

耗散晶格中有效边界选择的爆发现象

陆展鹏¹⁾ 徐志浩^{2)‡} 刘辉^{2)†}

1) (忻州师范学院物理系, 忻州 034000)

2) (山西大学理论物理研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

本文研究了一维非厄米耗散十字晶格中有限非均匀调制区域诱导的边界爆发现象. 本文在有限区域内同时调制胞内耦合和局域耗散, 从而构造出嵌入于均匀背景中的非均匀调制区. 通过局域基变换, 该模型可映射为具有有限参数失配区的非厄米SSH链. 动力学表明, 在周期边界条件下, 长时间耗散峰并不会出现在调制区域内部, 而是稳定出现在区域边界附近: 主导爆发边界由非互易传播方向首先遇到的界面决定. 进一步地, 爆发强度并非由调制强度 η 单独控制, 而取决于有效边界效应与局域耗散之间的竞争. 当初态位于调制区域内时, 较大的 η 会增强初始位置附近的局域耗散, 从而抑制有效左边界爆发; 当初态位于均匀背景区时, 初始位置附近的耗散几乎不随 η 改变, 有效左边界爆发随 $\ln \eta$ 呈近似反洛伦兹型依赖. 开边界条件下的结果进一步表明, 显著爆发只出现在非互易传播方向上被首先选中的有效边界和物理边界处, 说明有限区域边界与物理开边界服从统一的边界选择机制. 该工作有助于深化对非厄米系统中非互易输运与耗散分布调控之间关系的理解, 并为利用区域调制实现定向耗散操控提供了理论参考.

关键词: 非厄米系统, 耗散系统, 非厄米趋肤效应, 爆发现象

PACS: 05.40.Fb, 03.65.Vf, 42.82.Et

* “量子通信与量子计算机”国家科技重大专项资助 (课题编号: 2025ZD0300400)、国家自然科学基金(批准号: 12375016、12461160324)、北京凝聚态物理国家研究中心开放课题(批准号: 2023BNLCMPKF001).

‡ 通信作者. E-mail: xuzhihao@sxu.edu.cn

† 通信作者. E-mail: liuhui99@sxu.edu.cn

1 引言

空间非均匀性在非厄米系统中起着关键作用.与厄米体系中局域缺陷通常只影响少数束缚态或散射通道不同^[1,2],非厄米晶格中的局域扰动,边界修饰以及参数失配往往能够显著重塑整体能谱,本征态分布以及动力学响应^[3,4].这类敏感性与非厄米趋肤效应密切相关:在开放边界^[5-27]或有效边界条件^[28-42]下,大量本征态会沿特定方向堆积在边界附近,从而导致与厄米系统截然不同的边界选择,输运和耗散行为.因此,如何利用空间非均匀性调控非厄米系统中的局域化,输运与耗散,已成为当前非厄米物理中的一个重要问题.

近年来,一个引人注目的动力学现象是非厄米边界爆发 (edge burst)^[43-56].其典型特征是:即使初始波包制备在远离边界的位置,长时间损耗概率仍会在边界附近形成明显的峰值.最初的研究表明,这一现象与趋肤效应和虚能隙闭合密切相关^[44,53];更具体地说,当周期边界条件下的Bloch能谱触碰实轴、即虚能隙闭合时,体区损耗概率会由指数衰减转变为幂律衰减,从而为边界处异常增强的耗散积累提供动力学基础^[44].在此基础上,若系统同时具有非厄米趋肤效应,这种体区的幂律尾部会在边界俘获作用下进一步转化为边界处的显著耗散峰,从而形成edge burst^[44].进一步地,文献^[53]将这一图像推广为imaginary gap-closed (IGC) points的统一表述,指出PBC能谱中的IGC点正是决定长时间动力学和边界爆发的重要谱学特征:当IGC点存在时,体区损耗概率呈幂律衰减并伴随边界爆发;而当虚能隙重新打开时,体区损耗恢复为指数衰减,边界爆发也随之消失^[53].随后又有工作指出,在更一般的非厄米动力学中,即使不存在传统意义上的趋肤局域化,也可能出现类似的爆发响应^[57,58].进一步地,单个局域非均匀结构也可以在系统体内生成有效边界,并诱导出显著的爆发现象,说明爆发并不局限于物理边界,而可以由体内的有效边界所支撑^[59].上述结果表明,非厄米系统中的爆发现象并不只发生在物理边界,还可以发生在由缺陷形成的有效边界处.

除了点缺陷或单一边界之外,有限宽度的非均匀调制区域是一类更为普遍且更具实验可实现性的空间非均匀结构.例如,在光学,声学和电路等人工结构中^[21,60-62],人们可以在一段有限区域内同时调制耦合强度,增益(损耗)或非互易输运参数,从而构造出嵌入于均匀背景中的参数失配区^[60,61].这类有限区域可视为由两个界面围成的嵌入区段或异质结构^[62].与单点缺陷不同,有限非均匀调制区域具有两个空间分离的界面,因而天然提供了多个候选有效边界.在非互易耗散动力学背景下,概率流如何在这些候选边界之间实现动态选择,仍是一个尚未得到充分研究的问题.此外,有限区域边界与物理开边界在非互易耗散动力学中是否服从统一的选择机制,目前也缺乏系统研究.

本文将研究一维非厄米耗散十字晶格中有限非均匀调制区域边界所诱导的爆发现象,讨论在不同边界下的选择机制.本文揭示的爆发选择机制不仅加深了对非厄米系统中非互易传播,界面效应与耗散动力学之

间关系的理解,也为通过在有限区域调制实现耗散分布的定向操控提供了新的理论思路.考虑到有限非均匀调制区域在光子晶格,声学谐振器阵列和非厄米电路中的可实现性,本文的结果也有望为相关实验设计提供参考.

