2^{\infty} \end{pmatrix} \quad (28)$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 在不考虑热流密度时, 以上结果与文献[30]的结果一致。

由式 (22) 和式 (23) 可得

$$\omega''(e^{i\alpha}) = \frac{a\rho}{4} \left\{ 1 + \frac{m}{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2} - \frac{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2 + m}{\rho^2[(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2 - m]^2} \right\} \cdot \frac{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{e^{2i\alpha} \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1}} \quad (29)$$

式 (28) 可进一步表示为

$$\begin{Bmatrix} K_{\sigma_{32}}^A \\ K_{D_2}^A \\ K_{B_2}^A \\ K_{q_2}^A \end{Bmatrix} = \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} \sigma_{32}^{\infty} \cos \alpha \\ \Delta D_2^{\infty} \\ \Delta B_2^{\infty} \\ \Delta q_2^{\infty} \end{pmatrix} \kappa \quad (30)$$

其中 κ 称为应力强度因子系数, 可计算为

$$\kappa = \frac{(1 + e^{-2i\alpha})e^{i\alpha}\sqrt{a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}}{2\sqrt{\left[1 + \frac{m}{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2} - \frac{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2 + m}{\rho^2[(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2 - m]^2}\right] \cdot \frac{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - 1}}}} \quad (31)$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 式 (31) 与文献[30]的结果一致。

3.3 能量释放率

对于磁电热弹部分渗透型裂纹, 定义能量释放率的计算公式^[27,28]为

$$G = \frac{1}{4}(\kappa)^T H \kappa \quad (32)$$

其中

$$H = 2C_0^{-1} = \frac{2}{\det C_0} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \quad (33)$$

其中

$$H_{11} = \kappa_{11}m_{15}^2 - \frac{\rho c}{T_0}d_{11}^2 + \mu_{11}p_{15}^2 - 2d_{11}m_{15}p_{15} + \frac{\rho c}{T_0}\kappa_{11}\mu_{11},$$

$$H_{22} = -\frac{\rho c}{T_0}q_{15}^2 + \mu_{11}\beta_{15}^2 - c_{44}m_{15}^2 + 2m_{15}q_{15}\beta_{15} - c_{44}\mu_{11}\frac{\rho c}{T_0},$$

$$H_{12} = H_{21} = -\frac{\rho c}{T_0}\mu_{11}e_{15} - e_{15}m_{15}^2 + \frac{\rho c}{T_0}d_{11}q_{15} + m_{15}p_{15}q_{15} - d_{11}m_{15}\beta_{15} + \mu_{11}p_{15}\beta_{15},$$

$$H_{13} = H_{31} = -\frac{\rho c}{T_0}d_{11}e_{15} - e_{15}m_{15}p_{15} + \frac{\rho c}{T_0}\kappa_{11}q_{15} - \kappa_{11}\beta_{15}m_{15} + p_{15}^2q_{15} + p_{15}\beta_{15}d_{11},$$

$$H_{14} = H_{41} = e_{15}d_{11}m_{15} - \mu_{11}p_{15}e_{15} - \kappa_{11}q_{15}m_{15} - \kappa_{11}\mu_{11}\beta_{15} + d_{11}p_{15}q_{15} + d_{11}^2\beta_{15},$$

$$H_{23} = H_{32} = -c_{44}\frac{\rho c}{T_0}d_{11} - c_{44}p_{15}m_{15} - \frac{\rho c}{T_0}e_{15}q_{15} + e_{15}m_{15}\beta_{15} + p_{15}q_{15}\beta_{15} + d_{11}\beta_{15}^2,$$

$$H_{24} = H_{42} = c_{44}d_{11}m_{15} - c_{44}\mu_{11}p_{15} + e_{15}m_{15}q_{15} + e_{15}\mu_{11}\beta_{15} - p_{15}q_{15}^2 - d_{11}q_{15}\beta_{15},$$

$$H_{33} = -\frac{\rho c}{T_0}e_{15}^2 + \kappa_{11}\beta_{15}^2 - c_{44}p_{15}^2 + 2e_{15}p_{15}\beta_{15} - c_{44}\frac{\rho c}{T_0}\kappa_{11},$$

$$H_{34} = H_{43} = c_{44}\kappa_{11}m_{15} - c_{44}d_{11}p_{15} + e_{15}^2m_{15} + d_{11}e_{15}\beta_{15} - q_{15}e_{15}p_{15} - \kappa_{11}q_{15}\beta_{15},$$

$$H_{44} = \mu_{11}e_{15}^2 + \kappa_{11}q_{15}^2 - c_{44}d_{11}^2 - 2d_{11}e_{15}q_{15} + c_{44}\kappa_{11}\mu_{11}$$

