

腔玻色-爱因斯坦凝聚体系中量子导引的 单原子调控 *

贾少鹏^{1) #} 张睿^{1) #} 李柏军²⁾ 李文娟³⁾ 焦亚峰⁴⁾
景辉¹⁾ 匡乐满^{1) †}

1) (湖南师范大学物理系, 低维量子结构与量子调控教育部重点实验室, 长沙 410081)

2) (湖州师范大学量子物理研究中心, 湖州 313000)

3) (宁夏师范大学物理与电子信息工程学院, 固原 756000)

4) (郑州轻工业大学物理与微电子学院, 量子科技研究院, 郑州 450002)

本文通过单原子掺杂调控腔玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate, BEC) 系统中的量子导引性质。结果表明, 单原子掺杂的腔 BEC 系统可等效为一个广义 Dicke 模型, 其正常相和超辐射相均展现出丰富的量子导引特性。在有杂质原子的情况下, 正常相中腔场与凝聚原子之间仅存在单向量子导引, 超辐射相中则同时存在单向和双向量子导引; 在无杂质原子的情况下, 正常相和超辐射相中腔场与凝聚原子之间均同时存在单向和双向量子导引。研究发现, 单个杂质原子可作为调控量子导引的“单原子开关”: 通过开启或关闭杂质与 BEC 之间的相互作用, 不仅能够灵活控制单向量子导引的方向, 还能实现单向与双向量子导引之间的相互转换。此外, 量子导引参数在量子相变临界点处发生突变, 可作为判定量子相变发生的有效标志。这些结果为利用单原子调控腔场-BEC 系统中的量子导引, 以及探测广义 Dicke 模型中正常相与超辐射相之间的量子相变提供了新途径。

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚体, 量子导引, 量子相变, 正常相, 超辐射相

PACS: 03.65.Ud, 03.75.Gg, 05.30.Rt, 42.50.Pq

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: lmkuang@hunnu.edu.cn (通信作者)

第一作者. E-mail: jsp199609@163.com; zhangrui0101@foxmail.com (第一作者)

* 国家自然科学基金 (批准号: 12247105, 12421005, 12405029)、国家科技重大专项 (批准号: 2024ZD0301000)

1 引言

量子导引^[1-12]是量子理论中非定域性的一个重要特征。由于 EPR 导引需要量子纠缠作为导引远程量子态的基本资源,而量子导引所蕴含的关联又并不总是足以违反 Bell 不等式,因此它被看作一种介于量子纠缠和 Bell 非定域性之间的量子关联或量子资源。量子导引具有不同于量子纠缠和 Bell 非定域性的独特非对称性。正是由于这种非对称特征,量子导引在量子密钥分发^[13,14]、量子秘密共享^[15-18]、量子网络^[19]等方面具有潜在应用。近年来,量子导引在量子信息与量子物理基础领域引起了广泛关注。连续变量和离散变量的量子导引在理论与实验两方面都得到了深入研究^[20-47]。Reid^[7]提出了判定连续变量量子导引的判据。He 和 Reid^[8]引入了多方量子导引的判据。Olsen^[28]表明,通过注入非简并光学参量振荡器可以控制量子导引的非对称性。在级联三次谐波产生与四次谐波产生过程中,也分别研究了两体非对称量子导引^[29,30]。在实验方面,量子导引已在多种物理系统中得到检验^[48-57]。例如,Tischler 等人^[51]给出了单向量子导引的决定性实验证明。Kunkel 等人^[52]展示了膨胀原子云不同部分之间的量子导引。Fadel 等人^[54]在单一空间模式中制备了全同粒子的纠缠态,并展示了紧束缚玻色-爱因斯坦凝聚体不同部分之间的量子导引。Huang 等人^[55]证明,通过设计对光场的非对称耦合,可以产生并控制稳态量子导引的非对称性。Li 等人^[56]展示了轨道角动量复用光场的量子导引。Hao 等人^[57]展示了多方量子导引的可分享性。Liu 等人^[58]完成了通过量子导引远程产生维格纳函数负性的实验演示。

腔 BEC 由于可以通过调节 s 波散射长度来极其精确地调控原子间相互作用,因此为研究强相互作用量子多体理论、量子力学基本问题以及量子信息处理提供了理想平台^[59,60]。例如,腔 BEC 系统中的 Dicke 量子相变 (quantum phase transition, QPT) 已经在实验上得到证实,并在理论上得到了广泛研究^[61-63,69-77]。此外,掺杂质的 BEC 构成了一种微观-宏观混合量子系统,其中微观杂质与 BEC 这样的宏观物质相耦合^[78-86]。这种混合系统能够结合微观和宏观系统的互补功能,从而获得多任务处理能力,这对于实现量子信息处理至关重要^[87-89]。

本文研究了由腔 BEC 和单原子杂质构成的混合系统中的量子导引性质。结果表明,系统的正常相和超辐射相均表现出丰富的量子导引性。研究发现,单个杂质原子可以作为量子导引的单原子量子开关,用于调控单向量子导引的方向以及单向量子导引与双向量子导引之间的转换。此外,量子导引参数在量子相变临界点处发生突变,因此可用于见证量子相变的发生。

2 含单杂质腔 BEC 中的量子相

考虑一个掺入单个杂质原子的腔 BEC 系统，该系统由掺杂单个二能级杂质原子（量子比特）的原子 BEC 和一个超高精细度光学腔组成。由 N 个相同二能级 ^{87}Rb 原子组成的 BEC 被囚禁在超高精细度光学腔中。原子与频率为 ω_c 的单模腔场以及频率为 ω_p 的横向泵浦场相互作用。当腔场频率 ω_c 、泵浦场频率 ω_p 与原子共振频率 ω_A 之间存在较大失谐，且失谐远大于原子自发辐射速率时，原子只会沿腔轴方向或垂直于腔轴方向散射光子。在泵浦场开启之前，凝聚原子被假定制备在零动量态 $|p_x, p_z\rangle = |0, 0\rangle$ 。一旦驱动场开启，部分原子可通过泵浦场和腔场的光子散射被激发到非零动量态 $|p_x, p_z\rangle = |\pm k, \pm k\rangle$ （取 $\hbar = 1$ ），其中 k 为波矢，并近似认为腔场和泵浦场中的波矢相等。零动量态和非零动量态，即 $|0, 0\rangle$ 和 $|\pm k, \pm k\rangle$ ，可视为 ^{87}Rb 原子的两个有效能级，并可用于定义 BEC 的集体算符

$$\hat{J}_z = \sum_i |\pm k, \pm k\rangle_i \langle \pm k, \pm k|, \quad \hat{J}_+ = \hat{J}_-^\dagger = \sum_i |\pm k, \pm k\rangle_i \langle 0, 0|,$$

其中 i 为原子编号。单个二能级杂质原子被掺杂到 BEC 中。由此，掺杂质的腔 BEC 系统的有效哈密顿量可由广义 Dicke 模型描述为^[63]

$$\begin{aligned} \hat{H} = & (\omega + \xi_1 \hat{\sigma}_z) \hat{a}^\dagger \hat{a} + [\omega_0 - \kappa(\hat{\sigma}_z + 1)] \hat{J}_z + \frac{\Delta_Q}{2} \hat{\sigma}_z \\ & + \frac{\chi}{N} \hat{J}_z^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{J}_+ + \hat{J}_-) + \xi_2 \hat{\sigma}_z (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (1)$$

其中， ω 和 ω_0 分别为腔场的有效频率和凝聚原子的有效跃迁频率； λ 为腔场与凝聚原子之间的耦合强度； χ 表示原子间非线性相互作用强度； κ 为杂质量子比特与 BEC 之间的耦合强度。(1) 式中的其他参数定义为

$$\begin{aligned} \xi_1 &= g_Q^2 / \Delta_1, \quad \xi_2 = g_Q \Omega_Q / \Delta_1 + g_Q \Omega_Q / \Delta_2, \\ \Delta_Q &= \Delta_2 + g_Q^2 / \Delta_1 + 2\Omega_Q^2 / \Delta_2, \end{aligned} \quad (2)$$

其中， $\Delta_1 = \omega_Q - \omega_c$ 和 $\Delta_2 = \omega_Q - \omega_p$ 分别为杂质量子比特能级间隔 ω_Q 与腔场频率 ω_c 、泵浦场频率 ω_p 之间的频率失谐。 $\hat{\sigma}_+$ 和 $\hat{\sigma}_-$ 分别为杂质量子比特的升算符和降算符。 g_Q 为杂质量子比特与腔场之间的耦合强度， Ω_Q 为泵浦 Rabi 频率。

利用 Holstein-Primakoff 变换^[64]，(1) 式中凝聚原子的角动量算符可用单个玻色模表示为

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ &= \hat{c}^\dagger \sqrt{N - \hat{c}^\dagger \hat{c}}, \quad \hat{J}_- = \sqrt{N - \hat{c}^\dagger \hat{c}} \hat{c}, \\ \hat{J}_z &= \hat{c}^\dagger \hat{c} - N/2, \end{aligned} \quad (3)$$

其中, 引入的玻色算符满足对易关系 $[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1$ 。

对杂质原子的量子态取平均, 并将 (3) 式代入 (1) 式后, 掺杂质的 Dicke 模型哈密顿量可改写为

$$\begin{aligned}\hat{H}' = & \omega_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_2 \hat{c}^\dagger \hat{c} + \xi_2 \delta (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \frac{\chi}{N} (\hat{c}^\dagger \hat{c})^2 \\ & + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{c}^\dagger \sqrt{N - \hat{c}^\dagger \hat{c}} + \sqrt{N - \hat{c}^\dagger \hat{c}} \hat{c}),\end{aligned}\quad (4)$$

其中, 已忽略不影响系统动力学演化的常数项。两个有效频率为

$$\omega_1 = \omega + \xi_1 \delta, \quad \omega_2 = \omega - \chi'' - \kappa(1 + \delta), \quad (5)$$

其中, χ'' 是依赖于凝聚原子 s 波散射长度的非线性参数, $\delta = \langle \hat{\sigma}_z \rangle$ 为杂质布居, 且满足 $-1 \leq \delta \leq 1$ 。

掺杂杂质的 Dicke 模型 [(4) 式] 中的量子相变可采用平均场方法进行研究^[65]。通过对玻色模作如下平移变换

$$\hat{d} = \hat{a} + \sqrt{N}\alpha, \quad \hat{b} = \hat{c} - \sqrt{N}\beta, \quad (6)$$

其中, α 和 β 为实数, 分别描述腔场和凝聚原子的宏观激发布居。在正常相中, 腔场模和凝聚原子模均不存在宏观激发布居, 即 $\alpha = \beta = 0$ 。在超辐射相中, 两个模式均具有非零宏观激发布居, 因此有 $\alpha \neq 0$ 和 $\beta \neq 0$ 。平移后的腔场和凝聚原子玻色算符满足对易关系 $[\hat{d}, \hat{d}^\dagger] = 1$ 和 $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ 。

当选取腔场-原子耦合强度 λ 作为量子相变参数时, 量子相变点处的临界耦合强度 λ_c 为

$$\lambda_c = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega + \xi_1 \delta)(\omega - \kappa(1 + \delta))}, \quad (7)$$