2 模型与精确映射

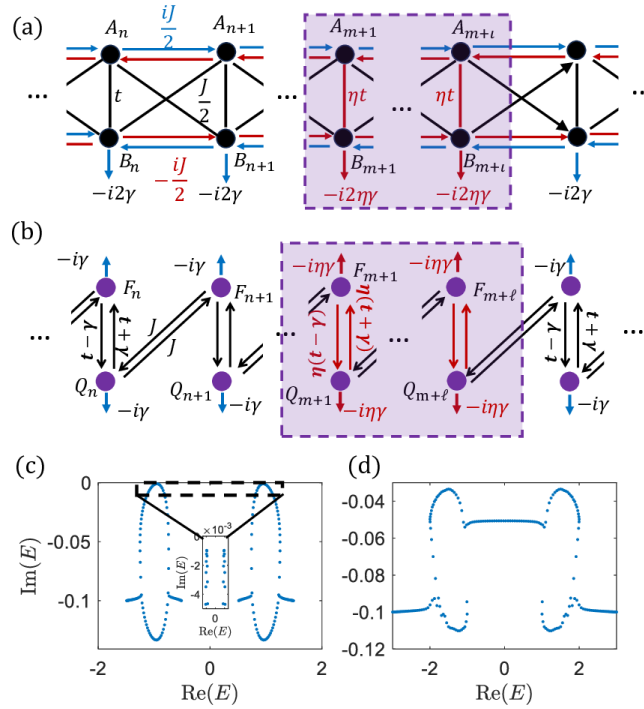


图1 (网刊彩色) 非厄米耗散晶格简图 and 对应能谱.(a) 一维非厄米十字耗散晶格示意图.每个原胞由两个子晶格A,B组成.(b) 由式(4)中的局域旋转得到的等效非厄米SSH晶格.调制区域包含 ℓ 个原胞,由紫色虚线框表示, η 调制胞内跃迁强度和局域耗散强度.(c)-(d)

周期边界条件下非均匀耗散十字晶格在 $\eta = 0.5$ 和 $\eta = 2$ 下的能谱.这里 $m = 0.3N$, $\ell = 0.5N$, $J = 1$, $t = 0.5$, $\gamma = 0.1$ 以及 $N = 100$.

Fig. 1. (color line) Schematic of the non-Hermitian dissipative lattice and the corresponding spectra.(a) Schematic of a one-dimensional non-Hermitian dissipative cross-stitch lattice.Each unit cell consists of two sublattices,A and B.(b) Effective non-Hermitian SSH lattice obtained by the local rotation in Eq. (4).The inhomogeneous region contains ℓ unit cells and is indicated by the purple dashed box.The parameter η modulates both the intracell hopping amplitude and the local dissipation strength.(c) - (d) Complex-energy spectra of the inhomogeneous dissipative cross-stitch lattice under periodic boundary conditions for $\eta = 0.5$ and $\eta = 2$,respectively.Here, $m = 0.3N$, $\ell = 0.5N$, $J = 1$, $t = 0.5$, $\gamma = 0.1$ and $N = 100$.

本文考虑以一维耗散十字晶格为基础,并在其中嵌入一段有限非均匀调制区域的情形,如图1 (a)所示.该模型具有两段区域,一段是均匀背景区域,一段是嵌入的调制区域.总的模型包含 N 个原胞,每个原胞由两个子晶格位点组成,分别记为A 和 B,因此系统总格点数为 $2N$.除非另有说明,本文首先采用周期边界条件,即 $\psi_{N+1}^{A,B} = \psi_1^{A,B}$, $\psi_0^{A,B} = \psi_N^{A,B}$,而开边界条件的情形将在后文单独讨论.

调制区域由参数 η 控制,调控原胞集合 $\mathcal{M} = \{m + 1, m + 2, \dots, m + \ell\}$ 中的胞内耦合强度和局域耗散,其

中 $m+1$ 为区域起始位置, ℓ 为该区域所包含的原胞数.第 n 个原胞中 A, B 子晶格上场幅 ψ_n^A 和 ψ_n^B 的动力学方程可写为

$$\begin{aligned} i\frac{d\psi_n^A}{dt} &= t_n \psi_n^B + \frac{iJ}{2} (\psi_{n-1}^A - \psi_{n+1}^A) + \frac{J}{2} (\psi_{n-1}^B + \psi_{n+1}^B), \\ i\frac{d\psi_n^B}{dt} &= t_n \psi_n^A - \frac{iJ}{2} (\psi_{n-1}^B - \psi_{n+1}^B) + \frac{J}{2} (\psi_{n-1}^A + \psi_{n+1}^A) - i\gamma_n \psi_n^B, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 t_n 和 γ_n 分别表示第 n 个原胞中的胞内耦合强度和 B 子晶格上的局域耗散:

$$t_n = \begin{cases} t, & n \notin \mathcal{M}, \\ \eta t, & n \in \mathcal{M}, \end{cases} \quad \gamma_n = \begin{cases} 2\gamma, & n \notin \mathcal{M}, \\ 2\eta\gamma, & n \in \mathcal{M}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $t > 0$ 为均匀背景区域中的胞内耦合强度, 2γ ($\gamma > 0$)为对应的 B 子晶格耗散, $\eta > 0$ 为调制区域的调制强度.参数 J 控制系统中相邻原胞之间的胞间耦合.由定义可见,当 $\eta \neq 1$ 时,系统由两段胞内耦合和局域耗散不一致的非厄米耗散十字晶格模型连接而成,并有两个连接面,分别为: $n = m \leftrightarrow m+1$ 和 $n = m+\ell \leftrightarrow m+\ell+1$ 处.当 $\eta = 1$ 时,两个模型中参数完全一致,调制区域消失,系统退化为周期的耗散十字晶格模型.在下面计算过程中,本文主要考虑参数 $J = 1, t = 0.5, \gamma = 0.1$.同时为形容调制区域和背景区域的失配程度,这里使用失配度来描述,其定义为:

$$\delta_\eta = |\ln(\eta)| \quad (3)$$

为了揭示其基本物理,对每个原胞施加局域旋转变换^[5,44,59]

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_n \\ Q_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