将式 (30) 代入式 (32) 得

$$G = \frac{\pi \kappa^2}{2 \det C_0} \Pi \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} \det C_0 = & e_{15}^2 m_{15}^2 - 2c_{44} d_{11} m_{15} p_{15} - 2e_{15} m_{15} p_{15} q_{15} + p_{15}^2 q_{15}^2 + 2d_{11} e_{15} m_{15} \beta_{15} + \\ & 2d_{11} p_{15} q_{15} \beta_{15} + d_{11}^2 \beta_{15}^2 + c_{44} m_{15}^2 \kappa_{11} - 2m_{15} q_{15} \beta_{15} \kappa_{11} - c_{44} d_{11}^2 \frac{\rho c}{T_0} - 2d_{11} e_{15} q_{15} \frac{\rho c}{T_0} + \\ & q_{15}^2 \kappa_{11} \frac{\rho c}{T_0} + c_{44} p_{15}^2 \mu_{11} - 2e_{15} p_{15} \beta_{15} \mu_{11} - \beta_{15}^2 \kappa_{11} \mu_{11} + e_{15}^2 \frac{\rho c}{T_0} \mu_{11} + c_{44} \kappa_{11} \frac{\rho c}{T_0} \mu_{11} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & H_{11} (\sigma_{32}^\infty \cos \alpha)^2 + H_{21} \Delta D_2^\infty \sigma_{32}^\infty \cos \alpha + H_{31} \Delta B_2^\infty \sigma_{32}^\infty \cos \alpha + H_{41} \Delta q_2^\infty \sigma_{32}^\infty \cos \alpha + \\ & H_{12} \Delta D_2^\infty \sigma_{32}^\infty \cos \alpha + H_{22} (\Delta D_2^\infty)^2 + H_{32} \Delta D_2^\infty \Delta B_2^\infty + H_{42} \Delta q_2^\infty \Delta D_2^\infty + \\ & H_{13} \Delta B_2^\infty \sigma_{32}^\infty \cos \alpha + H_{23} \Delta D_2^\infty \Delta B_2^\infty + H_{33} (\Delta B_2^\infty)^2 + H_{43} \Delta q_2^\infty \Delta B_2^\infty \\ & H_{14} \Delta q_2^\infty \sigma_{32}^\infty \cos \alpha + H_{24} \Delta D_2^\infty \Delta q_2^\infty + H_{34} \Delta B_2^\infty \Delta q_2^\infty + H_{44} (\Delta q_2^\infty)^2 \end{aligned} \quad (36)$$

4 结果讨论

式 (31) 表示唇形不对称裂缝的无量纲应力强度因子，在特殊情况下可以退化成特殊的缺陷模型。

(I) 如果唇形两边的延伸裂缝长度相等，即 $L_1 = L_2$ ， $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ，式 (31) 可以化为

$$\kappa^{(1)} = \frac{(1 + e^{-2i\alpha}) e^{i\alpha} \sqrt{2a\rho\varepsilon}}{2 \sqrt{\left[1 + \frac{m}{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2} - \frac{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2 + m}{\rho^2 [(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2 - m]^2}\right] \cdot \frac{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}}} \quad (37)$$

(II) 如果唇口左边次生裂纹趋近于零，即 $L_2 \rightarrow 0$ ， $\varepsilon = \varepsilon_1$ ， $\varepsilon_2 \rightarrow 1$ ，式 (31) 可以变为

$$\kappa^{(2)} = \frac{(1 + e^{-2i\alpha}) e^{i\alpha} \sqrt{a\rho(1 + \varepsilon)}}{2 \sqrt{\left[1 + \frac{m}{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2} - \frac{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2 + m}{\rho^2 [(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2 - m]^2}\right] \cdot \frac{(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}}} \quad (38)$$

(III) 如果 $h \rightarrow 0$ ， $m \rightarrow 0$ ， $\alpha \rightarrow 0$ ， $\beta \rightarrow 0$ 式 (31) 可以化简为

$$\kappa^{(3)} = \sqrt{\frac{2a + L_1 + L_2}{2}} \quad (39)$$

(IV) 如果 $L_1 \rightarrow 0$, $L_2 \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$, 式(31)进一步化简为

$$\kappa^{(4)} = \sqrt{a} \quad (40)$$

式 (39) 和式 (40) 都是典型的 III 型无量纲 Griffith 裂纹的精确解.

(V) 如果唇口两边的次生裂纹都趋近于零, 即 $L_1 \rightarrow 0$, $L_2 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \rightarrow 1$, $\alpha \rightarrow 0$ 时

(13) 可化简为

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a\rho e^{i\alpha}}{2} \left[\frac{e^{i\alpha}}{\zeta} - \frac{m\zeta}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}\zeta}{\rho^2(e^{2i\alpha} - m\zeta^2)} \right] \quad (41)$$

其中 $\omega(e^{i\alpha}) = ae^{i\alpha}$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, 式 (31) 可化简为

$$\kappa^{(5)} = \frac{\sqrt{a}(1 - \delta + \sqrt{\delta^2 + 1})}{2} \quad (42)$$

其中 $\delta = \frac{h}{a} = \frac{2m}{1-m^2}$. 该结果与文献[30-33]的相关结果一致, 与有限元结果也是一致的如图 3。

5 数值算例

本文采用 $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$ 复合材料常数^[21,32] (见表1) 在宏观尺度上, 被视为均匀、各向同性的等效介质, 源于细观力学均匀化方法, 满足Muskhelishvili理论对均匀各向同性介质的要求。两相界面对裂纹扩展的细观影响超出本文范围, 留待后续研究。

表 1 磁电热弹性复合材料 $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$ 的材料常数

Table1 Material constants of METE composite materials $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$

c_{44}/GPa	$e_{15}/(\text{C}/\text{m}^2)$	$\kappa_{11}/[\text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)]$	$q_{15}/[\text{N}/(\text{A} \cdot \text{m})]$	$\mu_{11}/(\text{N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2)$	$d_{11}/(\text{Ns}/\text{VC})$
44	5.8	5.64×10^{-9}	275	2.97×10^{-4}	5.2×10^{-12}
$\beta_{15}/[\text{N}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)]$	$p_{15}/[\text{C}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$	$m_{15}/[\text{N}/(\text{A} \cdot \text{m} \cdot \text{K})]$	$\rho c/T_0[\text{J}/(\text{m}^3 \cdot \text{K}^2)]$	$G_{cr}/(\text{N}/\text{m})$	
0.56×10^6	0.28×10^{-4}	1×10^{-3}	1.05×10^4	5.0	

