

基于传递矩阵法的双叠片压电换能器径弯耦合振动研究*

任文博[#] 章超[#] 林书玉[†]

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 陕西省超声重点实验室, 西安 710119)

摘要

双叠片压电换能器由压电、金属圆板组成, 采用弯曲振动工作模式, 在水声、气介超声等领域中应用广泛. 然而随着板厚增大, 其横向剪切应变与耦合效应不能被忽略. 为了精确研究双叠片换能器的机电特性, 本文使用传递矩阵法将换能器沿径向划分为 n 个等宽度的圆环机械串联. 基于 Mindlin 板理论, 引入中面径向位移和电学传递量, 结合边界条件, 利用解析法得出了双叠片换能器弯曲振动和径弯耦合振动的共振频率方程及换能器输入电阻抗的解析表达式. 为了验证该理论模型的正确性, 采用有限元法对换能器的振动模态、电阻抗频率响应特性进行数值模拟, 对比了厚径比 (h/R) 不同情况下前四阶振动模态及其共振频率的相对误差, 同时研制实物换能器并对其电阻抗特性以及振动模态进行实验测量. 结果表明, 理论计算所得的共振频率与数值模拟、实验测量的结果吻合较好. 该理论模型为双叠片换能器的优化和设计提供快速分析方法, 可以为实际的工程应用提供理论支撑.

关键词: 传递矩阵法, Mindlin 板理论, 径弯耦合振动, 阻抗分析

PACS: 43.38.+n, 43.40.+s

基金: 国家自然科学基金 (批准号: 12574498) 资助的课题

[#] 同等贡献作者.

[†] 通信作者. E-mail: sylin@snnu.edu.cn

1 引言

双叠片压电换能器由金属层和压电层复合而成, 有结构简单、与空气阻抗匹配良好、机械阻抗低等优点, 可以用于制作传感器和致动器^[1-6]. 针对双叠片换能器振动特性的建模与分析, 国内外学者已开展了大量研究. 基于 Kirchhoff^[7]经典薄板理论, 假设在形变过程中, 板的中面在弯曲过程中不伸缩, 垂直于板中面的应力忽略不计, Love^[8]提出了经典的复合板理论, 穆廷荣等^[9-11]采用 Rayleigh-Ritz 法得到了复合结构的动力学模型, 但其需要假设特定的函数才能计算. 然而, 由

于 Kirchhoff 经典板理论忽略横向剪切应变, 因此难以准确描述中厚板结构及高阶振动模态的动力学特性. 对于中厚板, Reissner^[12,13]考虑了横向剪切应变, 在 Reissner 理论的基础上, Mindlin^[14]提出了一阶剪切形变理论, 该理论还考虑了转动惯量的影响, 引入剪切系数, 但是在 Mindlin 的研究中未考虑板中的径向位移, 这就导致无法计算压电复合结构中的径弯耦合振动.

对于压电复合结构的研究, 压电层中的电势分布建模是重要组成部分. Mindlin^[15]最初假设压电层的电势分布为常数, 并认为其在厚度方向上的电势为零. 然而, 这种假设会导致计算结果出现较大误差. 随后, Mindlin^[16]改进了这一假设, 提出压电层的电势呈线性分布, 从而使压电层内的电场保持恒定. 尽管该假设已被广泛应用于复合结构的计算中, 但其可能无法严格满足麦克斯韦方程的要求^[17]. 为解决这一问题, Wang^[18]等人引入二次函数来描述压电复合圆板中各压电层沿厚度方向的电势分布, 从而对电势模型进行了修正. 此外, 在纯压电的情况下, 当电极短接时, Lee^[19]通过假设电势分布为正弦变化的形式开展了振动分析, 这种方法也能够满足麦克斯韦方程.

在实际应用中, 对于较薄的双叠片换能器, 基于经典薄板理论可以进行准确的分析, 但其机械强度低, 功率容量不够. 通过增加厚度可以提高其功率容量, 然而随着板厚增加, 厚径比增大, 此时横向剪切应变与耦合效应不能被忽略, 经典薄板理论不再适用. 与传统 Mindlin 板理论模型不同, 本文在位移场中引入中面径向位移, 从而能够描述径向振动与弯曲振动之间的耦合效应.

传递矩阵法 (Transfer Matrix Method, 简记为 TMM) 是一种用于分析多层连续介质波动传播特性的方法, 其核心思想是将复杂系统分解为独立功能单元, 利用矩阵运算描述各单元间的传递关系, 通过矩阵乘法实现快速求解, 显著降低计算复杂度, 提高计算效率^[20,21]. 基于此, 本文使用传递矩阵法将双叠片换能器沿

径向划分为 n 个等宽度的圆环单元，建立了双叠片换能器的机电传递矩阵模型. 理论模型能够精准计算出任意厚度、直径的双叠片换能器的弯曲振动模态和径弯耦合振动模态，理论运算得出的解析解与仿真得出的数值解、实验测量结果吻合良好. 本文研究了厚径比不同的双叠片换能器，不论厚径比大或小，换能器的弯曲振动、径弯耦合振动模态对应的频率最大相对误差均不超过 5%，低阶模态的理论计算更加准确，误差均小于 2%. 本文在传递矩阵中引入电学传递量，使得换能器阻抗曲线可直接计算得到. 最后，加工出换能器样机，通过阻抗测量实验和激光测振实验进一步验证了理论模型的准确性.