从而将原模型映射为一个等效的非厄米SSH模型.映射后的非厄米SSH模型如图1 (b)所示,其哈密顿量为^[5]

$$\begin{aligned} H_{\text{SSH}} &= \sum_{n \notin \mathcal{M}} [(t+\gamma)F_n^\dagger Q_n + (t-\gamma)Q_n^\dagger F_n - i\gamma(F_n^\dagger F_n + Q_n^\dagger Q_n)] \\ &+ \sum_{n \in \mathcal{M}} \eta [(t+\gamma)F_n^\dagger Q_n + (t-\gamma)Q_n^\dagger F_n - i\gamma(F_n^\dagger F_n + Q_n^\dagger Q_n)] \\ &+ \sum_{n=1}^N J (F_{n+1}^\dagger Q_n + Q_n^\dagger F_{n+1}), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $F_n^\dagger(Q_n^\dagger)$ 和 $F_n(Q_n)$ 分别表示第 n 个原胞中 $F(Q)$ 子晶格上的产生与湮灭算符.映射后的模型表明,原来的调制区域对应于一个嵌入在背景区域中的非均匀调制区.背景区域为具有胞内非互易跃迁(向左 $t+\gamma$,向右 $t-\gamma$)和均匀损耗 $-i\gamma$ 的非厄米SSH链.调制区域则是具有胞内非互易跃迁(向左 $\eta(t+\gamma)$,向右 $\eta(t-\gamma)$)和均匀损耗 $-i\eta\gamma$ 的另一段非厄米SSH链.两条链都具有 J 的胞间跃迁,并通过强度为 J 的链间耦合连接在一起.对于有限 $\eta \neq 1$,其能谱始终位于复能量平面的下半平面,并且与实能轴保持分离,如图1 (c)-1 (d)所示.图1 (c)和1 (d)分别展示了当 $\eta = 0.5$ 和 $\eta = 2$ 情况下 $\mathcal{M} = [m+1, m+\ell]$ ($m = 0.3N, \ell = 0.5N$)时的能谱.与之前关于单局域结构的工作^[59]相比,前者可讨论更宽参数范围的调制强度,而本文关注的是有限调制区域情形.即使在较接近1的调制强度下,如 $\eta = 0.5$ 和 $\eta = 2$,系统能谱相较于 $\eta = 1$ 的周期情形仍已表现出明显差异.此外,不仅是在能量环和实能轴之间出现虚能隙,能量环外部还出现不成环的非闭合谱分支.这其实是调制区域的耗散链与背景区域的耗散链连接在一起时,连接处所具有的边界效应的影响,调制强度越远离1,也就是失配度 δ_η 越大,能量环就越小,相应的,处于非闭合谱分支上的能级数就越多.当失配度 δ_η 足够大,系统的有效边界增强到等效开边界时,所有能级均处于非闭合谱上.而在这个过程中,只要 $\eta \neq 1$,能谱中的谱环部分就始终与实能轴保持分离;只有当系统到达 $\eta = 1$ 的周期情况时,虚能隙才会闭合.

3 周期边界条件下的有效边界选择爆发

为了比较初始波包位于不同参数区域时的动力学行为,本文固定初始位置为 $n_0 = 60$ 的单点局域初态,即 $\psi_n^A(0) = \delta_{n,n_0}$ 和 $\psi_n^B(0) = 0$,并满足归一化条件.在下文中,以格点坐标减小的方向定义为左方向,以格点坐标增大的方向定义为右方向.对于周期边界条件下跨越 $N \rightarrow 1$ 的调制区域,界面位置按周期坐标理解.相对于固定初始位置 n_0 ,沿左方向首先遇到的调制区域界面称为等效左边界,沿右方向遇到的调制区域界面称为等效右边界.开边界条件下,位于坐标左端的 $n = 1$ 和右端的 $n = N$ 分别称为物理左边界和物理右边界.本文所称爆发现象,是指在远离初始位置的有效边界或物理边界附近,耗散权重显著高于周围体区背景值的非局域耗散峰.由于爆发峰的空间范围会随参数和边界位置变化,本文将在不同情形下分别选取相应的积分窗口来表征边界耗散权重.

由于耗散只发生在 B 子晶格上,耗散概率可以反映波包在长时间下的动力学行为.在本文所考虑的参数区域内,波包长时间存在概率在数值精度范围内趋于零.波函数范数随时间的衰减为:

$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = i \langle \psi(t) | (H^\dagger - H) | \psi(t) \rangle = -\sum_n 2\gamma_n |\psi_n^B(t)|^2$, 所以行走者从位置 n 逃逸的概率为:

$$P_n = 2 \int_0^\infty \gamma_n |\psi_n^B(t)|^2 dt, \quad (6)$$

并满足归一化条件 $\sum_n P_n = 1$.

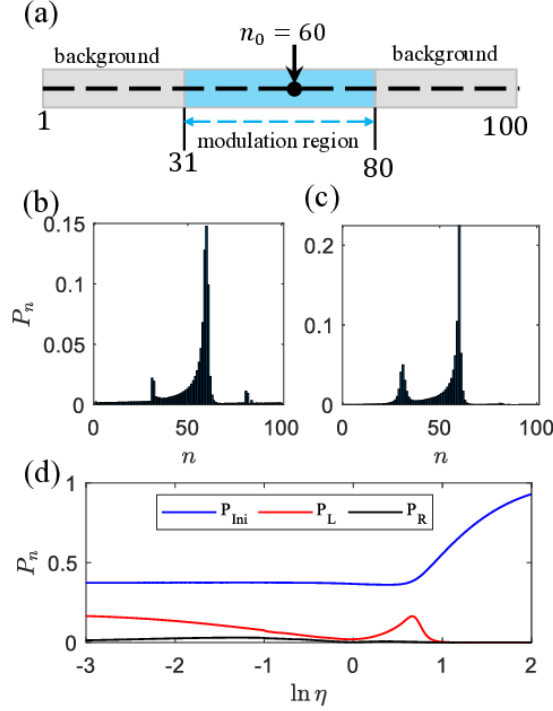


图2 (网刊彩色) 周期边界条件下界面诱导的爆发现象. (a) 调制区域为 $\mathcal{M} = [31, 80]$ 情况的示意图. (b), (c) 分别给出了初始位置设为 $n_0 = 60$ 的波包在不同 η 下的耗散概率 P_n , 其中 (b) 中调制强度 $\eta = 0.5$, (c) 中调制强度 $\eta = 2$. (d) 给出了若干位置的耗散权重 $\ln \eta$ 的变化关系, 蓝色表示初始位置附近耗散权重: $P_{\text{ini}} = \sum_{n=59}^{n=61} P_n$; 红色表示等效左边界附近耗散概率: $P_L = \sum_{n=29}^{n=33} P_n$; 黑色表示等效右边界附近耗散概率: $P_R = \sum_{n=81}^{n=82} P_n$. 这里 $N = 100$.