其中 G_{cr} 表示临界能量释放率。取 $\sigma_{32}^\infty = 4\text{MPa}$, $D_2^\infty = 10^{-3}\text{C}/\text{m}^2$, $B_2^\infty = 4 \times 10^{-2}$, $q_2^\infty = 10^3\text{W}/\text{m}^2$

5.1 各物理场载荷的典型量级与主导因素分析

在分析数值结果之前，有必要对各物理场载荷的实际工程量级及耦合效率进行评估，以明确影响裂尖断裂行为的主导因素。表1中材料常数之间的量级差异，决定了不同物理场对裂尖端响应的贡献程度，各类载荷的典型工程量级与耦合路径如下：

表2 四类物理场载荷的典型量级、耦合路径与主导性评估

Table 2. Typical magnitudes, coupling paths, and dominance assessment of four types of physical field loads.

载荷类型	典型量级	耦合路径	主导性评估
σ_{32}^{∞}	1~10 MPa	直接驱动	主导
q_2^{∞}	$10^2 \sim 10^3 \text{ W/m}^2$	热 $\rightarrow$ 力(热膨胀适配)	强
D_2^{∞}	$10^{-4} \sim 10^{-3} \text{ C/m}^2$	电 $\rightarrow$ 力(压电耦合)	中等
B_2^{∞}	$10^{-3} \sim 10^{-2} \text{ N/(A}\cdot\text{m)}$	磁 $\rightarrow$ 力(压磁耦合)	较弱

基于上述量级与耦合效率的综合评估，四类载荷对裂尖断裂行为的主导性排序为：

机械载荷>热载荷>电载荷>磁载荷

值得特别关注的是，在极端物理环境下，某些通常次要的因素可能跃升为主导。例如，在核反应堆或高超音速飞行器等高温、强磁场环境中，热应力与磁致伸缩效应的耦合可能显著放大裂尖的应力集中；而在高电压换能器中，强电载荷引发的力电耦合则可能主导裂纹的萌生与扩展。因此，工程评估中需根据具体服役环境精准识别主导载荷类型。

5.2 几何参数与渗透系数对断裂参数的影响

图3给出了式（37）-（42）所定义的无量纲应力强度因子（SIFs）的演化规律，其中图3(a)为 $\kappa^{(1)}$ 、 $\kappa^{(2)}$ 、 $\kappa^{(5)}$ 随无量纲几何参数 h/a 的变化曲线：随着唇口高度的增大，各无量纲应力强度因子持续衰减并逐渐趋于稳定。该结果表明，提升构件相对厚度比 h/a 能够有效削弱裂纹尖端场集中程度，降低无量纲应力强度因子，进而改善磁电热弹性结构的抗断裂性能。图3(b)展示了 $\kappa^{(3)}$ 、 $\kappa^{(4)}$ 随裂纹半长 a 的变化规律，可见无量纲应力强度因子随裂纹半长 a 单调递增；裂纹尺寸越大，裂纹尖端多场耦合集中效应越剧烈，结构发生断裂失效的风险越高。对比所有曲线可以发现，理论解析解与有限元数值解吻合良好，验证了本文解析模型的有效性。

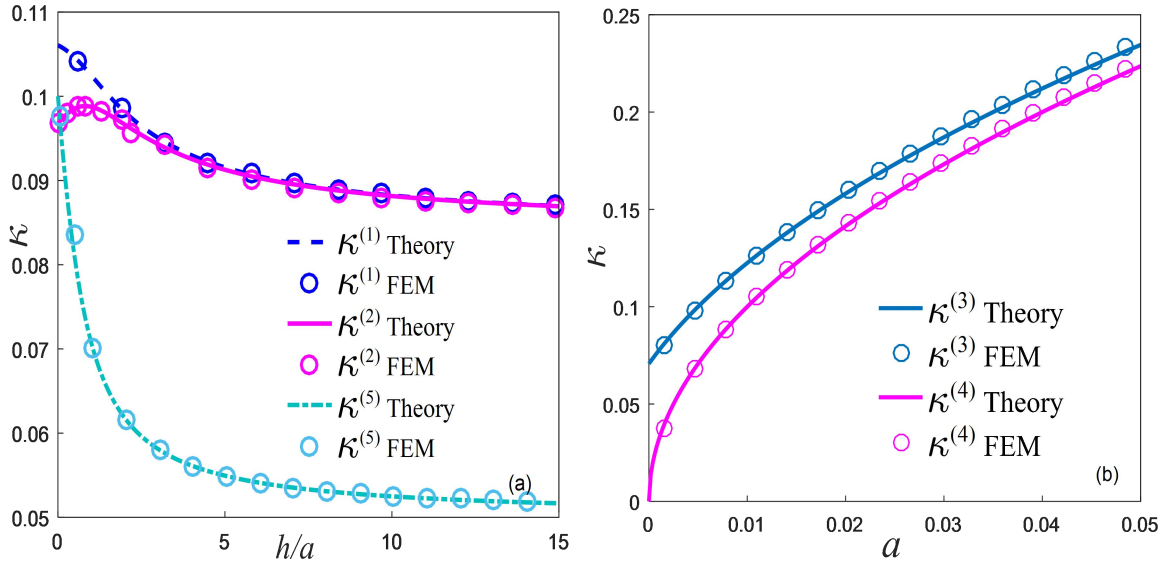


图3 无量纲应力强度因子 (SIFs)的演化规律(a) 随无量纲几何参数 h/a 的变化曲线
(b) 随裂纹半长 a 的变化曲线

Fig. 3. Variations of dimensionless stress intensity factors (SIFs) (a) Curves varying with dimensionless geometric parameter h/a ; (b) Curves varying with crack half-length a