这表明临界耦合强度 λ_c 可以通过改变杂质布居 δ 进行连续调控。

当 $\lambda < \lambda_c$ 时, 腔 BEC 系统处于正常相, 此时腔场和凝聚原子均没有激发布居。当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 腔 BEC 系统处于超辐射相, 此时腔场和凝聚原子均具有激发布居。在正常相中, 腔 BEC 系统的哈密顿量为

$$\hat{H}_N = \omega_1 \hat{d}^\dagger \hat{d} + \omega_2 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \lambda(\hat{d} + \hat{d}^\dagger)(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) + \xi_2 \delta(\hat{d} + \hat{d}^\dagger), \quad (8)$$

其中, $\hat{b}^\dagger$ 和 $\hat{b}$ 分别为由 Holstein-Primakoff 变换引入的凝聚原子产生算符和湮灭算符。

在超辐射相中, 腔 BEC 系统的哈密顿量为

$$\hat{H}_S = \omega_1 \hat{d}^\dagger \hat{d} + \omega_3 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \zeta(\hat{d} + \hat{d}^\dagger)(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) + \eta(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2 + \xi_2 \delta(\hat{d} + \hat{d}^\dagger), \quad (9)$$

其中, 凝聚原子的有效频率以及腔场与凝聚原子之间的有效耦合强度分别为

$$\omega_3 = \omega_r - \chi'' - \kappa(1 + \delta) + 2\chi\beta^2 + \frac{\lambda\alpha\beta}{K},$$

$$\zeta = \lambda \left(K - \frac{\beta^2}{K} \right), \quad \eta = \chi \beta^2 + \frac{\lambda \alpha \beta (2 + \beta^2)}{2K^3}, \quad (10)$$

其中 $K = \sqrt{1 - \beta^2}$ 。在超辐射相中，腔场的激发布居 α 和凝聚原子的激发布居 β 分别满足

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\lambda^2 (4\lambda^2 - \omega_1 \omega_2) (4\lambda^2 + \omega_1 \omega_2 + 2\chi \omega_1)}{\omega_1^2 (\chi \omega_1 + 4\lambda^2)^2}, \\ \beta^2 &= \frac{4\lambda^2 - \omega_1 \omega_2}{2\chi \omega_1 + 8\lambda^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

在以下各节中，将基于 (8) 式和 (9) 式给出的两个哈密顿量，研究掺杂质的 Dicke 模型在两种量子相中的量子导引性质。

3 正常相中光子和原子之间的 EPR 导引

本节研究正常相中腔场光子与凝聚原子之间的量子导引性质。首先求出掺杂杂质 Dicke 模型正常相的基态波函数，然后计算量子导引参数，并讨论正常相中的量子导引特征。正常相的哈密顿量由 (8) 式给出。为了求解该哈密顿量，将其变换到位置-动量表象

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} (\hat{d}^\dagger + \hat{d}), \quad \hat{p}_1 = i\sqrt{\frac{\omega_1}{2}} (\hat{d}^\dagger - \hat{d}), \\ \hat{x}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \quad \hat{p}_2 = i\sqrt{\frac{\omega_2}{2}} (\hat{b}^\dagger - \hat{b}). \end{aligned} \quad (12)$$

将 (12) 式代入 (8) 式，可得到位置-动量表象下正常相的哈密顿量

$$\hat{H}_N = \frac{\hat{p}_1^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_1^2 \hat{x}_1^2 + \frac{\hat{p}_2^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_2^2 \hat{x}_2^2 + 2\lambda \sqrt{\omega_1 \omega_2} \hat{x}_1 \hat{x}_2 + \xi_2 \delta \sqrt{2\omega_1} \hat{x}_1, \quad (13)$$

其中最后一项表示协同效应所产生的等效驱动项。该项作用于腔场，并可通过改变杂质布居 δ 进行调控。

为了对正常相的哈密顿量 [(13) 式] 进行对角化，引入两个超模振子的如下位置-动量表象

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= \hat{x}_1 \cos \theta - \hat{x}_2 \sin \theta, \quad \hat{P}_1 = \hat{p}_1 \cos \theta - \hat{p}_2 \sin \theta, \\ \hat{Q}_2 &= \hat{x}_1 \sin \theta + \hat{x}_2 \cos \theta, \quad \hat{P}_2 = \hat{p}_1 \sin \theta + \hat{p}_2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (14)$$

由此可得到如下对角化后的哈密顿量

$$\hat{H}_N = \frac{1}{2} \hat{P}_1^2 + \frac{1}{2} \Omega_1^2 \hat{Q}_1^2 + \frac{1}{2} \hat{P}_2^2 + \frac{1}{2} \Omega_2^2 \hat{Q}_2^2 + \xi_2 \delta \sqrt{2\omega_1} (\hat{Q}_1 \cos \theta + \hat{Q}_2 \sin \theta), \quad (15)$$

其中两个超模的频率和混合角分别为

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 16\lambda^2 \omega_1 \omega_2} \right], \quad (16)$$

$$\tan 2\theta = \frac{4\lambda\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (17)$$

(15) 式表明，正常相哈密顿量可等效为两个受驱动的超模振子。

为了得到正常相哈密顿量的本征态，对两个超模振子的位置算符作如下位移变换

$$\hat{Q}'_1 = \hat{Q}_1 + \frac{\xi_2\delta\sqrt{2\omega_1}\cos\theta}{\Omega_1^2}, \quad \hat{Q}'_2 = \hat{Q}_2 + \frac{\xi_2\delta\sqrt{2\omega_1}\sin\theta}{\Omega_2^2}. \quad (18)$$

于是，正常相的哈密顿量可改写为

$$\hat{H}_N = \frac{1}{2}\hat{P}_1^2 + \frac{1}{2}\Omega_1^2\hat{Q}_1'^2 + \frac{1}{2}\hat{P}_2^2 + \frac{1}{2}\Omega_2^2\hat{Q}_2'^2, \quad (19)$$

其中，已忽略不影响系统动力学演化的常数项。

显然，上述正常相哈密顿量的本征态为数态，即

$$|n, m\rangle_{\hat{A}'_1, \hat{A}'_2} = \frac{\hat{A}_1'^{\dagger n} \hat{A}_2'^{\dagger m}}{\sqrt{n!m!}} |0, 0\rangle_{\hat{A}'_1, \hat{A}'_2}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

其中，超模的湮灭算符和产生算符分解为

$$\begin{aligned} \hat{Q}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_1}} (\hat{A}_1'^{\dagger} + \hat{A}_1'), \quad \hat{P}_1 = i\sqrt{\frac{\Omega_1}{2}} (\hat{A}_1'^{\dagger} - \hat{A}_1'), \\ \hat{Q}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_2}} (\hat{A}_2'^{\dagger} + \hat{A}_2'), \quad \hat{P}_2 = i\sqrt{\frac{\Omega_2}{2}} (\hat{A}_2'^{\dagger} - \hat{A}_2'). \end{aligned} \quad (21)$$

由 (21) 式可得到超模表象下正常相的基态波函数

$$\Psi_0(\hat{Q}'_1, \hat{Q}'_2) = \left(\frac{\Omega_1\Omega_2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\Omega_1\hat{Q}_1'^2 + \Omega_2\hat{Q}_2'^2)\right], \quad (22)$$

这表明，在超模表象下，正常相的基态波函数是非纠缠态。将 (14) 式和 (18) 式代入 (22) 式，可得到原始位置-动量表象下正常相的基态波函数

$$\Psi_0(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\frac{\Omega_1\Omega_2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\Omega_1((\hat{x}_1 + x_{01})\cos\theta - \hat{x}_2\sin\theta)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\Omega_2((\hat{x}_1 + x_{02})\sin\theta + \hat{x}_2\cos\theta)^2\right], \quad (23)$$

其中引入了如下参数

$$x_{01} = \frac{\xi_2\delta\sqrt{2\omega_1}}{\Omega_1^2}, \quad x_{02} = \frac{\xi_2\delta\sqrt{2\omega_1}}{\Omega_2^2}. \quad (24)$$

由 (23) 式可以看出，在原始位置-动量表象下，正常相的基态波函数是一个纠缠态。下面研究该基态波函数的量子导引性质。对于给定的双模量子态，其量子导引能力可由如下两个导引参数刻画 [66-68]

$$E_{12} = (\Delta\hat{x}_1)^2 - \frac{\langle\hat{x}_1, \hat{x}_2\rangle^2}{(\Delta\hat{x}_2)^2} < \frac{1}{2},$$

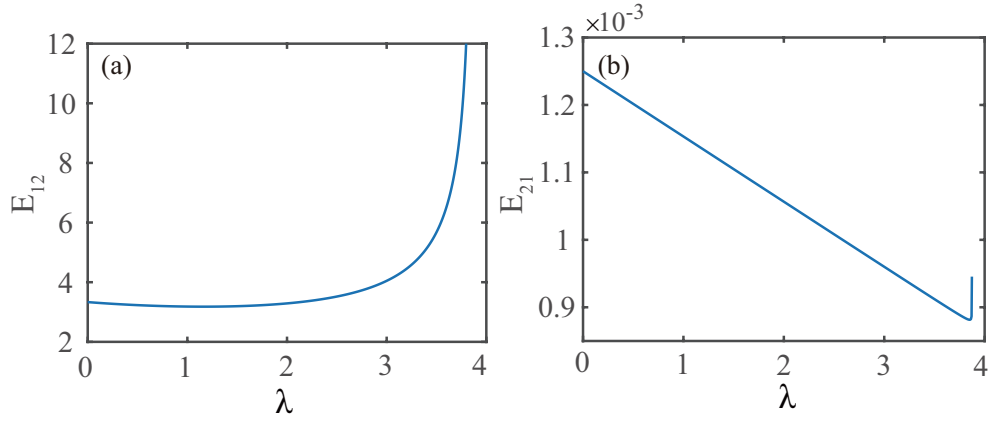


图 1 当混合角 $\sin 2\theta > 0$ 时，有杂质原子时正常相中量子导引参数随腔场-凝聚原子耦合强度的变化。

(a) 凝聚原子对腔场的导引参数 E_{12} ; (b) 腔场对凝聚原子的导引参数 E_{21}

Fig. 1. Quantum steering parameters versus the cavity-BEC coupling strength λ in the normal phase with the impurity atom for mixing angle $\sin 2\theta > 0$: (a) the steering parameter E_{12} for steering from condensed atoms to the cavity field; (b) the steering parameter E_{21} for steering from the cavity field to condensed atoms. The numerical parameters are $\omega = 400\omega_r$, $\chi'' = 0.1\omega_r$, $\kappa = 0.5\omega_r$, $\xi_1 = 0.001\omega_r$, and

$\delta = 0.5\omega_r$. The critical coupling strength is $\lambda_c = 3.87\omega_r$.

$$E_{21} = (\Delta\hat{x}_2)^2 - \frac{\langle\hat{x}_1, \hat{x}_2\rangle^2}{(\Delta\hat{x}_1)^2} < \frac{1}{2}, \quad (25)$$