Fig. 2. (color line) Interface-induced burst under periodic boundary conditions. Panel (a) shows the schematic illustration for the case with the modulation region $\mathcal{M} = [31, 80]$. Panels (b) and (c) show the dissipation probability P_n for a wave packet initially prepared at $n_0 = 60$ for two different values of η , where the inhomogeneous modulation strength is $\eta = 0.5$ in (b) and $\eta = 2$ in (c). Panel (d) shows the dependence of the dissipation weight at several representative positions on $\ln \eta$. The blue curve denotes the dissipation weight near the initial position: $P_{\text{ini}} = \sum_{n=59}^{n=61} P_n$; the red curve denotes the dissipation weight near the effective left boundary: $P_L = \sum_{n=29}^{n=33} P_n$; and the black curve denotes the dissipation weight near the effective right boundary: $P_R = \sum_{n=81}^{n=82} P_n$. Here the inhomogeneous region is given by $\mathcal{M} = [m+1, m+\ell]$, with $m = 0.3N$, $\ell = 0.5N$, and $N = 100$.

上一节讨论了具有调制区域 $\mathcal{M} = [m+1, m+\ell]$ ($m = 0.3N$, $\ell = 0.5N$) 的系统分别在调制强度 $\eta = 0.5$ 和 $\eta = 2$ 时的能谱. 由于非厄米趋肤效应和等效边界的存在, 系统在等效边界处发生爆发现象成为可能. 此时波包在调制区, 也就是 $n_0 \in \mathcal{M}$. 在这种情况下, 调制强度为 $\eta = 0.5$ 和 $\eta = 2$ 时的耗散情况分别如图2(b)和2(c)所示.

图2(b)对应于 $\eta = 0.5 < 1$ 的情况, 可以观察到等效左边界附近 $n \approx 31, 32$ 处出现明显峰值, 而等效右边界附近 $n \approx 81, 82$ 处只有很弱的小峰. 这说明等效左边界和右边界处都出现了爆发现象, 而且等效左边界的爆发

强度大于等效右边界的爆发强度. 在等效非互易SSH模型中,上述图像可以理解成波包沿非互易方向首先到达等效左边界后,大量波包在该界面附近耗散掉,只有较少的一部分继续穿过该界面并传播到等效右边界. 图2(c)对应于 $\eta = 2 > 1$ 的情况,等效左边界附近的峰值范围扩展到了大约 $n \in [30, 33]$,而右边界响应进一步被压低.为了分析各位置爆发强度的原因,图2(d)分别展示了初始波包附近耗散权重 $P_{\text{Ini}} = \sum_{n=59}^{61} P_n$, 等效左边界附近耗散权重 $P_L = \sum_{n=29}^{33} P_n$ 和等效右边界附近耗散权重 $P_R = \sum_{n=81}^{82} P_n$ 随 $\ln \eta$ 的变化情况.

从图2(d)可以看出, P_{Ini} 、 P_L 以及 P_R 对 $\ln \eta$ 表现出明显不同的依赖关系. 在 $\eta < 1$ 的分支上, 蓝线所对应的 P_{Ini} 随着 δ_η 的变化基本保持在0.37附近.这说明当调制较弱时($\ln \eta < 0$),即使 δ_η 很大,波包在初始位置的耗散权重也基本不变.并且其数值明显小于1,表明波包有相当一部分能够逃离初始位置,向左传播到有效边界处.相比之下,红线所表示的 P_L 随着 δ_η 的增大而持续增加,并在较大 δ_η 下逐渐趋于饱和;黑线所表示的 P_R 仅缓慢增大,始终远小于 P_L ,并在较大 δ_η 下再次减小直至趋近于零.该结果表明,在 $\eta < 1$ 的情况下,波包是经过初始位置附近的耗散后来到达等效左边界处,然后穿过等效左边界再到达的等效右边界.在整个动力学过程中,如果失配度 δ_η 增强,等效边界的边界效应也会增强,因此红线值和黑线值开始都在增加.而边界效应增强又会阻碍波包通过等效左边界,所以红线一直增大,而黑线在到达一个最大值后再逐渐减小.当失配度足够大时,等效左边界已接近等效开边界,此时,红线趋于最大值保持平稳,黑线减小为零.

在 $\eta > 1$ 的分支上,随着 δ_η 的增大,蓝线和红线都缓慢增大.直到 $\ln \eta \approx 0.7$ 时,蓝线开始急剧上升.此时,红线达到最大值,之后急速下降.在整个过程中,黑线始终趋于零.该现象表明,在 $\eta > 1$ 的情形下,随着失配度的增强,等效边界的边界效应和调制区域的波包耗散速度也在不断增强,两者在 $\ln \eta \approx 0.7$ 时达到平衡.在 $\ln \eta < 0.7$ 时,边界效应占据主导,所以红线随着 $\ln \eta$ 增大而增大;在 $\ln \eta > 0.7$ 时, 调制区域的耗散速度更快,所以此时红线随着 $\ln \eta$ 增加而下降,而蓝线一直增大到1.

综上所述,在 $\eta < 1$ 的情形下,失配度 δ_η 增大,波包在初始位置的耗散权重一直平稳.相比之下,等效左边界的边界效应增强导致等效左边界的耗散权重一直增加直至趋于饱和.在 $\eta > 1$ 的情形下,失配度 δ_η 增大,波包在初始位置的耗散权重一直增加,即使边界效应也在增强,但会导致更少的波包到达等效左边界.在整个过程中,虽然左右两个等效边界由相同的参数失配产生等强的边界效应.但是,在等效SSH的非互易方向的选择下,波包先到达等效左边界,右边界无法积累与左边界同等强度的概率流.这表明,在这种构型下,系统整体的耗散权重由非互易方向, 调制区域耗散和边界效应三者共同决定.