图4~图7分别给出了 $a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$ 时无量纲应力强度因子、电位移强度因子、磁感应强度因子和热流强度因子随裂纹倾斜角 α 的变化曲线。以图4为例，当次生裂纹长度 L_1 取不同值时，各无量纲强度因子均随裂纹倾斜角 α 的增大而单调递减并趋近于零。这表明，倾斜角的增加可有效抑制裂尖应力、电场、磁场和温度场的奇异性，从而削弱了各物理场对裂纹扩展的驱动作用。同时，在倾斜角 α 固定时，次生裂纹长度 L_1 越大，应力强度因子越大，表明裂纹尺寸的增大会加剧裂尖的应力集中效应。图5~图7进一步考察了渗透系数对各物理场强度因子的调控作用。以图5为例，当电渗透系数 $\lambda_d=0, 0.5, 1$ 时，无量纲电位移强度因子随 α 的增大而单调递减，表明增强裂纹面的电渗透性可有效耗散裂尖积聚的电场能量，削弱电位移奇异性。类似的，图6和图7分别表明磁渗透系数 λ_b 和热渗透系数 λ_t 的增大同样导致磁感应强度因子和热流强度因子的减小。值得关注的是，热渗透系数对热流强度因子的调控幅度最为显著，当 λ_t 从0增大到1时，热流强度因子的降幅明显大于电、磁两种情形，表明热边界条件在METE材料断裂分析中具有不可忽视的影响，合理调控裂纹面的热渗透性可有效抑制热驱动下的裂纹扩展。

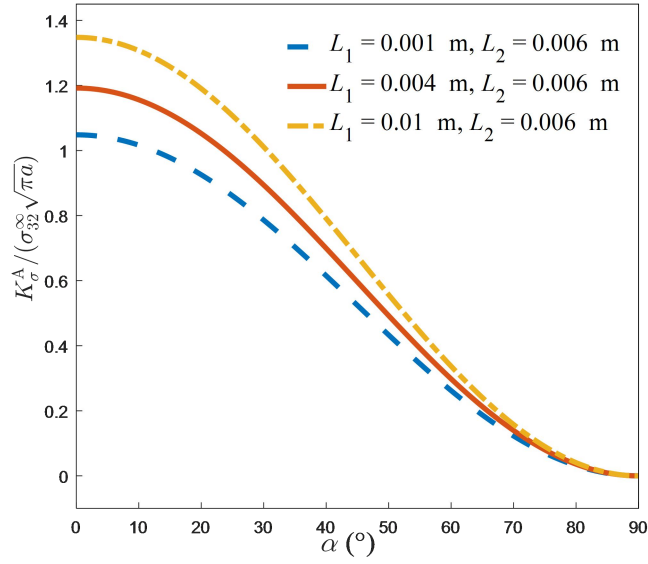


图4 不同裂纹长度下无量纲应力强度因子随倾斜角 α 的变化曲线
($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$)

Fig.4. Variation of dimensionless stress intensity factor with inclination angle α for different crack lengths ($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$)

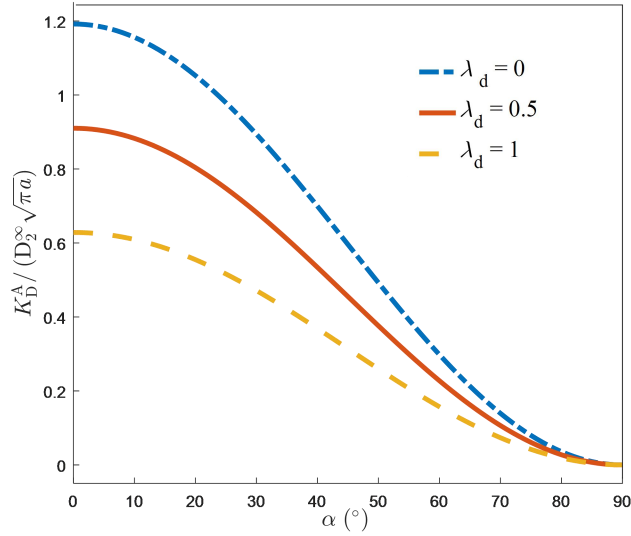


图5 不同电渗透系数下无量纲电位移强度因子随倾斜角 α 的变化曲线
($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$, $L_1=0.04\text{m}$, $L_2=0.006\text{m}$)

Fig.5. Variation of dimensionless electric displacement intensity factor with inclination angle α for different electric permeability coefficients ($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$, $L_1=0.04\text{m}$, $L_2=0.006\text{m}$)