其中，腔场模与凝聚原子模之间的交叉关联函数定义为

$$\langle\hat{x}_1, \hat{x}_2\rangle = \frac{1}{2} (\langle\hat{x}_1\hat{x}_2\rangle + \langle\hat{x}_2\hat{x}_1\rangle) - \langle\hat{x}_1\rangle\langle\hat{x}_2\rangle. \quad (26)$$

(25) 式中的第一个不等式 $E_{12} < 1/2$ 表示从凝聚原子对腔场光子的导引；第二个不等式 $E_{21} < 1/2$ 表示从腔场光子对凝聚原子的导引。

对于正常相的基态波函数 [(23) 式]，可以得到腔场和凝聚原子的位置涨落

$$(\Delta\hat{x}_1)^2 = \frac{\Omega_2 \cos^2 \theta + \Omega_1 \sin^2 \theta}{2\Omega_1\Omega_2}, \quad (27)$$

$$(\Delta\hat{x}_2)^2 = \frac{\Omega_2 \sin^2 \theta + \Omega_1 \cos^2 \theta}{2\Omega_1\Omega_2}, \quad (28)$$

其中，腔场与凝聚原子之间的交叉关联函数为

$$\langle\hat{x}_1, \hat{x}_2\rangle = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{4\Omega_1\Omega_2} \sin 2\theta. \quad (29)$$

将 (27) 式、(28) 式和 (29) 式代入 (25) 式，可得到两个量子导引参数

$$E_{12} = \frac{\sin 2\theta(\Omega_1 - \Omega_2)[\sin 2\theta(\Omega_1 - \Omega_2) - 4\Omega_1\Omega_2] + 4\Omega_1\Omega_2}{4\Omega_1\Omega_2[(\Omega_1 + \Omega_2) + \cos 2\theta(\Omega_1 - \Omega_2)]}, \quad (30)$$

$$E_{21} = \frac{\sin 2\theta(\Omega_1 - \Omega_2)[\sin 2\theta(\Omega_1 - \Omega_2) - 4\Omega_1\Omega_2] + 4\Omega_1\Omega_2}{4\Omega_1\Omega_2[(\Omega_1 + \Omega_2) - \cos 2\theta(\Omega_1 - \Omega_2)]}. \quad (31)$$

当考虑 $\omega_1 > \omega_2$ ，且 $\tan 2\theta < 0$ 的情形时，可以得到

$$\sin 2\theta = \pm \sqrt{\frac{16\lambda^2\omega_1\omega_2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 16\lambda^2\omega_1\omega_2}}, \quad (32)$$

$$\cos 2\theta = \mp \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 16\lambda^2\omega_1\omega_2}}. \quad (33)$$

为了解后续数值结果的物理本质，首先阐明腔场-凝聚原子系统中量子导引的物理起源。从图像上看，腔场模和 BEC 集体激发模可等效为两个耦合的量子谐振子。当腔场-凝聚原子耦合强度 γ 增大时，两个原本相对独立的量子涨落模式发生混合，建立起非零的交叉关联 $\langle \hat{x}_1, \hat{x}_2 \rangle$ [(29) 式]。这种涨落关联正是 EPR 量子导引产生的物理根源。然而，值得强调的是，量子导引的强弱并非简单地随耦合强度单调递增，而是由两个因素的竞争共同决定：其一是两模式间的交叉关联强度 $\langle \hat{x}_1, \hat{x}_2 \rangle$ ，其二是各子系统自身的局域量子涨落 $(\Delta \hat{x}_i)^2$ [(27) 式和 (28) 式]。只有当一个子系统的局域涨落能够通过交叉关联以足够小的误差去推断另一个子系统时，该方向上的导引条件 $E_{ij} < 1/2$ 才能满足，进一步地，交叉关联与局域涨落的具体数值由两个因素共同决定：第一是两个超模频率，第二是混合角 θ 。由于耦合强度 γ 会改变超模频率和混合角 θ ，因此 γ 的变化会直接改变腔场和 BEC 之间的交叉关联和各子系统自身的局域量子涨落，从而改变量子导引强度。因此，在某些情况下，耦合增强会增强导引；而在另一些情况下，耦合增强也可能由于局域涨落重新分配而改变导引方向，甚至导致单向导引和双向导引之间的转换。此外，量子导引具有本质上的方向不对称性。由于腔场模的有效频率 ω_1 与 BEC 集体模的有效频率 ω_2 （或超辐射相中的 ω_3 ）一般不相等，二者的局域涨落幅度天然存在差异，因此从腔场到 BEC 的推断误差与从 BEC 到腔场的推断误差通常不同，这正是单量子导引能够在系统中出现的深层原因。单原子杂质的作用在于，它通过改变有效频率 $\omega_1 = \omega + \xi_1\delta$ 和 $\omega_2 = \omega - \chi'' - \kappa(1 + \delta)$ ，以及临界耦合强度 $\lambda_c = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega + \xi_1\delta)[\omega - \kappa(1 + \delta)]}$ [(5) 式和 (7) 式]，直接重构了两个模式之间的频率失谐和局域涨落分布。因此，开启或关闭杂质-BEC 耦合，本质上是在重新分配两个子系统之间的量子涨落信息，从而为调控导引方向和类型提供了物理上的单原子开关机制。

下面基于 (30) 式和 (31) 式的解析表达式，在 $\omega_1 > \omega_2$ 、 $\sin 2\theta > 0$ 和 $\cos 2\theta < 0$ 的条件下，数值分析正常相基态波函数的量子导引性质。图 1 给出了存在杂质原子时，正常相中两个量子导引参数随腔场与

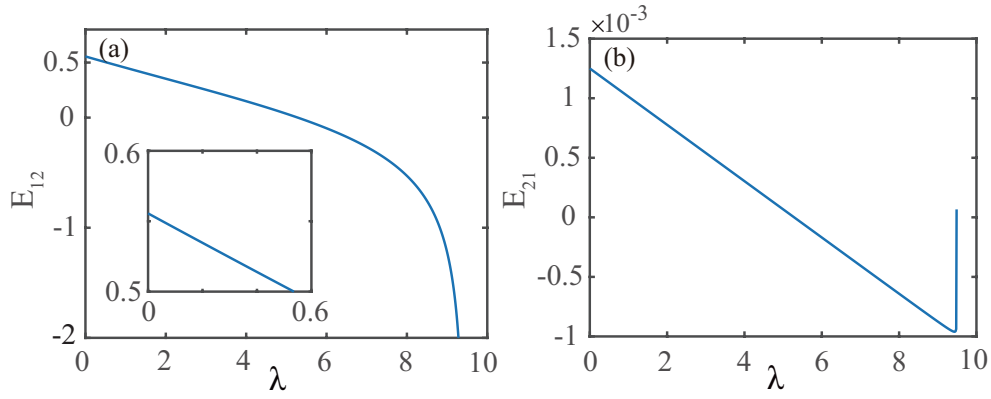


图 2 当混合角 $\sin 2\theta > 0$ 时，没有杂质原子时正常相中量子导引参数随腔场-凝聚原子耦合强度 λ 的变化。(a) 凝聚原子对腔场的导引参数 E_{12} ；(b) 腔场对凝聚原子的导引参数 E_{21}

Fig. 2. Quantum steering parameters versus the cavity-BEC coupling strength λ in the normal phase without the impurity atom for mixing angle $\sin 2\theta > 0$: (a) the steering parameter E_{12} for steering from condensed atoms to the cavity field; (b) the steering parameter E_{21} for steering from the cavity field to condensed atoms. The numerical parameters are $\omega = 400\omega_r$ and $m\chi'' = 0.1\omega_r$. The critical coupling strength is $\lambda_c = 9.49\omega_r$.

凝聚原子耦合强度 λ 的变化关系，其中混合角满足 $\sin 2\theta > 0$ 。这里取 ω_r 为标度频率，数值模拟参数选为 $\omega = 400\omega_r$ ， $\chi'' = 0.1\omega_r$ ， $\kappa = 0.5\omega_r$ ， $\xi_1 = 0.001\omega_r$ ， $\delta = 0.5\omega_r$ 。对应的临界耦合参数为 $\lambda_c = 3.87\omega_r$ 。图 1(a) 表明，在正常相的整个腔场-凝聚原子耦合强度范围内，凝聚原子不能导引腔场。然而，图 1(b) 表明，在正常相中，当混合角满足 $\sin 2\theta > 0$ 时，在整个腔场-凝聚原子耦合强度范围内，腔场均可以单向导引凝聚原子。因此，在这种情况下，存在从腔场到凝聚原子的单向量子导引。

图 2 给出了没有杂质原子时，正常相中两个量子导引参数随腔场与凝聚原子耦合强度 λ 的变化关系，其中混合角满足 $\sin 2\theta > 0$ 。相关参数取为 $\omega = 400\omega_r$ 和 $\chi'' = 0.1\omega_r$ 。对应的临界耦合强度为 $\lambda_c = 3.87\omega_r$ 。由图 2(a) 和图 2(b) 可以看出，在 $0.53\omega_r < \lambda < \lambda_c$ 的范围内， $E_{12} < 0.5$ 且 $E_{21} < 0.5$ ，这表明在该耦合强度范围内，腔场与凝聚原子之间存在双向量子导引。然而，在较小的腔场-凝聚原子耦合强度范围 $0 < \lambda < 0.53\omega_r$ 内，由图 2(a) 的插图可见， $E_{12} > 0.5$ 且 $E_{21} < 0.5$ 。因此，在小耦合强度区域，系统存在由腔场指向凝聚原子的单向量子导引。

比较图 1（有杂质原子）和图 2（没有杂质原子）中的量子导引结果可以看出，杂质原子能够诱导腔场与凝聚原子之间的导引行为由双向量子导引转变为单向量子导引。因此，杂质原子可视为调控量子导引方向性的单原子开关，从而实现双向量子导引向单向量子导引的转换。

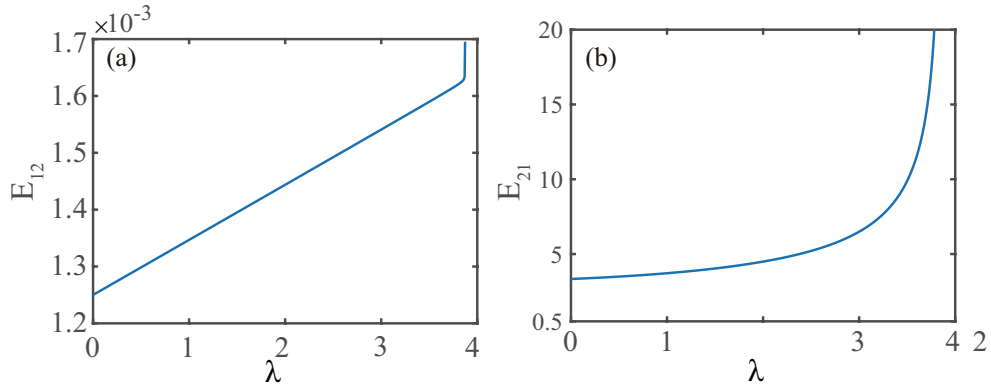


图 3 当混合角 $\sin 2\theta < 0$ 时，含杂质原子时正常相中量子导引参数随腔场-凝聚原子耦合强度 λ 的变化。

(a) 凝聚原子对腔场的导引参数 E_{12} ; (b) 腔场对凝聚原子的导引参数 E_{21}

Fig. 3. EPR steering parameters versus the cavity-field-condensed-atom coupling strength λ in the normal phase with the impurity atom for mixing angle $\sin 2\theta < 0$: (a) the steering parameter E_{12} for steering from condensed atoms to the cavity field; (b) the steering parameter E_{21} for steering from the cavity field to condensed atoms. The numerical parameters are $\omega = 400\omega_r$, $\chi'' = 0.1\omega_r$, $\kappa = 0.5\omega_r$,

$\xi_1 = 0.001\omega_r$, and $\delta = 0.5\omega_r$. The critical coupling strength is $\lambda_c = 3.87\omega_r$.