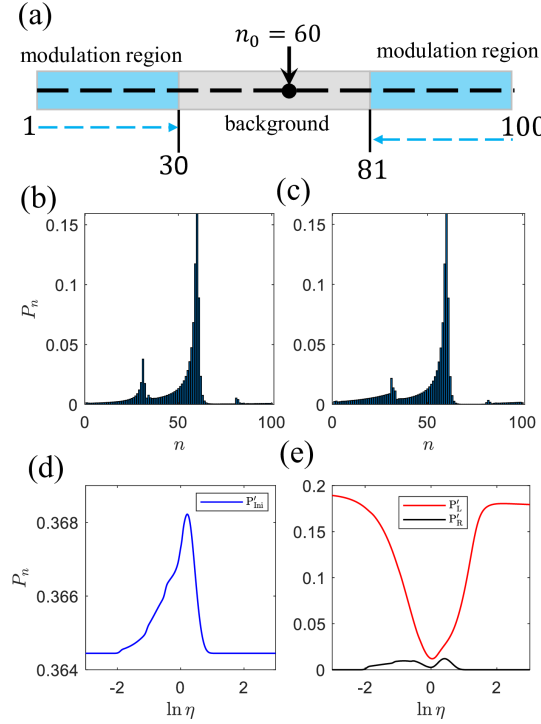


图3 (网刊彩色) 周期边界条件下界面诱导的爆发现象。(a) 调制区域为 $\mathcal{M} = [1, 30] \cup [81, 100]$ 情况的示意图。(b),(c) 分别给出了初始位置设为 $n_0 = 60$ 的波包在不同调制强度下的耗散概率 P_n ,其中(b)中调制强度 $\eta = 0.5$, (c)中调制强度 $\eta = 2$ 。(d) 初始位置附近耗散权重 P'_{ini} 随 $\ln \eta$ 的变化;(e) 等效左、右边界附近耗散权重 P'_L 和 P'_R 随 $\ln \eta$ 的变化。蓝色表示制备初始位置附近耗散权重: $P'_{\text{ini}} = \sum_{n=59}^{n=61} P_n$;红色表示等效左边界附近耗散权重: $P'_L = \sum_{n=30}^{n=32} P_n$;黑色表示等效右边界附近耗散权重: $P'_R = \sum_{n=81}^{n=82} P_n$ 。这里调制区域为 $\mathcal{M} = [m+1, m+\ell]$ ($m = 0.8N, \ell = 0.5N$), 以及 $N = 100$ 。

Fig. 3. (color line) Interface-induced burst under periodic boundary conditions. Panel (a) shows the schematic illustration for the case with the modulation region $\mathcal{M} = [1, 30] \cup [81, 100]$. Panels (b) and (c) show the dissipation probability P_n for a wave packet initially prepared at $n_0 = 60$ under two different modulation strengths, where the inhomogeneous modulation strength is $\eta = 0.5$ in (b) and $\eta = 2$ in (c). Panel (d) shows the dependence of the dissipation weight P'_{ini} near the initial position on $\ln \eta$; panel (e) shows the dependence of the dissipation weights P'_L and P'_R near the effective left and right boundaries on $\ln \eta$. The blue curve denotes the dissipation weight near the initially prepared wave packet: $P'_{\text{ini}} = \sum_{n=59}^{n=61} P_n$; the red curve denotes the dissipation weight near the effective left boundary: $P'_L = \sum_{n=30}^{n=32} P_n$; and the black curve denotes the dissipation weight near the effective right boundary: $P'_R = \sum_{n=81}^{n=82} P_n$. Here the inhomogeneous region is given by $\mathcal{M} = [m+1, m+\ell]$ ($m = 0.8N, \ell = 0.5N$), and $N = 100$.

进一步,将调制区域设为 $\mathcal{M} = [m+1, m+\ell]$ ($m = 0.8N, \ell = 0.5N$),在周期边界条件下,调制区域实际上对应于 $n \in [81, 100] \cup [1, 30]$,如图3(a)所示。此时,初始波包在背景区域,调制强度 $\eta = 0.5$ 和 $\eta = 2$ 的耗散情况,分别如图3(b)和3(c)所示。

以等效SSH模型视角分析,与初始波包在调制区域类似的是,波包从 $n_0 = 60$ 沿非互易方向向左出发后首先遇到的是等效左界面: $n \approx 30, 31$ 。这一点决定了图中主导爆发始终出现在 $n \approx 30, 31$ 附近,如图3(b)和3(c)所示。然后,波包穿过等效左界面,进入调制区域,再经过调制区域后到达等效右边界。当然,在两种情况下,等效左边界处的耗散峰强度不相同。同样,图3(d)和3(e)分别展示了初始位置附近耗散权重 $P'_{\text{ini}} = \sum_{n=59}^{n=61} P_n$,等效左

边界附近耗散权重 $P'_L = \sum_{n=30}^{n=32} P_n$ 和等效右边界附近耗散权重 $P'_R = \sum_{n=81}^{n=82} P_n$ 随 $\ln \eta$ 的变化情况。

在图3(d)中, 可以观察到, 蓝线在整个 $\ln \eta$ 范围内变化较小, 仅在 $\ln \eta \approx 0$ 附近出现峰值. 这是由于初始位置 $n_0 = 60$ 位于背景区域, 调制强度 η 的变化对初始位置附近波包的耗散影响较小, 使得蓝线仅在 $\ln \eta \approx 0$ 附近出现微弱峰值, 而这是因为边界效应增强, 少量 P'_{ini} 向 P'_L 转移的效果. 在图3(e) 中, 红线在 $\ln \eta < 0$ 和 $\ln \eta > 0$ 两侧都保持较大, 而在 $\ln \eta = 0$ 附近出现一个明显的极小值, 整体上呈现出近似反洛伦兹型依赖. 这说明左边界爆发在失配度 δ_η 较大时都较为显著, 而在 $\eta = 1$ 附近最弱. 其物理原因在于: 当 η 明显偏离1 时, 增大的失配度使得界面的边界效应增强, 导致红线也在增大, 直到界面逐渐过渡为等效开边界时, 红线达到最大并保持平稳. 在这个过程中, 黑线所表示 P'_R 的随着失配度 δ_η 的增大先是增大, 随后过大的失配度会引起等效左边界的边界效应增强, 进一步阻碍波包穿过等效左边界到达等效右边界, 从而导致黑线下降, 因此 P'_R 呈现双峰的形态. 并且由于右边界不是主导的爆发边界, P'_R 在整个 $\ln \eta$ 范围内都远小于 P'_L .

综上所述, 当初始态位于背景区域时, 波包在初始位置的耗散权重受到 η 的影响较小, 这种情况下, 爆发现象主要受到非互易方向和 $|\ln \eta|$ 增大所引起的边界效应的影响.