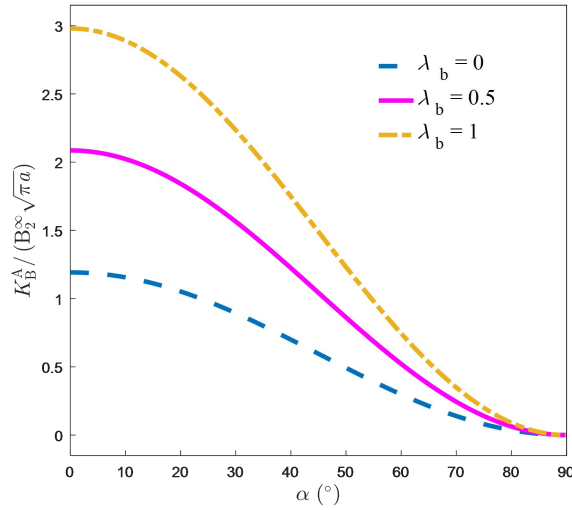


图 6 不同磁渗透系数下无量纲磁感应强度因子随倾斜角 α 的变化曲线

$$(a=0.01\text{m}, h=0.005\text{m}, L_1=0.04\text{m}, L_2=0.006\text{m})$$

Fig.6. Variation of dimensionless magnetic induction intensity factor with inclination angle α for different magnetic permeability coefficients

$$(a=0.01\text{m}, h=0.005\text{m}, L_1=0.04\text{m}, L_2=0.006\text{m})$$

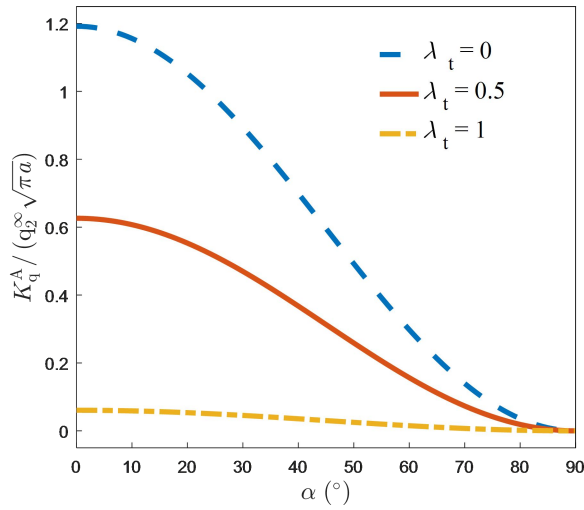


图 7 不同热渗透系数下无量纲热流强度因子随倾斜角 α 的变化曲线

$$(a=0.01\text{m}, h=0.005\text{m}, L_1=0.04\text{m}, L_2=0.006\text{m})$$

Fig.7. Variation of dimensionless heat flux intensity factor with inclination angle α for different thermal permeability coefficients ($a=0.01\text{m}, h=0.005\text{m}, L_1=0.04\text{m}, L_2=0.006\text{m}$)

图8展示了的无量纲热流强度因子随热流渗透系数 λ_t 的变化曲线。由图可见，在所有倾斜角取值下，热流强度因子均随 λ_t 的增大而单调递减，表明增强材料的热渗透性可有效抑制裂尖的温度奇异性。此外，当热渗透系数固定时，倾斜角越大，热流强度因子越小，这与图4-图7中倾斜角抑制各物理场奇异性的结论一致。

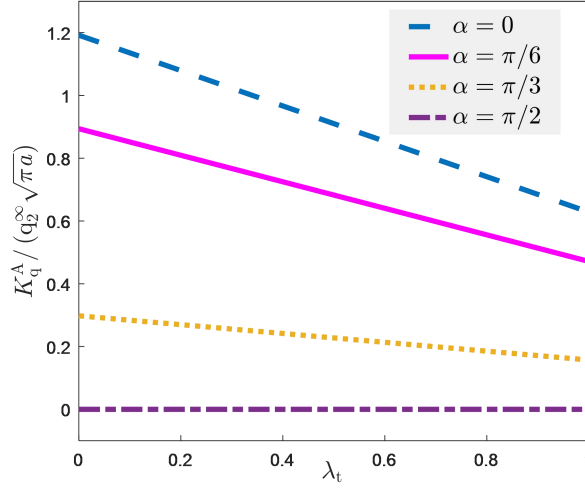


图8 不同倾斜角下无量纲热流强度因子随热流系数 λ_t 的变化曲线

$$(a=0.01\text{m}, h=0.005\text{m}, L_1=0.04\text{m}, L_2=0.006\text{m})$$

Fig.8. Variation of dimensionless heat flux intensity factor with thermal permeability coefficient λ_t for different inclination angle $(a=0.01\text{m}, h=0.005\text{m}, L_1=0.04\text{m}, L_2=0.006\text{m})$

图9给出了磁、电、热三种渗透条件下能量释放率 G 随倾斜角 α 的变化曲线。由图可知，在三种渗透情况下，能量释放率都随倾斜角 α 的增大而单调递减；当 $\alpha \rightarrow 90^\circ$ 时，能量释放率趋近于零，表明裂纹趋于稳定。当倾斜角大于 70° 时，倾斜角的变化对能量释放率的影响已十分微弱。对比不同热渗透系数 λ_t 的曲线可知， λ_t 越大，能量释放率越低。值得注意的是，施加热流载荷（对应 λ_t 较小的情形）会显著增大能量释放率，表明热流本身是裂纹扩展的重要驱动力；而增强热渗透性（对应 λ_t 较大的情形）则可通过热流耗散抑制裂纹扩展。热渗透系数的调控效果在三类渗透系数中最为显著，说明热边界条件在METE材料断裂分析中具有关键作用。图10给出了不同远场应力下能量释放率随电渗透系数 λ_d 的变化曲线。固定 $D_2^\infty = 10^{-3} \text{C/m}^2$ ， $\alpha = \pi/6$ ， $B_2^\infty = 0 \text{N}/(\text{A} \cdot \text{m})$ ， $q_2^\infty = 0 \text{W/m}^2$ 时，能量释放率随远场应力 σ_{32}^∞ 的增大而增大，随电渗透系数的增大而减小，与文献[30-32]的结论相一致。