图 3 给出了存在杂质原子时，正常相中两个量子导引参数随腔场与凝聚原子耦合强度 λ 的变化关系，其中混合角满足 $\sin 2\theta < 0$ 。相关参数选为 $\omega = 400\omega_r$, $\chi'' = 0.1\omega_r$, $\kappa = 0.5\omega_r$, $\xi_1 = 0.001\omega_r$, $\delta = 0.5\omega_r$ 。对应的临界耦合强度为 $\lambda_c = 3.87\omega_r$ 。图 3(a) 表明，在正常相中，当混合角满足 $\sin 2\theta < 0$ 时，在 $\lambda < \lambda_c$ 的整个范围内，凝聚原子均可以单向导引腔场。然而，图 3(b) 表明，在正常相中，当 $\lambda < \lambda_c$ 时，腔场在整个耦合强度范围内均不能导引凝聚原子。

图 4 给出了没有杂质原子时，正常相中两个量子导引参数随腔场与凝聚原子耦合强度 λ 的变化关系，其中混合角满足 $\sin 2\theta < 0$ 。相关参数取为 $\omega = 400\omega_r$ 和 $\chi'' = 0.1\omega_r$ 。对应的临界耦合强度为 $\lambda_c = 9.49\omega_r$ 。由图 4(a) 和图 4(b) 可以看出，在正常相的整个耦合强度范围内， $E_{12} < 0.5$ 且 $E_{21} > 0.5$ 。这表明凝聚原子可以导引腔场，而腔场不能导引凝聚原子。

比较图 3 和图 1 的量子导引结果可以看出，通过调节混合角函数 $\sin 2\theta$ 的符号，可以改变单向量子导引的方向。当 $\sin 2\theta > 0$ 时，腔场可以单向导引凝聚原子；而当 $\sin 2\theta < 0$ 时，凝聚原子可以单向导引腔场。

由上述数值分析可以得出，正常相中腔场与凝聚原子之间的量子导引行为表现出丰富的方向性特征。有杂质时系统存在由腔场指向凝聚原子的单向量子导引，或由凝聚原子指向腔场的单向量子导引，并且量

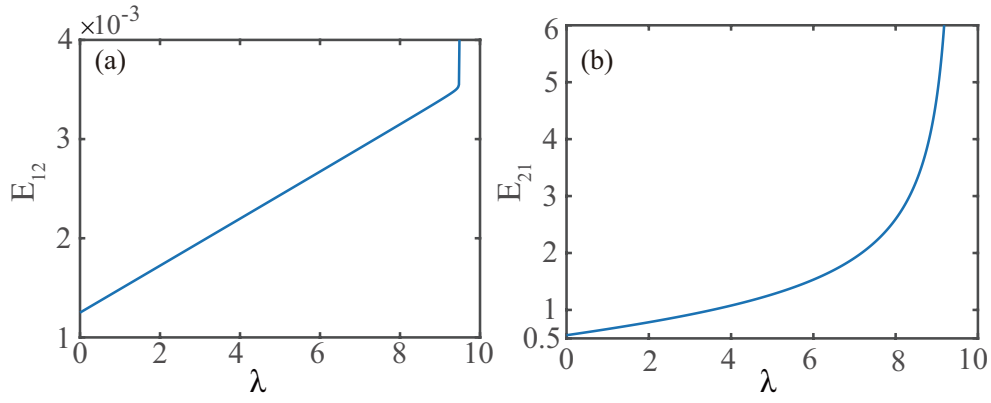


图 4 当混合角 $\sin 2\theta < 0$ 时，无杂质原子时正常相中量子导引参数随腔场-凝聚原子耦合强度 λ 的变化。

(a) 凝聚原子对腔场的导引参数 E_{12} ；(b) 腔场对凝聚原子的导引参数 E_{21}

Fig. 4. EPR steering parameters versus the cavity-field-condensed-atom coupling strength λ in the normal phase without the impurity atom for mixing angle $\sin 2\theta < 0$: (a) the steering parameter E_{12} for steering from condensed atoms to the cavity field; (b) the steering parameter E_{21} for steering from the cavity field to condensed atoms. The numerical parameters are $\omega = 400\omega_r$ and $\chi'' = 0.1\omega_r$. The critical

coupling strength is $\lambda_c = 9.49\omega_r$.

子导引方向可以通过调节混合角函数 $\sin 2\theta$ 来控制。然而，在正常相中，没有杂质时腔场与凝聚原子之间既存在单向量子导引又存在双向量子导引。单个杂质原子可以看作控制量子导引方向的单原子开关：通过关闭杂质-BEC 耦合，单向量子导引可以转变为双向量子导引；而通过开启杂质-BEC 耦合，双向量子导引可以转变为单向量子导引。

上述行为的物理机制可归结如下：在正常相中，系统无宏观激发布居，量子导引完全来源于真空涨落关联。当存在杂质原子时，杂质通过改变有效频率增强了腔场与 BEC 之间的局域涨落不对称性，使得仅有一个方向的推断误差能够低于真空涨落极限，因此系统始终表现为由腔场指向凝聚原子的单向量子导引，或由凝聚原子指向腔场的单向量子导引（图 1 与图 3）。相比之下，关闭杂质-BEC 耦合后，两模式的频率失谐和涨落不对称性减弱，在一定耦合强度范围内两个方向的推断误差均可满足导引条件，从而恢复为双向量子导引（图 2）。这一对比清晰表明，单个杂质原子可以看作控制量子导引方向的单原子开关：通过关闭杂质-BEC 耦合，单向量子导引可以转变为双向量子导引；而通过开启杂质-BEC 耦合，双向量子导引可以转变为单向量子导引。进一步地，比较图 1 与图 3（有杂质）以及图 2 与图 4（无杂质）可以看出，混合角函数 $\sin 2\theta$ 的符号直接决定了单向导引的方向。当 $\sin 2\theta > 0$ 时，腔场的涨落携带更多关于 BEC 涨落的信息，系统表现为腔场指向凝聚原子的导引；当 $\sin 2\theta < 0$ 时，交叉关联符号发生反转，BEC 涨落

成为信息优势方，导引方向相应反转。其物理本质在于 $\sin 2\theta$ 控制了腔场涨落与 BEC 涨落之间的相对相位，从而决定了哪一个子系统具有更强的推断能力。

4 超辐射相中光子与原子之间的量子导引

本节研究超辐射相中腔场光子与凝聚原子之间的量子导引性质。超辐射相的哈密顿量由 (9) 式给出。为了求解该哈密顿量，将其变换到位置-动量表象

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}(\hat{d}^\dagger + \hat{d}), \quad \hat{p}_1 = i\sqrt{\frac{\omega_1}{2}}(\hat{d}^\dagger - \hat{d}), \\ \hat{x}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_3}}(\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \quad \hat{p}_3 = i\sqrt{\frac{\omega_3}{2}}(\hat{b}^\dagger - \hat{b}).\end{aligned}\quad (34)$$

将 (34) 式代入 (9) 式，可得到位置-动量表象下超辐射相的哈密顿量

$$\hat{H}_S = \frac{\hat{p}_1^2}{2} + \frac{1}{2}\omega_1^2\hat{x}_1^2 + \frac{\hat{p}_3^2}{2} + \frac{1}{2}\omega_3(\omega_3 + 4\eta)\hat{x}_3^2 + 2\zeta\sqrt{2\omega_1\omega_3}\hat{x}_1\hat{x}_3 + \xi_2\delta\sqrt{2\omega_1}\hat{x}_1. \quad (35)$$

与正常相情形类似，杂质原子对腔场作用是产生一个等效驱动项，且该驱动可通过改变杂质布居 δ 进行调控。

为了对角化超辐射相位哈密顿量 [(35) 式]，引入两个超辐射相的超模振子，其位置-动量表示如下：

$$\begin{aligned}\hat{Q}_1 &= \hat{x}_1 \cos \theta - \hat{x}_3 \sin \theta, \quad \hat{P}_1 = \hat{p}_1 \cos \theta - \hat{p}_3 \sin \theta, \\ \hat{Q}_3 &= \hat{x}_1 \sin \theta + \hat{x}_3 \cos \theta, \quad \hat{P}_3 = \hat{p}_1 \sin \theta + \hat{p}_3 \cos \theta.\end{aligned}\quad (36)$$

由此可得到如下对角化后的哈密顿量

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2}\hat{P}_1^2 + \frac{1}{2}\Omega_1^2\hat{Q}_1^2 + \frac{1}{2}\hat{P}_3^2 + \frac{1}{2}\Omega_3^2\hat{Q}_3^2 + \xi_2\delta\sqrt{2\omega_1}(\hat{Q}_1 \cos \theta + \hat{Q}_3 \sin \theta), \quad (37)$$

其中两个超模频率和混合角分别为

$$\Omega_{1,3}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_1^2 + \omega_3^2 + 4\eta\omega_3 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_3^2 - 4\eta\omega_3)^2 + 16\lambda^2\omega_1\omega_3} \right], \quad (38)$$

$$\tan 2\theta = \frac{4\lambda\sqrt{\omega_1\omega_3}}{\omega_3^2 + 4\eta\omega_3 - \omega_1^2}. \quad (39)$$

(37) 式表明，超辐射相哈密顿量可等效为两个受驱动的超模振子。

为了得到超辐射相哈密顿量的本征态，对两个超模振子的位置算符作如下平移变换

$$\hat{Q}'_1 = \hat{Q}_1 + \frac{\xi_2\delta\sqrt{2\omega_1}\cos\theta}{\Omega_1^2}, \quad \hat{Q}'_3 = \hat{Q}_3 + \frac{\xi_2\delta\sqrt{2\omega_1}\sin\theta}{\Omega_3^2}. \quad (40)$$

于是, (37) 式中的超辐射相哈密顿量可改写为

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2}\hat{P}_1^2 + \frac{1}{2}\Omega_1^2\hat{Q}_1'^2 + \frac{1}{2}\hat{P}_3^2 + \frac{1}{2}\Omega_3^2\hat{Q}_3'^2, \quad (41)$$

其中, 已忽略不影响系统动力学演化的常数项。

显然, 上述超辐射相哈密顿量的本征态为数态, 即

$$|n, m\rangle_{\hat{A}_1', \hat{A}_3'} = \frac{\hat{A}_1'^{\dagger n} \hat{A}_3'^{\dagger m}}{\sqrt{n!m!}} |0, 0\rangle_{\hat{A}_1', \hat{A}_3'}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