4 开边界条件下的边界选择机制

为了验证上述对调制区域边界爆发的解释, 这一节将体系推广到开边界条件下. 开边界条件下动力学方程同样可以用方程(1)表述, 此时遵循开边界条件: $\psi_{N+1}^{A(B)} = 0, \psi_0^{A(B)} = 0$. 同样的, 利用局域旋转变换(4)将该模型映射为一个开边界的等效非厄米SSH模型, 其哈密顿量为:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{SSH}} = & \sum_{n \notin \mathcal{M}} [(t + \gamma) F_n^\dagger Q_n + (t - \gamma) Q_n^\dagger F_n - i\gamma (F_n^\dagger F_n + Q_n^\dagger Q_n)] \\
 & + \sum_{n \in \mathcal{M}} \eta [(t + \gamma) F_n^\dagger Q_n + (t - \gamma) Q_n^\dagger F_n - i\gamma (F_n^\dagger F_n + Q_n^\dagger Q_n)] \\
 & + \sum_{n=1}^{N-1} J (F_{n+1}^\dagger Q_n + Q_n^\dagger F_{n+1}), \quad (7)
 \end{aligned}$$

此时, 系统中除了调制区域边界的两个有效边界, 还额外存在左右两个物理开边界, 如图4(a)和4(d)所示. 当 $\eta = 1$ 时, 系统是一个均匀的开边界耗散链, 只存在左右两个物理边界. 在这种情况下, 由于非厄米趋肤效应和周期边界下的能隙闭合, 无论波包初始是否远离左边物理边界, 系统都只会在左边物理边界处产生爆发现象, 如图4(c)和4(f)中 $\ln \eta = 0$ 的情况. 图4(b)和4(e)展示了当 $\eta = 0.5$ 时, 分别处于4(a)和4(d) 情况的初始波包在开边界条件下的耗散分布. 从图4(b) 和图4(e) 可以看出, 不管初始波包处于调制区域还是背景区

域,在 $n \approx 30 \sim 32$ 和 $n \approx 1$ 附近都有明显的峰值,分别对应于有效左边界和物理左边界处的爆发.这表明在开边界条件下,波包仍沿非互易方向向左传播,而在这一过程中,其主要耗散通道位于初始位置附近,有效左边界和物理左边界处.

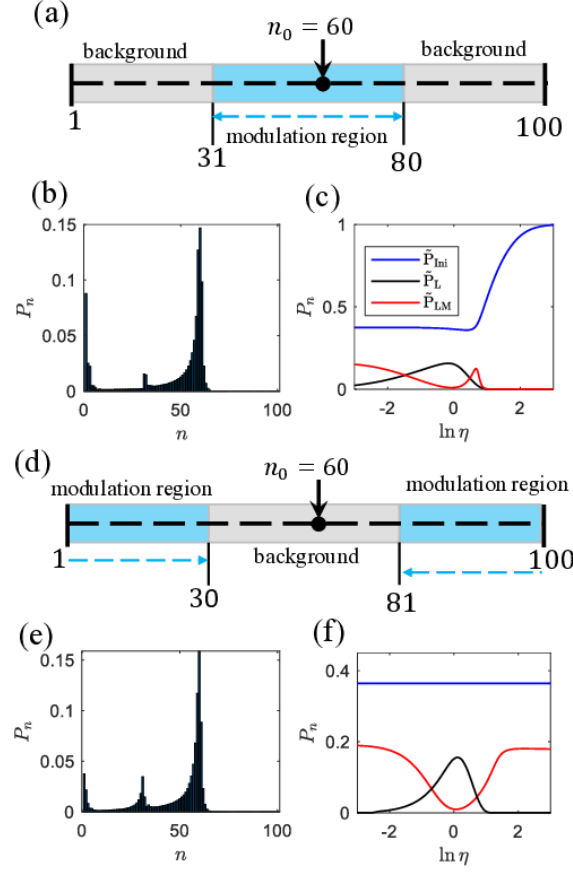


图4 (网刊彩色)开边界条件下界面诱导的爆发现象. (a)调制区域为 $\mathcal{M} = [31, 80]$ 情况的示意图. (b), (e)分别展示了初始位置为 $n_0 = 60$ 的波包在(a)和(d)示意图中 $\eta = 0.5$ 情况下的耗散概率 P_n . (d)调制区域为 $\mathcal{M} = [1, 30] \cup [81, 100]$ 情况的示意图. (c), (f)分别给出了(b)和(e)中若干代表性位置的耗散权重随 $\ln \eta$ 的变化关系.蓝色表示初始位置附近耗散权重: $\tilde{P}_{\text{ini}} = \sum_{n=59}^{61} P_n$;红色表示有效左边界附近的耗散权重: $\tilde{P}_L = \sum_{n=29}^{33} P_n$;黑色表示物理左边界的耗散权重: $\tilde{P}_{\text{LM}} = \sum_{n=1}^3 P_n$.

Fig. 4. (color line) Interface-induced burst under the open boundary conditions. (a) Schematic illustration for the case with the modulation region $\mathcal{M} = [31, 80]$. (b), (e) show the dissipation probability P_n for a wave packet initially prepared at $n_0 = 60$ in the schematics shown in (a) and (d), respectively, with $\eta = 0.5$. (d) Schematic illustration for the case with the modulation region $\mathcal{M} = [1, 30] \cup [81, 100]$. (c), (f) show the dependence of the dissipation weights at several representative positions in (b) and (e), respectively, on $\ln \eta$. The blue curve denotes the dissipation weight near the initial position: $\tilde{P}_{\text{ini}} = \sum_{n=59}^{61} P_n$; the red curve denotes the dissipation weight near the effective left boundary: $\tilde{P}_L = \sum_{n=29}^{33} P_n$; the black curve denotes the dissipation weight near the physical left boundary: $\tilde{P}_{\text{LM}} = \sum_{n=1}^3 P_n$.

图4(c) 和图4(f)分别展示了初始位置附近,有效左边界附近以及物理左边界附近的耗散权重: $\tilde{P}_{\text{ini}}, \tilde{P}_L, \tilde{P}_{\text{LM}}$,并给出其随 $\ln \eta$ 的变化.在图4(c)中,可以看见蓝线对应的 $\tilde{P}_{\text{ini}}$,红线对应的 $\tilde{P}_L$ 与图2(d)中的 P_{ini} 和 P_L 行为一致,符合第三节中对该现象的解释.而黑线表示的 $\tilde{P}_{\text{LM}}$ 呈现最大值在 $\ln \eta = 0$ 处的单峰形状,是因为 δ_η 的增大引起有效左边界的边界效应增大,更大程度上阻碍了波包的通过. $\tilde{P}_{\text{LM}}$ 在 $\ln \eta > 0$ 情况下下降

趋势快于在 $\ln \eta < 0$ 情况, 同样是因为在 $\ln \eta > 0$ 情况下 $\tilde{P}_{\text{ini}}$ 的急剧增大. 同理, 在图4(f)中, 蓝线和红线行为也和图3(d)和图3(e)中的蓝线和红线行为几乎一致, 而黑线相比于图4(c)情况, $\tilde{P}_{\text{ini}}$ 几乎不变, 其两边的行为呈现近似对称. 但随着 δ_η 的增大, 相较于 $\ln \eta < 0$ 情况, $\ln \eta > 0$ 情况下的有效左边界更快达到等效开边界, 使得红线右边更快达到最大值并稳定, 黑线则更快减小到零.