2 理论模型构建

双叠片压电换能器由一个厚度极化的压电圆板和一个金属圆板组成，如图 1 所示. 其中换能器的半径为 r_n ，金属圆板的厚度为 h_1 ，压电圆板的厚度为 h_2 ，换能器总厚度 $h = h_1 + h_2$ ，直径 $R = 2r_n$ ，红色箭头代表压电陶瓷的极化方向.

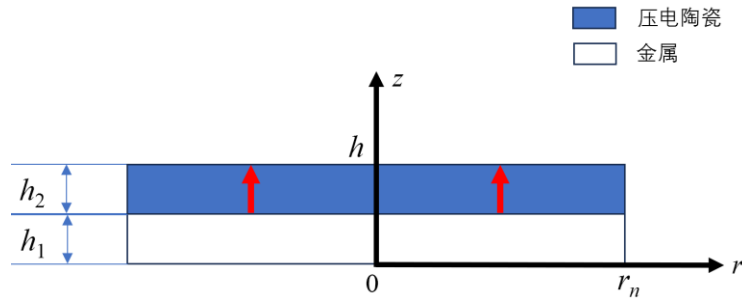


图1 双叠片换能器结构示意图

Fig. 1. The schematic diagram of unimorph transducer structure.

2.1 Mindlin 板理论

根据 Mindlin 板理论，考虑剪切形变以及转动惯量的影响，在柱坐标系下，板的位移场表示为：

$$u_r(r, \theta, z, t) = z\psi_r(r, \theta, t), \quad (1)$$

$$u_\theta(r, \theta, z, t) = z\psi_\theta(r, \theta, t), \quad (2)$$

$$u_z(r, \theta, z, t) = w(r, \theta, t). \quad (3)$$

然而 Mindlin 的研究中未考虑板中的径向位移, 无法研究双叠片换能器的径向耦合振动. 基于 Mindlin 板理论, 本文引入中面径向位移, 研究关于 θ 方向对称的模式, 位移场与 θ 无关, 故板的位移场函数可表示为:

$$\underline{u_r(r, z, t) = (z - zm)\psi_r(r)e^{j\omega t} + v(r)e^{j\omega t}}, \quad (4)$$

$$\underline{u_\theta(r, z, t) = (z - zm)\psi_\theta(r)e^{j\omega t}}, \quad (5)$$

$$\underline{u_z(r, z, t) = w(r)e^{j\omega t}}. \quad (6)$$

式中 u_r 、 u_z 分别为板在径向、轴向上的位移, zm 为板的中面位置, v 为中面径向位移, w 为中面横向位移, ω 为角频率, ψ_r 为 $z-r$ 平面上的转角, ψ_θ 为 $z-\theta$ 平面上的转角.

为满足麦克斯韦方程组, 本文用 $\phi(r)$ 表示电势的径向分布, 用正弦函数表示压电层中的电势分布^[18]. 压电层任意点的电势为:

$$\phi(r, z) = \phi(r) \sin \frac{\pi(z - h_1)}{h_2}. \quad (7)$$

电场强度 E 和电位移 D 的分量可表示为:

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (8)$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (9)$$

$$D_r = e_{15}\gamma_{rz} + \bar{\Xi}_{11}E_r, \quad (10)$$

$$D_z = \bar{e}_{31}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + \bar{\Xi}_{33}E_z. \quad (11)$$

式中 $\bar{\Xi}_{11}$ 、 $\bar{\Xi}_{33}$ 为压电层的介电常数, 其中,

$$\bar{\Xi}_{33} = \Xi_{33} + e_{33}^2 / C_{33}^E. \quad (12)$$

金属层和压电层在径向、切向上的正应变及剪切应变分别表示为:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = (z - zm) \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = (z - zm) \frac{\psi_r}{r} + \frac{v}{r}, \quad (14)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \psi_r + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (15)$$