其中, 超模的湮灭算符和产生算符定义为

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1' &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_1}} (\hat{A}_1'^{\dagger} + \hat{A}_1'), \quad \hat{P}_1 = i\sqrt{\frac{\Omega_1}{2}} (\hat{A}_1'^{\dagger} - \hat{A}_1'), \\ \hat{Q}_3' &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_3}} (\hat{A}_3'^{\dagger} + \hat{A}_3'), \quad \hat{P}_3 = i\sqrt{\frac{\Omega_3}{2}} (\hat{A}_3'^{\dagger} - \hat{A}_3'). \end{aligned} \quad (43)$$

由 (42) 式可得到超模表象下超辐射相的基态波函数

$$\Psi_0(\hat{Q}_1', \hat{Q}_3') = \left(\frac{\Omega_1\Omega_3}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\Omega_1\hat{Q}_1'^2 + \Omega_3\hat{Q}_3'^2)\right], \quad (44)$$

这表明, 在超模表象下, 超辐射相的基态波函数是非纠缠态。将 (36) 式和 (40) 式代入 (44) 式, 可得到原始位置-动量表象下超辐射相的基态波函数

$$\Psi_0(\hat{x}_1, \hat{x}_3) = \left(\frac{\Omega_1\Omega_3}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\Omega_1((\hat{x}_1 + x_{01})\cos\theta - \hat{x}_3\sin\theta)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\Omega_3((\hat{x}_1 + x_{03})\sin\theta + \hat{x}_3\cos\theta)^2\right], \quad (45)$$

其中, x_{01} 由 (24) 式给出, 参数 x_{03} 定义为

$$x_{03} = \frac{\xi_2\delta\sqrt{2\omega_1}}{\Omega_3^2}. \quad (46)$$

利用量子导引参数 [(25) 式] 和超辐射相的基态波函数 [(45) 式], 可得到两个量子导引参数

$$E_{13} = \frac{\sin 2\theta(\Omega_1 - \Omega_3)[\sin 2\theta(\Omega_1 - \Omega_3) - 4\Omega_1\Omega_3] + 4\Omega_1\Omega_3}{4\Omega_1\Omega_3[(\Omega_1 + \Omega_3) + \cos 2\theta(\Omega_1 - \Omega_3)]}, \quad (47)$$

$$E_{31} = \frac{\sin 2\theta(\Omega_1 - \Omega_3)[\sin 2\theta(\Omega_1 - \Omega_3) - 4\Omega_1\Omega_3] + 4\Omega_1\Omega_3}{4\Omega_1\Omega_3[(\Omega_1 + \Omega_3) - \cos 2\theta(\Omega_1 - \Omega_3)]}, \quad (48)$$

其中, $\sin 2\theta$ 和 $\cos 2\theta$ 可由 (39) 式得到。考虑 $\omega_1^2 > \omega_3^2 + 4\eta\omega_3$ 且 $\tan 2\theta < 0$ 的情形, 有

$$\sin 2\theta = \pm \sqrt{\frac{16\zeta^2\omega_1\omega_3}{(\omega_1^2 - 4\eta\omega_3 - \omega_3^2)^2 + 16\zeta^2\omega_1\omega_3}}, \quad (49)$$

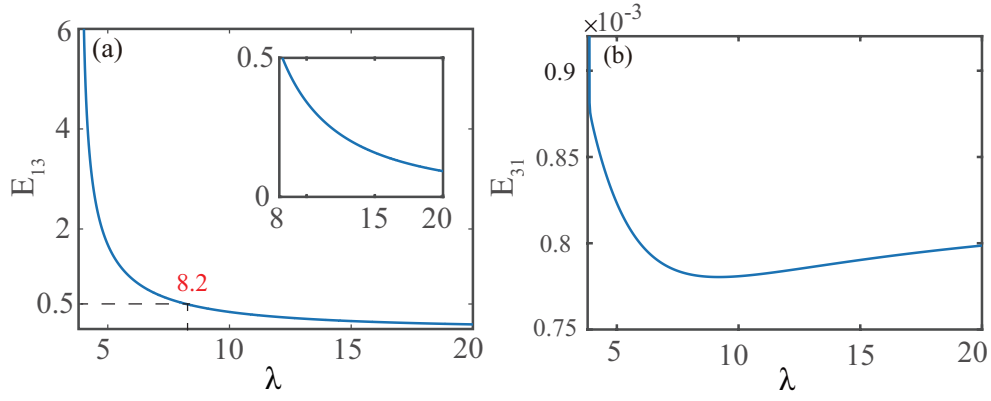


图 5 当混合角 $\sin 2\theta > 0$ 时，含杂质原子时超辐射相中量子导引参数随腔场-凝聚原子耦合强度 λ 的变化 (a) 凝聚原子对腔场的导引参数 E_{13} ; (b) 腔场对凝聚原子的导引参数 E_{31}

Fig. 5. Quantum steering parameters versus the cavity-BEC coupling strength λ in the superradiant phase with the impurity atom for mixing angle $\sin 2\theta > 0$: (a) the steering parameter E_{13} for steering from condensed atoms to the cavity field; (b) the steering parameter E_{31} for steering from the cavity field to condensed atoms. The numerical parameters are $\omega = 400\omega_r$, $\chi = 0.1\omega_r$, $\chi'' = 0.1\omega_r$, $\kappa = 0.5\omega_r$, $\xi_1 = 0.001\omega_r$, and $\delta = 0.5\omega_r$. The critical coupling strength is $\lambda_c = 3.87\omega_r$.

$$\cos 2\theta = \mp \sqrt{\frac{(\omega_3^2 + 4\eta\omega_3 - \omega_1^2)^2}{(\omega_1^2 - 4\eta\omega_3 - \omega_3^2)^2 + 16\zeta^2\omega_1\omega_3}}. \quad (50)$$

下面基于 (47) 式和 (48) 式的解析表达式，在 $\omega_1^2 > \omega_3^2 + 4\eta\omega_3$ 、 $\sin 2\theta > 0$ 和 $\cos 2\theta < 0$ 的条件下，数值分析超辐射相基态波函数的量子导引性质。

图 5 给出了存在杂质原子时，两个量子导引参数随腔场与凝聚原子耦合强度 λ 的变化关系，其中混合角满足 $\sin 2\theta > 0$ 。相关参数取为 $\omega = 400\omega_r$ ， $\chi = 0.1\omega_r$ ， $\chi'' = 0.1\omega_r$ ， $\kappa = 0.5\omega_r$ ， $\xi_1 = 0.001\omega_r$ ， $\delta = 0.5\omega_r$ 。由图 5(a) 和图 5(b) 可以看出，当 $\lambda > 8.2\omega_r$ 时，腔场与凝聚原子之间出现双向量子导引；而当 $\lambda_c < \lambda < 8.2\omega_r$ 时，系统出现单向量子导引，其中 $\lambda_c = 3.87\omega_r$ ，这一结果如图 5(a) 的插图所示。

图 6 给出了没有杂质原子时，两个量子导引参数随腔场与凝聚原子耦合强度 λ 的变化关系，其中混合角满足 $\sin 2\theta > 0$ 。相关参数取为 $\omega = 400\omega_r$ ， $\chi = 0.1\omega_r$ 和 $\chi'' = 0.1\omega_r$ 。对应的临界耦合强度为 $\lambda_c = 9.49\omega_r$ 。由图 6(a) 和图 6(b) 可以看出，在 $\lambda > \lambda_c$ 的整个区域内，腔场与凝聚原子之间均存在双向量子导引。

类似于正常相的情形，比较图 5（有杂质原子）和图 6（没有杂质原子）的量子导引结果可以发现，杂质原子的存在能够诱导腔场与凝聚原子之间的导引行为由双向量子导引转变为单向量子导引。因此，在超

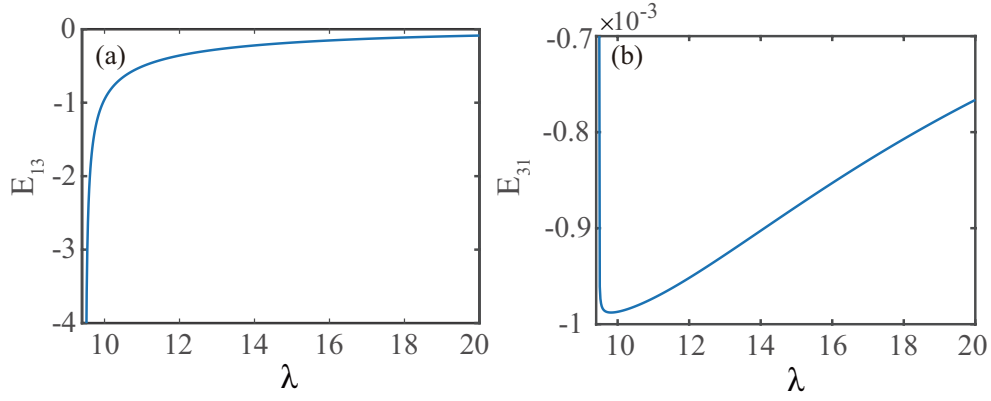


图 6 当混合角 $\sin 2\theta > 0$ 时，无杂质原子时超辐射相中量子导引参数随腔场-凝聚原子耦合强度 λ 的变化。(a) 凝聚原子对腔场的导引参数 E_{13} ；(b) 腔场对凝聚原子的导引参数 E_{31}

Fig. 6. Quantum steering parameters versus the cavity-BEC coupling strength λ in the superradiant phase without the impurity atom for mixing angle $\sin 2\theta > 0$: (a) the steering parameter E_{13} for steering from condensed atoms to the cavity field; (b) the steering parameter E_{31} for steering from the cavity field to condensed atoms. The numerical parameters are $\omega = 400\omega_r$, $\chi = 0.1\omega_r$, and $\chi'' = 0.1\omega_r$. The critical coupling strength is $\lambda_c = 9.49\omega_r$.