综上所述, 有效左边界在开边界条件下的耗散分布与周期条件下的耗散分布具有相似的行为, 验证了我们上一节中的解释: 当 $\eta \approx 1$ 时, 调制区域与背景几乎匹配, 有效边界效应最弱, 波包更容易传播到物理左边界, 因此物理左边界附近的耗散响应最强; 当失配度 δ_η 增大时, 有效边界的边界效应增强, 从而使有效左边界处的耗散增强并逐渐占据主导. 但如果波包被制备在调制区域内, η 的增大会使得初始位置附近的耗散权重急剧增强, 初始位置的耗散成为最主要的耗散通道. 同时物理左边界的耗散行为也补充了多种边界在同一个系统中的竞争现象. 在开边界条件下, 当调制强度适中, 或者初始波包处于背景区域, 有效左界面与物理左边界之间就会存在清晰的耗散竞争, 而这一切都是由非互易方向, 调制强度和初始波包制备区域共同决定.

5 结论

本文研究了一维非厄米耗散十字晶格模型中有限非均匀调制区域所诱导的边界选择爆发现象. 通过局域基变换, 原模型可以被映射为一个等效的非厄米SSH晶格模型, 从而表明该问题的物理核心在于调制区域与背景区域之间所形成的有效界面. 本文发现, 在周期边界条件下, 无论初始波包位于调制区域内部还是外部, 爆发现象都不会在区域内部产生, 而始终发生在调制区域边界附近. 进一步分析表明, 主导爆发位置由非互易传播方向所首先选中的有效界面决定. 将体系推广到开边界条件后进一步发现, 只有位于非互易优势方向上的有效界面和物理开边界才会产生显著爆发, 而其他方向上的边界则不会形成同等强度的耗散峰值. 由此可见, 有效界面与物理边界在非厄米耗散动力学中服从统一的边界选择机制. 这些结果揭示了一种不同于传统边缘爆发和局域点缺陷爆发的动力学图像: 当系统中存在多个候选边界时, 非互易传播会动态选择真正能够积累概率流的有效边界, 并在该边界附近形成长时间耗散爆发. 本文工作加深了对非厄米系统中非互易输运、界面效应与耗散动力学之间关系的理解, 也为利用有限区域调制实现耗散分布的定向操控提供了新的理论基础.

参考文献

- [1] Plotnik Y, Peleg O, Dreisow F, Heinrich M, Nolte S, Szameit A, Segev M 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 183901
- [2] Hafezi M, Mittal S, Fan J, Migdall A, Taylor J M 2013 *Nat. Photonics* **7** 1001
- [3] Guo C X, Liu C H, Zhao X M, Liu Y X, Chen S 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 116801
- [4] Li L H, Lee C H, Mu S, Gong J B 2020 *Nat. Commun.* **11** 5491
- [5] Yao S Y, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
- [6] Yao S Y, Song F, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 136802
- [7] Lee C H, Thomale R 2019 *Phys. Rev. B* **99** 201103(R)
- [8] Zhang K, Yang Z S, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
- [9] Lee C H, Longhi S 2020 *Commun. Phys.* **3** 147
- [10] Lee C H 2021 *Phys. Rev. B* **104** 195102
- [11] Yoshida T, Mizoguchi T, Hatsugai Y 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 022062
- [12] Yi Y F, Yang Z S 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 186802
- [13] Xiao L, Deng T S, Wang K K, Zhu G Y, Wang Z, Yi W, Xue P 2020 *Nat. Phys.* **16** 761
- [14] Lee T E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 133903
- [15] Li C A, Trauzettel B, Neupert T, Zhang S B 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 116601
- [16] Yoshida T, Zhang S B, Neupert T, Kawakami N 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 076502
- [17] Zhang K, Shu C, Sun K 2025 *Phys. Rev. X* **15** 031039
- [18] Kawabata K, Numasawa T, Ryu S 2023 *Phys. Rev. X* **13** 021007

- [19] Gliozzi J, De Tomasi G, Hughes T L 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 136503
- [20] Liu G G, Mandal S, Zhou P H, Xi X, Banerjee R, Hu Y H, Wei M G, Wang M R, Wang Q, Gao Z, Chen H S, Yang Y H, Chong Y D, Zhang B L 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 113802
- [21] Bosch M, Malzard S, Hentschel M, Schomerus H 2019 *Phys. Rev. A* **100** 063801
- [22] Liu C H, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 144106
- [23] Liu Y X, Chen S 2020 *Phys. Rev. B* **102** 075404
- [24] Xu Z H, Xia X, Chen S 2022 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **65** 227211
- [25] Xiong Y 2018 *J. Phys. Commun.* **2** 035043
- [26] Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, Bergholtz E J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 026808
- [27] Budich J C, Bergholtz E J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 180403
- [28] Li L H, Lee C H, Gong J B 2021 *Commun. Phys.* **4** 42
- [29] Yokomizo K, Murakami S 2021 *Phys. Rev. B* **104** 165117
- [30] Guo C X, Wang X L, Hu H P, Chen S 2023 *Phys. Rev. B* **107** 134121
- [31] Li B, Wang H R, Song F, Wang Z 2023 *Phys. Rev. B* **108** L161409
- [32] Mognini P, Arandes O, Bergholtz E J 2023 *Phys. Rev. Res.* **5** 033058
- [33] Wang H R, Li B, Song F, Wang Z 2023 *SciPost Phys.* **15** 191
- [34] Fu Y X, Zhang Y 2023 *Phys. Rev. B* **108** 205423
- [35] Xie X R, Liang G, Ma F, Du Y L, Peng Y W, Li E, Chen H S, Li L H, Gao F, Xue H R 2024 *Phys. Rev. B* **109** L140102
- [36] Li W, Sun Z J, Yang Z, Li F X 2024 *Phys. Rev. B* **109** 035119
- [37] Liu G J, Zhang J M, Li S Z, Li Z 2024 *Phys. Rev. A* **110** 012222