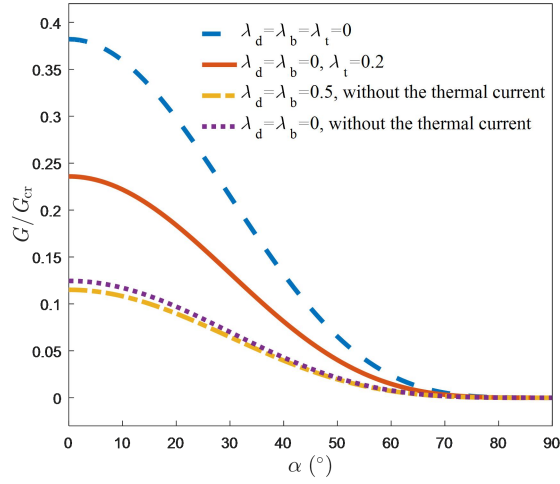


图 9 不同热渗透系数下能量释放率随倾斜角 α 的变化曲线

($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$, $L_1 = 0.04\text{m}$, $L_2 = 0.006\text{m}$)

Fig.9. Variation of energy release rate with inclination angle α for different thermal permeability

coefficients ($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$, $L_1 = 0.04\text{m}$, $L_2 = 0.006\text{m}$)

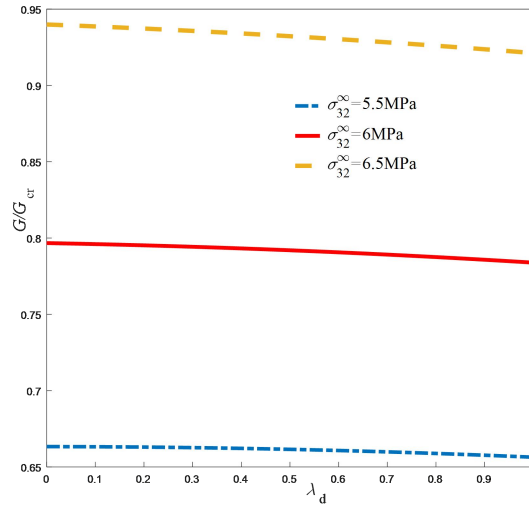


图10 不同远场应力下能量释放率随电渗透系数 λ_d 的变化

($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$, $L_1 = 0.04\text{m}$, $L_2 = 0.006\text{m}$ $D_2^\infty = 10^{-3}\text{C}/\text{m}^2$, $\alpha = \pi/6$, $B_2^\infty = 0\text{N}/(\text{A}\cdot\text{m})$, $q_2^\infty = 0\text{W}/\text{m}^2$)

Fig.10. Variation of energy release rate with electric permeability coefficient λ_d for different far-field stress

($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$, $L_1 = 0.04\text{m}$, $L_2 = 0.006\text{m}$ $D_2^\infty = 10^{-3}\text{C}/\text{m}^2$, $\alpha = \pi/6$,

$B_2^\infty = 0\text{N}/(\text{A}\cdot\text{m})$, $q_2^\infty = 0\text{W}/\text{m}^2$)

图11给出了在不考虑热流效应时($\lambda_t=0$)能量释放率 G 随磁渗透系数 λ_b 的变化曲线。由图可知($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$, $L_1 = 0.04\text{m}$, $L_2 = 0.006\text{m}$ $D_2^\infty = 10^{-3}\text{C}/\text{m}^2$, $\alpha = \pi/6$, $B_2^\infty = 10^{-2}\text{N}/(\text{A}\cdot\text{m})$)。由图可知, 能量释放率随渗透系数的增大而缓慢减小, 降幅在5%

以内，远小于电渗透系数和热渗透系数的影响。这是由于磁场能量需通过“磁场→磁电耦合→电场→压电效应”的长耦合链间接传递，每一步转化效率低下，因此磁渗透系数的变化主要改变局部磁感应分布，对整体能量释放率贡献有限，对整体断裂驱动力的贡献有限。

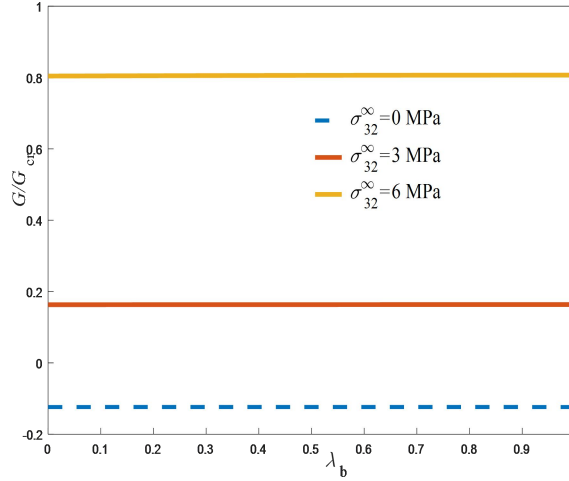


图11 不考虑热流效应时能量释放率随磁渗透系数 λ_b 的变化曲线

($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$, $L_1 = 0.04\text{m}$, $L_2 = 0.006\text{m}$ $D_2^\infty = 10^{-3}\text{C}/\text{m}^2$, $\alpha = \pi/6$,

$$B_2^\infty = 10^{-2}\text{N}/(\text{A}\cdot\text{m}), \quad q_2^\infty = 0\text{W}/\text{m}^2)$$