辐射相中，杂质原子同样可以看作一个单原子开关，用于实现双向量子导引向单向量子导引的转换。也就是说，当开启杂质-BEC 耦合时，系统出现由腔场指向凝聚原子的单向量子导引；而当关闭杂质-BEC 耦合时，系统则表现出双向量子导引。

图 7 给出了存在杂质原子时，两个量子导引参数随腔场与凝聚原子耦合强度 λ 的关系，其中混合角满足 $\sin 2\theta < 0$ 。相关参数取为 $\omega = 400\omega_r$, $\chi = 0.1\omega_r$, $\chi'' = 0.1\omega_r$, $\kappa = 0.5\omega_r$, $\xi_1 = 0.001\omega_r$, $\delta = 0.5\omega_r$ 。由图 7(a) 和图 7(b) 可以看出，仅在 $\lambda > 12.4\omega_r$ 的区域内，腔场与凝聚原子之间出现双向量子导引；而在 $\lambda_c < \lambda < 12.4\omega_r$ 的区域内，系统出现由凝聚原子指向腔场的单向量子导引，其中 $\lambda_c = 3.87\omega_r$ 。

图 8 给出了无杂质原子时，两个量子导引参数随腔场与凝聚原子耦合强度 λ 的变化关系，其中混合角满足 $\sin 2\theta < 0$ 。相关参数取为 $\omega = 400\omega_r$, $\chi = 0.1\omega_r$ 和 $\chi'' = 0.1\omega_r$ 。对应的临界耦合强度为 $\lambda_c = 9.49\omega_r$ 。由图 8(a) 和图 8(b) 可以看出，当 $\lambda > 17.4\omega_r$ 时，腔场与凝聚原子之间出现双向量子导引；而当 $\lambda_c < \lambda < 17.4\omega_r$ 时，系统出现由凝聚原子指向腔场的单向量子导引。

比较图 7 和图 5 中单向量子导引区域的结果可以看出，通过调节混合角函数 $\sin 2\theta$ 的符号，可以改变单向量子导引的方向。当 $\sin 2\theta > 0$ 时，腔场可以单向导引凝聚原子；而当 $\sin 2\theta < 0$ 时，凝聚原子可以单向导引腔场。

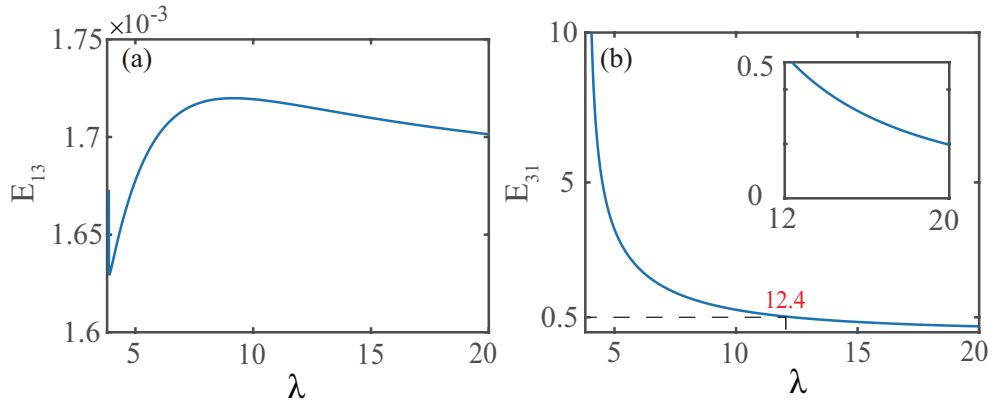


图 7 当混合角 $\sin 2\theta < 0$ 时, 含杂质原子时超辐射相中量子导引参数随腔场-凝聚原子耦合强度 λ 的变化 (a) 凝聚原子对腔场的导引参数 E_{13} ; (b) 腔场对凝聚原子的导引参数 E_{31}

Fig. 7. Quantum steering parameters versus the cavity-BEC coupling strength λ in the superradiant phase with the impurity atom for mixing angle $\sin 2\theta < 0$: (a) the steering parameter E_{13} for steering from condensed atoms to the cavity field; (b) the steering parameter E_{31} for steering from the cavity field to condensed atoms. The numerical parameters are $\omega = 400\omega_r$, $\chi = 0.1\omega_r$, $\chi'' = 0.1\omega_r$, $\kappa = 0.5\omega_r$, $\xi_1 = 0.001\omega_r$, and $\delta = 0.5\omega_r$. The critical coupling strength is $\lambda_c = 3.87\omega_r$.

由上述数值分析可知, 广义 Dicke 模型的超辐射相比正常相表现出更复杂多样的量子可导引性。在超辐射相中, 当混合角满足 $\sin 2\theta > 0$ 时, 有杂质原子情形下, 在不同的杂质-BEC 耦合强度区域内, 系统可表现出单向或双向量子导引: 在靠近量子相变临界点的区域 ($\gamma_c < \gamma < 8.2\omega_r$), 系统表现为由腔场指向凝聚原子的单向量子导引, 而在远离临界点的区域 ($\gamma > 8.2\omega_r$), 腔场与凝聚原子之间同时存在双向量子导引; 无杂质原子情形下, 系统在进入超辐射相后的整个区域内均保持双向量子导引。当混合角满足 $\sin 2\theta < 0$ 时, 有杂质原子情形下, 在不同的杂质-BEC 耦合强度区域内, 系统同样可表现出单向或双向量子导引: 在靠近量子相变临界点的区域 ($\gamma_c < \gamma < 12.4\omega_r$), 系统表现为由凝聚原子指向腔场的单向量子导引, 而在远离临界点的区域 ($\gamma > 12.4\omega_r$), 系统同样过渡为双向量子导引; 无杂质原子情形下, 在靠近临界点的区域 ($\gamma_c < \gamma < 17.4\omega_r$) 同样表现为由凝聚原子指向腔场的单向量子导引, 在远离临界点的区域 ($\gamma > 17.4\omega_r$) 才转变为双向量子导引。

上述行为的物理机制可归结如下: 与正常相不同, 超辐射相中的量子导引行为更为丰富, 其物理根源在于超辐射相中腔场和 BEC 模均具有非零宏观激发布居 α 和 β [见 (11) 式]。当系统刚越过临界点进入超辐射相时, 腔场和 BEC 模的宏观布居尚处于积累阶段, 此时局域涨落不对称性仍占主导地位, 仅支持

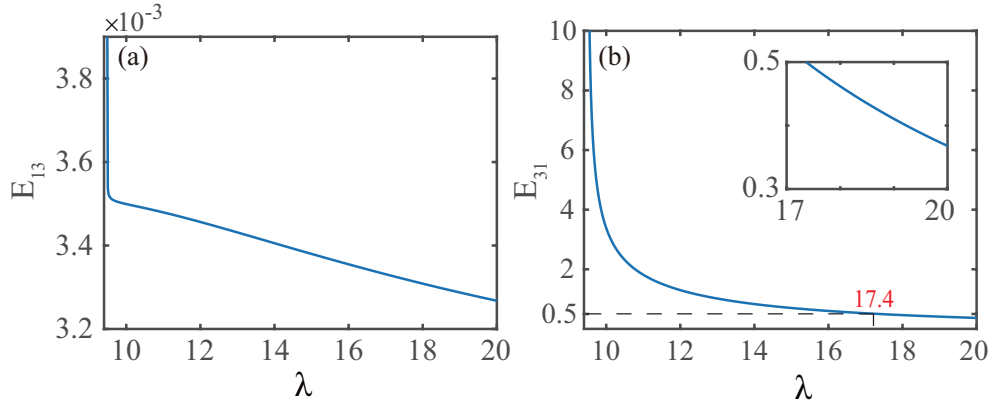


图 8 当混合角 $\sin 2\theta < 0$ 时，无杂质原子时超辐射相中量子导引参数随腔场-凝聚原子耦合强度 λ 的变化。(a) 凝聚原子对腔场的导引参数 E_{13} ；(b) 腔场对凝聚原子的导引参数 E_{31}

Fig. 8. Quantum steering parameters versus the cavity-BEC coupling strength λ in the superradiant phase without the impurity atom for mixing angle $\sin 2\theta < 0$: (a) the steering parameter E_{13} for steering from condensed atoms to the cavity field; (b) the steering parameter E_{31} for steering from the cavity field to condensed atoms. The numerical parameters are $\omega = 400\omega_r$, $\chi = 0.1\omega_r$, and $\chi'' = 0.1\omega_r$. The critical coupling strength is $\lambda_c = 9.49\omega_r$.

单向量子导引。随着腔场- BEC 耦合强度 γ 进一步增大，两模式之间的有效耦合 ζ 和交叉关联显著增强，最终使得两个方向的推断误差均低于真空涨落极限，从而诱导系统从单向导引过渡到双向量子导引（图 5 与图 7）。此外，混合角函数 $\sin 2\theta$ 的符号在超辐射相中同样决定了单向导引的方向： $\sin 2\theta > 0$ 时，腔场涨落携带更多关于 BEC 涨落的信息，导引由腔场指向凝聚原子； $\sin 2\theta < 0$ 时交叉关联符号反转，导引由凝聚原子指向腔场。杂质原子的调控作用体现在两个方面：其一，杂质的存在改变了单向导引存在的参数区间，对于 $\sin 2\theta > 0$ 的情形，杂质在靠近临界点的区域内诱导出原本不存在的单向量子导引；其二，对于 $\sin 2\theta < 0$ 的情形，杂质将单向导引区域从 $\gamma < 17.4\omega_r$ 缩短至 $\gamma < 12.4\omega_r$ 即杂质使得系统更早地从单向导引过渡为双向量子导引。这表明，交叉关联符号与局域涨落不对称性的协同作用始终是决定导引方向与类型的物理内核，而单原子杂质则通过重构有效频率和涨落分布来精细调控这一竞争关系。

5 基于量子导引的量子相变见证

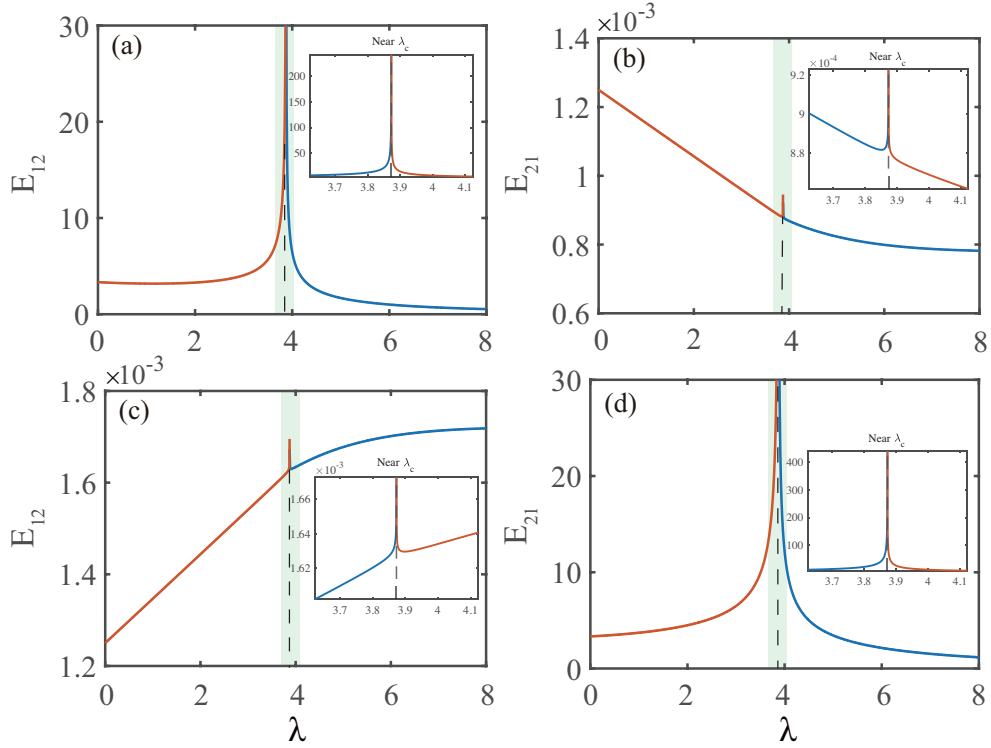


图 9 含杂质原子时利用量子导引参数见证量子相变。(a) $\sin 2\theta > 0$ 时的 E_{12} ; (b) $\sin 2\theta > 0$ 时的 E_{21} ; (c) $\sin 2\theta < 0$ 时的 E_{12} ; (d) $\sin 2\theta < 0$ 时的 E_{21}

Fig. 9. Witnessing the quantum phase transition by the quantum steering parameters in the presence of the impurity atom: (a) E_{12} for $\sin 2\theta > 0$; (b) E_{21} for $\sin 2\theta > 0$; (c) E_{12} for $\sin 2\theta < 0$; (d) E_{21} for $\sin 2\theta < 0$. The numerical parameters are $\omega = 400\omega_r$, $\chi = 0.1\omega_r$, $\chi'' = 0.1\omega_r$, $\kappa = 0.5\omega_r$, $\xi_1 = 0.001\omega_r$, and $\delta = 0.5$. The critical coupling strength is $\lambda_c = 3.87\omega_r$.