- [38] Zhang J, Hu K X, Zhang C L, Nie X F, Zhang Z X, Yan Y, Cao J, Zhang S, Wang H F 2024 *Phys. Rev. A* **110** 062216
- [39] Spring H, Könye V, Akhmerov A R, Fulga I C 2024 *SciPost Phys.* **17** 153
- [40] Zhang Y, Su L H, Chen S 2025 *Phys. Rev. B* **111** L140201
- [41] Su L H, Guo C X, Wang Y L, Li L, Ruan X H, Du Y J, Chen S, Zheng D N 2023 *Chin. Phys. B* **32** 038401
- [42] Yılmaz B, Yuce C, Bulutay C 2024 *Phys. Rev. B* **110** 214206
- [43] Rudner M S, Levitov L S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 065703
- [44] Xue W T, Hu Y M, Song F, Wang Z 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 120401
- [45] Xue W T, Li M R, Hu Y M, Song F, Wang Z 2021 *Phys. Rev. B* **103** L241408
- [46] Qiao L W, Zhang W, Shi K Y 2024 *Chin. Phys. Lett.* **41** 120301
- [47] Yuce C, Ramezani H 2024 *Phys. Rev. B* **109** 214301
- [48] Zhu J K, Mao Y L, Chen H, Yang K X, Li L H, Yang B, Li Z D, Fan J Y 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 203801
- [49] Xiao L, Xue W T, Song F, Hu Y M, Yi W, Wang Z, Xue P 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 070801
- [50] Wen P Y, Pi J H, Long G L 2024 *Phys. Rev. A* **109** 022236
- [51] Hu Y M, Xue W T, Song F, Wang Z 2023 *Phys. Rev. B* **108** 235422
- [52] Longhi S 2023 *Ann. Phys.(Berlin)* **535** 2300291
- [53] Ma S C, Lin H, Pi J H 2024 *Phys. Rev. B* **109** 214311
- [54] Liu S X, Dong Y L, Zeng B W, Long M Q 2026 *Phys. Rev. B* **113** 214319
- [55] Ren C C, Yin X G 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 160501 (in Chinese) [任翠翠, 伊相国 2023 物理学报 **72** 160501]
- [56] Li C M, Zhang G Y, Wang L 2026 *Acta Phys. Sin.* **75** 20260304 (in Chinese) [李朝敏, 张国瑛, 王利 2026 **75** 20260304]
- [57] Yuce C, Ramezani H 2023 *Phys. Rev. B* **107** L140302

- [58] Sen G, Yuce C 2025 *Phys. Rev. B* **111** 174305
- [59] Liu H, Xu Z H 2026 arXiv:2605.21034 [quant-ph]
- [60] Gao H, Xue H R, Gu Z M, Liu T, Zhu J, Zhang B L 2021 *Nat. Commun.* **12** 1888
- [61] Xiong L W, Zhang Q C, Feng X L, Leng Y F, Pi M, Tong S S, Qiu C Y 2024 *Phys. Rev. B* **110** L140305
- [62] Rafi-Ul-Islam S M, Sahin H, Siu Z B, Jalil M B A 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** 043021

录用稿件，非最终出版稿

Effective-Boundary-Selected Burst in Dissipative Lattices

LU Zhanpeng¹⁾ XU Zhihao^{2)‡} LIU Hui^{2)†}

1) (*Department of Physics, Xinzhou Normal University, Xinzhou 034000, China*)

2) (*Institute of Theoretical Physics and State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

Abstract

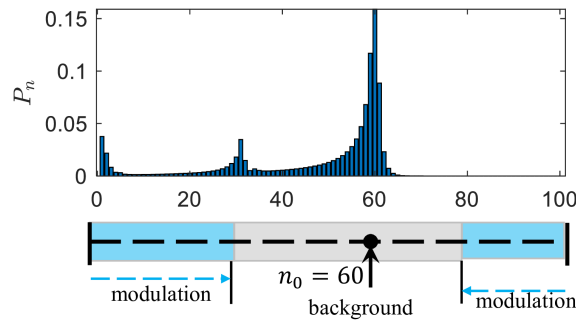
We study boundary-selected burst phenomena induced by a finite inhomogeneous modulation region in a one-dimensional non-Hermitian dissipative cross-stitch lattice. Compared with point defects, a finite modulated segment embedded in a uniform background is a more realistic form of spatial inhomogeneity and naturally generates two candidate effective interfaces. By simultaneously modulating the intracell coupling and local dissipation within the segment, we construct such an inhomogeneous region and map the model, via a local basis transformation, onto a non-Hermitian SSH chain with a finite parameter-mismatch region. Our dynamical analysis shows that under periodic boundary conditions the long-time dissipation peak does not emerge inside the modulated region, but is pinned to its boundary. The dominant burst is selected by the first interface encountered along the preferred nonreciprocal propagation direction. The burst intensity is further found to be governed not solely by the modulation strength η , but by the competition between effective-boundary trapping and local dissipation near the initial position. When the initial state is prepared inside the modulated region, increasing η enhances local dissipation near the initial position and suppresses the effective-left-boundary burst; when the initial state is prepared in the uniform background, the local dissipation near the initial position changes only weakly with η , while the effective-left-boundary burst exhibits an approximately inverse-Lorentzian-like dependence on $\ln \eta$. For open boundary conditions,

* Project supported by Quantum Science and Technology-National Science and Technology Major Project (Grant No. 2025ZD0300400), the NSFC (Grant Nos. 12375016 and 12461160324), and Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics (No. 2023BNLCMPKF001)

‡ Corresponding author. E-mail: xuzhihao@sxu.edu.cn

† Corresponding author. E-mail: liuhui99@sxu.edu.cn

a representative dissipation profile shows that pronounced peaks appear at the effective left interface and at the physical left edge, whereas no comparable enhancement occurs inside the modulated region or at the opposite interface. This demonstrates that finite-region interfaces and physical open boundaries obey a unified boundary-selection mechanism. Our results clarify how nonreciprocal transport, interface effects, and dissipation compete in non-Hermitian lattices, and provide a theoretical basis for directional control of dissipation via regional modulation.



Keywords: non-Hermitian systems, dissipative systems, non-Hermitian skin effect, burst phenomena

PACS: 05.40.Fb, 03.65.Vf, 42.82.Et