Fig.11. Variation of energy release rate with magnetic permeability coefficient λ_b without thermal effect

($a=0.01\text{m}$, $h=0.005\text{m}$, $L_1 = 0.04\text{m}$, $L_2 = 0.006\text{m}$, $D_2^\infty = 10^{-3}\text{C}/\text{m}^2$, $\alpha = \pi/6$,

$$B_2^\infty = 10^{-2}\text{N}/(\text{A}\cdot\text{m}), \quad q_2^\infty = 0\text{W}/\text{m}^2)$$

上述现象可统一概括为裂纹面的能量阀门效应。渗透系数 λ_i ($i = \text{d}, \text{b}, \text{t}$) 可视作裂纹面的“能量阀门开度”—— λ_i 越大，阀门开度越大，裂尖积聚的多场能量越易通过裂纹面耗散，从而抑制裂纹扩展。图像7-10直观解释了部分渗透边界的抑制机制。

6 结 论

本文揭示了METE材料中唇形倾斜裂纹扩展的多物理场耦合与场间竞争机制：机械载荷与热流提供断裂驱动力，而裂纹面的电/磁/热渗透性则通过“能量阀门效应”抑制裂纹扩展。在特殊条件下，可以进一步推广到经典的Griffith裂纹解。数值算例阐明了唇形裂纹倾斜角和电、磁、热渗透性对能量释放率和场强度因子的作用规律。结论可归结如下：

(1) 当裂纹的倾斜角 α 从 0° 增大至 90° 时，裂尖处所有的场强度因子和能量释放率均单调减小并趋近于零，表明倾斜角的增加抑制了裂纹的扩展。当 $\alpha = 0^\circ$ (裂纹垂直于载

荷方向)时,机械载荷的驱动作用最强;当 $\alpha \rightarrow 90^\circ$ (裂纹平行于载荷方向)时,机械载荷几乎不再驱动裂纹扩展。裂纹倾斜角 α 对多场奇异性具有统一的“几何屏蔽”效应,所有物理场的驱动作用几乎被完全屏蔽,这为通过调控裂纹倾斜角抑制断裂提供了新的物理启示。

(2)在电、磁部分渗透边界条件下,随着电渗透系数 λ_d 和磁渗透系数 λ_b 的增大,相应的电位移强度因子、磁感应强度因子及能量释放率均单调递减(磁渗透系数的影响最弱),表明增强的电/磁渗透性有助于削弱裂尖奇异性,抑制裂纹扩展。外加磁场本身不直接驱动裂纹,通过磁电耦合效应来影响电场,再间接影响整体能量。

(3)机械载荷和热流是主要驱动力。在部分热渗透边界条件下,随着渗透系数 λ_t 的增大场强度因子和能量释放率均会递减,表明增强的热传导能力(裂纹面更接近等温条件)可缓解裂尖热集中,降低裂纹扩展驱动力。

本文的研究为METE材料在智能器件设计中的断裂评估提供了理论依据和数值参考。后续工作可将该模型推广至孔口区域存在多条随机次生裂纹的情形,进一步探索多场耦合下的断裂机制。

参考文献

- [1] Landau L D, Lifshitz E M 1960 *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon) p119
- [2] Wang B L, Mai Y W 2007 *Int. J. Solids Struct.* **44** 387
- [3] Chang D M, Liu X F, Wang B L, et al. 2020 *Mech. Adv. Mater. Struct.* **27** 3
- [4] Wu T L, Huang J H 2000 *Int. J. Solids Struct.* **37** 2981
- [5] Guo J H, Lu Z X 2010 *Int. J. Solids Struct.* **47** 1847
- [6] Gao C F, Kessler H, Balke H 2003 *Int. J. Eng. Sci.* **41** 969
- [7] Wang B L, Mai Y W 2004 *Mech. Res. Commun.* **31** 65
- [8] Yang D S, Liu G T. 2021 *Modern Physics Letters, B* **35** 7.
- [9] Zhong X C, Li X F. 2008 *Int. J. Eng. Sci.* **46** 374
- [10] Yang D S, Liu G T 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 244601(in Chinese) [杨东升, 刘官厅 2020 物理学报 **69** 244601]
- [11] Wang H Y, Zhou L M 2025 *Eng. Anal. Boundary Elem.* **178** 106323