本节数值研究由掺杂质的腔 BEC 系统中量子导引与量子相变之间的关系。结果表明，两个量子导引参数在量子相变临界点处发生突变，因此量子导引参数可作为见证量子相变的参数。

图 9 给出了存在杂质原子时，两个量子导引参数随腔场与凝聚原子耦合强度 λ 的变化关系，其中图 9(a) 和图 9(b) 对应 $\sin 2\theta > 0$ 的情形，图 9(c) 和图 9(d) 对应 $\sin 2\theta < 0$ 的情形。相关参数取为 $\omega = 400\omega_r$, $\chi = 0.1\omega_r$, $\chi'' = 0.1\omega_r$, $\kappa = 0.5\omega_r$, $\xi_1 = 0.001\omega_r$, $\delta = 0.5\omega_r$ 。由图 9 可以看出，两个量子导引参数 E_{12} 和 E_{21} 均在量子相变临界点 $\lambda = \lambda_c$ 处发生突变，其中 $\lambda_c = 3.87\omega_r$ 。因此，两个量子导引参数的这种突变可以用于见证由腔场与凝聚原子耦合诱导的量子相变。由图 9(a) 和图 9(b) 可以看出，当 $\sin 2\theta > 0$ 时，由于 $E_{12} \gg E_{21}$ ，量子导引参数 E_{12} 对量子相变更加敏感，因此相较于 E_{21} ， E_{12} 是更优

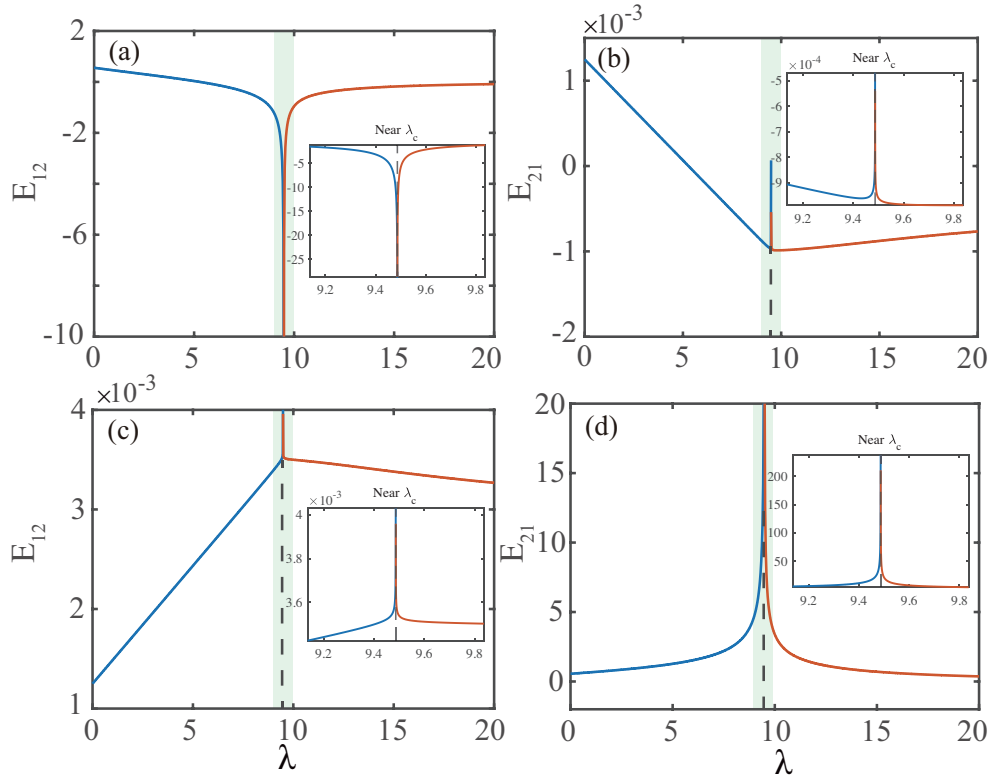


图 10 没有杂质原子时利用量子导引参数见证量子相变。 (a) $\sin 2\theta > 0$ 时的 E_{12} ; (b) $\sin 2\theta > 0$ 时的 E_{21} ; (c) $\sin 2\theta < 0$ 时的 E_{12} ; (d) $\sin 2\theta < 0$ 时的 E_{21}

Fig. 10. Witnessing the quantum phase transition by the quantum steering parameters in the absence of the impurity atom: (a) E_{12} for $\sin 2\theta > 0$; (b) E_{21} for $\sin 2\theta > 0$; (c) E_{12} for $\sin 2\theta < 0$; (d) E_{21} for $\sin 2\theta < 0$. The numerical parameters are $\omega = 400\omega_r$, $\chi = 0.1\omega_r$, and $\chi'' = 0.1\omega_r$. The critical coupling strength is $\lambda_c = 9.49\omega_r$.

的量子相变见证参数。当 $\sin 2\theta < 0$ 时，由图 9(c) 和图 9(d) 可以看出，由于 $E_{21} \gg E_{12}$ ，量子导引参数 E_{21} 对量子相变更加敏感，因此相较于 E_{12} ， E_{21} 是更优的量子相变见证参数。

图 10 给出了没有杂质原子时，两个量子导引参数随腔场与凝聚原子耦合强度 λ 的变化关系，其中图 10(a) 和图 10(b) 对应 $\sin 2\theta > 0$ 的情形，图 10(c) 和图 10(d) 对应 $\sin 2\theta < 0$ 的情形。相关参数取为 $\omega = 400\omega_r$ ， $\chi = 0.1\omega_r$ 和 $\chi'' = 0.1\omega_r$ 。由图 10 可以看出，两个量子导引参数 E_{12} 和 E_{21} 均在量子相变临界点 $\lambda = \lambda_c$ 处发生突变，其中 $\lambda_c = 9.49\omega_r$ 。因此，两个量子导引参数的这种突变可以用于见证由腔场与凝聚原子耦合诱导的量子相变。由图 10 还可以看出，当 $\sin 2\theta > 0$ 时，图 10(a) 和图 10(b) 表明，相较于 E_{21} ， E_{12} 是更优的量子相变见证参数；而当 $\sin 2\theta < 0$ 时，图 10(c) 和图 10(d) 表明，相较于 E_{12} ， E_{21} 是更优的量子相变见证参数。此外，比较图 9 和图 10 的结果可以发现，杂质原子能够降低量子相变

的临界耦合强度。

最后，我们阐释量子导引参数在临界点处发生突变的物理机制。量子相变伴随着系统基态的定性改变：从正常相到超辐射相，腔场和 BEC 模由无宏观激发布居突然转变为具有非零宏观布居。这一基态重构过程导致超模频率 $\Omega_{1,2}$ 、混合角 θ 、局域涨落以及交叉关联在临界点附近发生快速且剧烈的变化。由于量子导引参数 E_{12} 和 E_{21} 完全由这些二阶矩决定 [见 (30)-(31) 式及 (47)-(48) 式]，它们自然会在临界点 $\gamma = \gamma_c$ 处表现出突变或斜率陡变，从而可以作为见证量子相变的有效探针。此外，比较图 9 与图 10 可知，杂质原子的引入将临界耦合强度从 $9.49\omega_r$ 降低至 $3.87\omega_r$ 。其物理本质在于，杂质-BEC 耦合 κ 和杂质布居 δ 通过 (7) 式直接调制了腔场与 BEC 之间的有效频率失谐，使得系统在更小的腔场-BEC 耦合强度下即可达到临界条件，进入超辐射相。这进一步说明了单原子杂质不仅能够调控量子导引，还能有效调控系统的量子相变临界行为。

6 结论

本文研究了单原子掺杂的腔玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 系统中正常相与超辐射相的量子导引性质。研究发现，两个相的基态均展现出丰富的量子导引特性。在正常相中，有杂质原子时，系统仅存在由腔场指向凝聚原子或由凝聚原子指向腔场的单向量子导引，且导引方向可通过调节混合角加以控制；无杂质原子时，腔场与凝聚原子之间则同时存在单向量子导引和双向量子导引。在超辐射相中，量子导引行为更为复杂：在不同腔场-BEC 耦合强度区间内，系统分别表现为单向量子导引或双向量子导引。研究表明，单个杂质原子可充当控制量子导引方向的“单原子开关”：通过开启或关闭杂质与 BEC 之间的相互作用，既能控制单向量子导引的方向，也能实现单向与双向量子导引之间的转换。此外，量子导引参数在量子相变临界点处发生突变，可作为判定量子相变发生的有效标志。飞行光子与局域凝聚原子之间的量子导引对实际量子通信网络具有潜在应用价值。以上结果为利用单原子操控腔-BEC 系统中的量子导引以及探测正常相与超辐射相之间的量子相变开辟了新途径。

参考文献

- [1] Wiseman H M, Jones S J, Doherty A C 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 140402
- [2] Schrödinger E 1935 *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **31** 555

- [3] Schrödinger E 1936 *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **32** 446
- [4] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [5] Uola R, Costa A C S, Nguyen H C, Gühne O 2020 *Rev. Mod. Phys.* **92** 015001
- [6] Reid M D, Drummond P D, Bowen W P, Cavalcanti E G, Lam P K, Bachor H A, Andersen U L, Leuchs G 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1727
- [7] Reid M D 1989 *Phys. Rev. A* **40** 913
- [8] He Q Y, Reid M D 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 250403
- [9] Li Y, Xiang Y, Yu X D, Nguyen H C, Gühne O, and He Q Y 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 080201
- [10] Tavakoli A, 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 070204
- [11] Liang Y U, Zhang J, Yang Y G, Zhang T C, and Gao J G 2025 *Phys. Rev. A* **112**, 042416
- [12] LI X L, ZHAI S Q, LIU K 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 090301 (in Chinese) [李晓玲, 翟淑琴, 刘奎 2025 物理学报 **74** 090301]
- [13] Branciard C, Cavalcanti E G, Walborn S P, Scarani V, Wiseman H M 2012 *Phys. Rev. A* **85** 010301
- [14] Hillery M, Bužek V, Berthiaume A 1999 *Phys. Rev. A* **59** 1829
- [15] Gaertner S, Kurtsiefer C, Bourennane M, Weinfurter H 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 020503
- [16] Lance A M, Symul T, Bowen W P, Tyc T, Sanders B C, Lam P K 2003 *New J. Phys.* **5** 4
- [17] Chen Y A, Zhang A N, Zhao Z, Zhou X Q, Lu C Y, Peng C Z, Yang T, Pan J W 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 200502
- [18] Xiang Y, Kogias I, Adesso G, He Q Y 2017 *Phys. Rev. A* **95** 010101
- [19] Cavalcanti D, Skrzypczyk P, Aguilar G H, Nery R V, Ribeiro P H S, Walborn S P 2015 *Nat. Commun.* **6** 7941
- [20] Midgley S L W, Ferris A J, Olsen M K 2010 *Phys. Rev. A* **81** 022101

- [21] Olsen M K, Corney J F 2013 *Phys. Rev. A* **87** 033839
- [22] He Q Y, Ficek Z 2014 *Phys. Rev. A* **89** 022332
- [23] Cavalcanti E G, He Q Y, Reid M D, Wiseman H M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 032115
- [24] He Q Y, Rosales-Zárate L, Adesso G, Reid M D 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 180502
- [25] Kogias I, Lee A R, Ragy S, Adesso G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 060403
- [26] Händchen V, Eberle T, Steinlechner S, Samblowski A, Franz T, Werner R F, Schnabel R 2012 *Nat. Photon.* **6** 596
- [27] Armstrong S, Wang M, Teh R Y, Gong Q H, He Q Y, Janousek J, Bachor H A, Reid M D, Lam P K 2015 *Nat. Phys.* **11** 167
- [28] Olsen M K 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 160501
- [29] Olsen M K 2017 *Phys. Rev. A* **96** 063839
- [30] Olsen M K 2018 *Phys. Rev. A* **97** 033820
- [31] Liu Y, Liang S L, Jin G R, Yu Y B, Chen A X 2020 *Phys. Rev. A* **102** 052214
- [32] Teh R Y, Gessner M, Reid M D, Fadel M 2022 *Phys. Rev. A* **105** 012202
- [33] Gianani I, Berardi V, Barbieri M 2022 *Phys. Rev. A* **105** 022421
- [34] Dai T Z, Fan Y, Qiu L 2022 *Phys. Rev. A* **105** 022425
- [35] Zhu J, Hu M J, Li C F, Guo G C, Zhang Y S 2022 *Phys. Rev. A* **105** 032211
- [36] Zhang J, He K, Zhang Y, Hao Y Y, Hou J C, Lan F P, Niu B N 2022 *Phys. Rev. A* **105** 032408
- [37] Designolle S 2022 *Phys. Rev. A* **105** 032430
- [38] Designolle S, Srivastav V, Uola R, Valencia N H, McCutcheon W, Malik M, Brunner N 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 200404
- [39] Seifert L M, Beyer K, Luoma K, Strunz W T 2022 *Phys. Rev. A* **105** 042413

- [40] Zheng S S, Sun F X, Yuan H Y, Ficek Z, Gong Q H, He Q Y 2021 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **64** 210311
- [41] Kong D, Xu J, Tian Y, Wang F, Hu X M 2022 *Phys. Rev. Research* **4** 013084
- [42] Han X H, Xiao Y, Qu H C, He R H, Fan X, Qian T, Gu Y J 2021 *Quantum Inf. Process.* **20** 278
- [43] Zeng Q, Shang J W, Nguyen H C, Zhang X D 2022 *Phys. Rev. Research* **4** 013151
- [44] Zhao S Q, Long Y M, Zhang M X, Zheng T Y, Zhang X 2021 *Quantum Inf. Process.* **20** 308
- [45] Tan H T, Li J 2021 *Phys. Rev. Research* **3** 013192
- [46] Cheng W W, Wang B W, Gong L Y, Zhao S M 2021 *Quantum Inf. Process.* **20** 371
- [47] Pan G Z, Yang M, Yuan H, Zhang G, Zhao J L 2021 *Quantum Inf. Process.* **20** 48
- [48] Wittmann B, Ramelow S, Steinlechner F, Langford N K, Brunner N, Wiseman H M, Ursin R, Zeilinger A 2012 *New J. Phys.* **14** 053030
- [49] Saunders D J, Jones S J, Wiseman H M, Pryde G J 2010 *Nat. Phys.* **6** 845
- [50] Wasak T, Chwedeńczuk J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 140406
- [51] Tischler N, Ghafari F, Baker T J, Slussarenko S, Patel R B, Weston M M, Wollmann S, Shalm L K, Verma V B, Nam S W, Nguyen H C, Wiseman H M, Pryde G J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 100401
- [52] Kunkel P, Prüfer M, Strobel H, Linnemann D, Frölian A, Gasenzer T, Gärttner M, Oberthaler M K 2018 *Science* **360** 413
- [53] Lange K, Peise J, Lücke B, Kruse I, Vitagliano G, Apellaniz I, Kleinmann M, Tóth G, Klempt C 2018 *Science* **360** 416
- [54] Fadel M, Zibold T, Décamps B, Treutlein P 2018 *Science* **360** 409
- [55] Huang X Y, Zeuthen E, Gong Q H, He Q Y 2019 *Phys. Rev. A* **100** 012318
- [56] Zeng L, Ma R, Wen H, Wang M H, Liu J, Qin Z Z, Su X L 2022 *Photonics Res.* **10** 777

- [57] Hao Z Y, Sun K, Wang Y, Liu Z H, Yang M, Xu J S, Li C F, Guo G C 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 120402
- [58] Liu S H, Han D M, Wang N, Xiang Y, Sun F X, Wang M H, Qin Z Z, Gong Q H, Su X L, He Q Y 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 200401
- [59] Brennecke F, Donner T, Ritter S, Bourdel T, Köhl M, Esslinger T 2007 *Nature* **450** 268
- [60] Colombe Y, Steinmetz T, Dubois G, Linke F, Hunger D, Reichel J 2007 *Nature* **450** 272
- [61] Dimer F, Estienne B, Parkins A S, Carmichael H J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013804
- [62] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature* **464** 1301
- [63] Yuan J B, Lu W J, Song Y J, Kuang L M 2017 *Sci. Rep.* **7** 7404
- [64] Holstein T, Primakoff H 1940 *Phys. Rev.* **58** 1098
- [65] Emary C, Brandes T 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066203
- [66] Reid M D 1989 *Phys. Rev. A* **40** 913
- [67] Cavalcanti E G, Jones S J, Wiseman H M, Reid M D 2009 *Phys. Rev. A* **80** 032112
- [68] Huang X Y, Zeuthen E, Gong Q H, He Q Y 2019 *Phys. Rev. A* **100** 012318
- [69] Keeling J, Bhaseen M J, Simons B D 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 043001
- [70] Nagy D, Kónya G, Szirmai G, Domokos P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 130401
- [71] Nagy D, Szirmai G, Domokos P 2011 *Phys. Rev. A* **84** 043637
- [72] Baumann K, Mottl R, Brennecke F, Esslinger T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 140402
- [73] Bastidas V M, Emary C, Regler B, Brandes T 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 043003
- [74] Bhaseen M J, Mayoh J, Simons B D, Keeling J 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013817
- [75] Klinder J, Keßler H, Wolke M, Mathey L, Hemmerich A 2015 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **112** 3290
- [76] Liu N, Lian J L, Ma J, Xiao L T, Chen G, Liang J Q, Jia S T 2011 *Phys. Rev. A* **83** 033601

- [77] Yuan J B, Kuang L M 2013 *Phys. Rev. A* **87** 024101
- [78] Ng H T, Bose S 2008 *Phys. Rev. A* **78** 023610
- [79] Balewski J B, Krupp A T, Gaj A, Peter D, Büchler H P, Löw R, Hofferberth S, Pfau T 2013 *Nature* **502** 664
- [80] Schmidt R, Sadeghpour H R, Demler E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 105302
- [81] Johnson T H, Yuan Y, Bao W, Clark S R, Foot C, Jaksch D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 240402
- [82] Li Z, Kuang L M 2020 *Quantum Inf. Process.* **19** 188
- [83] Yuan J B, Lu W J, Song Y J, Kuang L M 2017 *Sci. Rep.* **7** 7404
- [84] Song Y J, Kuang L M 2019 *Ann. Phys. (Berlin)* **531** 1800423
- [85] Rammohan S, Tiwari S, Mishra A, Pendse A, Chauhan A K, Nath R, Eisfeld A, Wüster S 2021 *Phys. Rev. A* **104** L060202
- [86] Rammohan S, Chauhan A K, Nath R, Eisfeld A, Wüster S 2021 *Phys. Rev. A* **103** 063307
- [87] Schleier-Smith M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 100001
- [88] Kurizki G, Bertet P, Kubo Y, Mølmer K, Petrosyan D, Rabl P, Schmiedmayer J 2015 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **112** 3866
- [89] Lachance-Quirion D, Tabuchi Y, Gloppe A, Usami K, Nakamura Y 2019 *Appl. Phys. Express* **12** 070101

Manipulation of quantum steering in a cavity Bose-Einstein condensate system via a single atom*

JIA Shaopeng¹⁾# ZHANG Rui¹⁾# LI Baijun²⁾ LI Wenjuan³⁾
JIAO Yafeng⁴⁾ JING Hui¹⁾ KUANG Leman¹⁾†

1) (*Department of Physics and Key Laboratory of Low-Dimensional Quantum Structures and Quantum Control of Ministry of Education, Hunan Normal University, Changsha 410081, China*)

2) (*Research Center for Quantum Physics, Huzhou Normal University, Huzhou 313000, China*)

3) (*School of Physics and Electronic Information Engineering, Ningxia Normal University, Guyuan 756000, China*)

4) (*School of Physics and Microelectronics and Academy for Quantum Science and Technology, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China*)

Abstract

Quantum steering, a distinctive form of quantum nonlocality with inherent asymmetry, has attracted great interest for its fundamental importance and potential in quantum information processing. This paper investigates the manipulation of quantum steering properties in a cavity Bose-Einstein condensate (BEC) system via single atom doping. The results show that the single-atom-doped cavity BEC system

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China) (Grants Nos. 12247105, 12421005, 12405029) and Quantum Science and Technology-National Science and Technology Major Project (Grant No. 2024ZD0301000).

These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: lmkuang@hunnu.edu.cn

The First Author. E-mail: jsp199609@163.com; zhangrui0101@foxmail.com

can be exactly mapped to a generalized Dicke model, and both the normal and superradiant phases host rich quantum steering characteristics. In the presence of an impurity atom, only one-way quantum steering exists between the cavity field and the condensate atoms in the normal phase, revealing complete steering asymmetry, while both one-way and two-way quantum steering coexist in the superradiant phase. In stark contrast, without the impurity atom, both one-way and two-way quantum steering appear between the cavity field and the condensate atoms in both the normal and superradiant phases. Remarkably, the single impurity atom can serve as a “single atom switch” for quantum steering: by turning on or off the impurity–BEC interaction, one can flexibly control the direction of one-way steering and realize mutual conversion between one-way and two-way quantum steering. This single-atom switch provides a versatile tool for dynamically manipulating asymmetric quantum correlations. Furthermore, the quantum steering parameter displays an abrupt change precisely at the critical point of the quantum phase transition, serving as an effective indicator to witness the transition between the normal and superradiant phases. These findings provide a new avenue for single-atom control of quantum steering in cavity BEC systems and for probing quantum phase transitions in the generalized Dicke model.

Keywords: Bose-Einstein condensate, quantum steering, quantum phase transition, normal phases, superradiant phases