- [12] Tan Y, Peng F, Liu C, Peng D M 2024 *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.* **45** 837
- [13] Chen X H 2009 *Int. J. Solids Struct.* **46** 2706
- [14] Sulym H T, Pasternak I M, Vasylyshyn A V 2025 *J. Mater. Sci.* **291** 678
- [15] Tian W Y, Rajapakse R K N D 2008 *J. Alloys. Compd.* **449** 161
- [16] Saha T K, Saha S 2012 *Arch. Appl. Mech.* **82** 79
- [17] Spyropoulos C P 2004 *Int. J. Solids Struct.* **41** 907
- [18] Sih G C, Jones R, Song Z F 2003 *Theor. Appl. Fract. Mec.* **40** 161
- [19] Song Z F, Sih G C 2003 *Theor. Appl. Fract. Mec.* **39** 189
- [20] Sih G C, Song Z F 2003 *Theor. Appl. Fract. Mec.* **39** 209
- [21] Gao C F, Zhao M, Tong P, et al 2004 *Int. J. Eng. Sci.* **42** 2175
- [22] Sing B M, Rokne J, Dhaliwal R S. 2009, *Eur J Mech A-Solid* **28** 599
- [23] Zhong X C, Li X F 2008 *Int. J. Eng. Sci.* **46** 374
- [24] Feng W J, Li Y S, Xu Z H 2009 *Int. J. Solids Struct.* **46** 3346
- [25] Guo Z H, Guo H M 2025 *Chin. J. Comput. Mech.* **42** 68 (in Chinese)[郭宗华, 郭怀民, 计算力学学报 **42** 68]
- [26] Liu Z F, Wei Y J 2021 *J. Mech. Phys. Solids* **156** 104619
- [27] Si Y J, Wei Y J 2024 *J. Mech. Phys. Solids* **184** 105546
- [28] Wang B N, Wei Y J, Gao H J 2026 *J. Mech. Phys. Solids* **214** 106689
- [29] Si Y J, Wei Y J 2024 *Engng. Frac. Mech* **309** 110392
- [30] Guo H M, Zhao G Z, Liu G T, Jiang L J 2024 *Chin. J. Solid Mech.* **46** 123 (in Chinese)[郭怀民, 赵国忠, 刘官厅, 姜丽娟 固体力学学报 **45** 123]
- [31] Gao C F, Tong P, Zhang T Y 2004 *Int. J. Solids Struct.* **41** 6613
- [32] Guo J H, Yu J 2015 Multi-field coupled material fracture mechanics(*Beijing: Science Press*)p47(in Chinese) [郭俊宏, 于静 2015 多场耦合材料断裂力学(北京: 科学出版社)第47页]
- [33] Liu X, Guo J H, Yu J 2016 *J. Inner Mong. Univ. (Nat. Sci.Ed.)* **47** 37(in Chinese) [李鑫, 郭俊宏, 于静 内蒙古大学学报 (自然科学版) **47** 37]

Magnetoelectrothermoelastic body considering partial permeability fracture mechanics analysis of inclined

cracks^{*}

GUO Zonghua¹⁾ GUO Huaimin²⁾† LIU Guanting¹⁾

1) (Inner Mongolia University of Science and Technology Baotou Normal College, School of
Mathematical Sciences, Baotou 014030, China)

2) (Baotou Teachers College, Inner Mongolia University of Science and Technology, School of
Mathematics, Baotou 014030, China)

Abstract

Magneto-electro-thermoelastic (METE) materials are novel intelligent materials of significant research value. However, they are highly susceptible to stress concentration and subsequent fracture failure under complex multi-field coupling service conditions, and relevant fracture investigations on such materials remain limited to date. Based on the Muskhelishvili complex variable theory, this paper establishes and solves a fracture mechanical model for an inclined lip-shaped crack in METE media. A novel conformal mapping model is constructed by adopting translation, rotation, and reflection transformation techniques, which accurately maps the exterior domain of the lip-shaped crack to the exterior of a unit circle. Combined with the Stroh formalism, explicit analytical solutions for the dimensionless field intensity factors and energy release rate at the crack tip are derived. A series of numerical examples are performed to systematically explore the effects of crack geometric dimensions, as well as electric, magnetic, and thermal permeable boundary conditions, on fracture parameters.

The results indicate that mechanical loads and heat flux serve as the primary driving forces for crack propagation, while improving the electric, magnetic, and thermal permeability of crack surfaces can effectively restrain crack growth. Increasing the crack inclination angle significantly weakens the tendency for crack propagation. Among the three permeability parameters, the thermal permeability coefficient exhibits the most prominent regulatory effect, whereas the magnetic permeability coefficient has the weakest influence. Notably, the external magnetic field cannot drive crack propagation directly; instead, it modulates the electric field distribution through the magnetoelectric coupling effect, thereby indirectly regulating the system's fracture energy level. As the crack inclination angle increases from 0° to 90° , the field intensity factors at the crack tip decrease monotonically and gradually approach zero. The multi-field coupling fracture driving effect reaches its maximum when the crack is perpendicular to the loading direction. Conversely, when the inclination angle approaches 90° , the "geometric shielding" effect induced by multi-field coupling almost completely blocks the driving effect of the mechanical loads, providing novel physical insights for fracture suppression through crack orientation tuning. Furthermore, enhancing the electric and magnetic permeability of crack surfaces effectively weakens the field singularity at the crack tip and retards crack propagation, while improving thermal conductivity relieves thermal stress concentration and reduces the risk of structural fracture. The proposed model can be reduced to the classical Griffith crack solution under specific boundary conditions, verifying its accuracy and reliability. This study provides a robust theoretical basis and

numerical reference for the anti-fracture optimization design of METE intelligent structures.

Keywords: Magnetoelctrothermoelastic materials, Oblique lip-shaped crack with extending branches, Field intensity factors, Energy release rate, Thermally partially permeable boundary conditions

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12162027, 12361076), and the Inner Mongolia Natural Science Foundation Project (Grant No.2021MS01001) .

†Corresponding author.E-mail:E-mail: ghmin@163.com

The first author.E-mail: zonghuaguo@sina.com