金属层、压电层中的应力分量分别表示为：

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{Y}{1-\mu^2} (\varepsilon_{rr} + \mu \varepsilon_{\theta\theta}), \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{Y}{1-\mu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \mu \varepsilon_{rr}), \quad (17)$$

$$\tau_{rz}^{(1)} = \kappa^2 \frac{Y}{2(1+\mu)} \gamma_{rz}, \quad (18)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \bar{C}_{11}^E \varepsilon_{rr} + \bar{C}_{12}^E \varepsilon_{\theta\theta} - \bar{e}_{31} E_z, \quad (19)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)} = \bar{C}_{12}^E \varepsilon_{rr} + \bar{C}_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta} - \bar{e}_{31} E_z, \quad (20)$$

$$\tau_{rz}^{(2)} = \kappa^2 C_{55}^E \gamma_{rz} + e_{15} E_r. \quad (21)$$

上式中，上标(1)表示金属层中的变量，上标(2)表示压电层中的变量， Y 和 μ 分别为金属层中的杨氏模量和泊松比。 κ 为 Mindlin 板模型中用于校正剪切模量的剪切因子^[15]， e_{31} 、 e_{33} 、 e_{15} 为压电常数， E_r 、 E_θ 、 E_z 分别为径向、切向和横向的电场强度， C_{11}^E 、 C_{12}^E 、 C_{13}^E 、 C_{33}^E 、 C_{55}^E 为恒定电场下的弹性劲度常数，其中，

$$\bar{C}_{11}^E = C_{11}^E - ((C_{13}^E)^2 / C_{33}^E), \quad (22)$$

$$\bar{C}_{12}^E = C_{12}^E - ((C_{13}^E)^2 / C_{33}^E), \quad (23)$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - e_{33}(C_{13}^E / C_{33}^E). \quad (24)$$

弯矩 M 、径向内力 N 以及剪切力 Q 分别表示为：

$$M_{rr} = \int_0^{h_1+h_2} (z-zm) \sigma_{rr} dz = \int_0^{h_1} (z-zm) \sigma_{rr}^{(1)} dz + \int_{h_1}^{h_1+h_2} (z-zm) \sigma_{rr}^{(2)} dz, \quad (25)$$

$$M_{\theta\theta} = \int_0^{h_1+h_2} (z-zm) \sigma_{\theta\theta} dz = \int_0^{h_1} (z-zm) \sigma_{\theta\theta}^{(1)} dz + \int_{h_1}^{h_1+h_2} (z-zm) \sigma_{\theta\theta}^{(2)} dz, \quad (26)$$

$$N_{rr} = \int_0^{h_1+h_2} \sigma_{rr} dz = \int_0^{h_1} \sigma_{rr}^{(1)} dz + \int_{h_1}^{h_1+h_2} \sigma_{rr}^{(2)} dz, \quad (27)$$

$$N_{\theta\theta} = \int_0^{h_1+h_2} \sigma_{\theta\theta} dz = \int_0^{h_1} \sigma_{\theta\theta}^{(1)} dz + \int_{h_1}^{h_1+h_2} \sigma_{\theta\theta}^{(2)} dz, \quad (28)$$

$$Q_r = \int_0^{h_1+h_2} \tau_{rz} dz = \int_0^{h_1} \tau_{rz}^{(1)} dz + \int_{h_1}^{h_1+h_2} \tau_{rz}^{(2)} dz. \quad (29)$$

基于 Mindlin 板理论以及压电层中的电势分布，双叠片换能器的弯曲振动控制方程为：

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{r \partial \theta} + \frac{Q_r}{r} - \int_0^{h_1} \rho_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} dz - \int_{h_1}^{h_1+h_2} \rho_2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} dz = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r} - Q_r - \int_0^{h_1} \rho_1 (z - zm) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} dz - \int_{h_1}^{h_1+h_2} \rho_2 (z - zm) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} dz = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial N_{rr}}{\partial r} + \frac{N_{rr} - N_{\theta\theta}}{r} - \int_0^{h_1} \rho_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} dz - \int_{h_1}^{h_1+h_2} \rho_2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} dz = 0, \quad (32)$$

$$\int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(\frac{\partial(rD_r)}{r \partial r} + \frac{\partial D_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dz = 0, \quad (33)$$

式中 ρ_1 代表金属层的密度， ρ_2 代表压电层的密度。

2.2 双叠片换能器的传递矩阵法建模

根据上述分析，结合式(25)-(33)，可以将双叠片换能器的振动控制方程表示为矩阵微分方程形式：

$$\frac{d}{dr} \mathbf{Z}(r) = \mathbf{P}(r) \mathbf{Z}(r), \quad (34)$$

其中，状态向量 $\mathbf{Z}(r) = [Q \ M \ N \ w \ v \ \psi \ \varphi \ y \ U]^T$ ， $\mathbf{P}(r)$ 为一个 9×9 的系数矩阵，矩阵 $\mathbf{P}(r)$ 中各元素的表达式见附录. U 为压电层所施加的电压， y 作为辅助量引入状态向量中，用于描述力学量与电学量的耦合，表示为：

$$y = \int_{h_1}^{h_1+h_2} D_r dz. \quad (35)$$

从轴对称中心位置 $r_0 = 0$ 到边界 r_n 处，使用传递矩阵法可以将双叠片换能器沿径向划分为 n 个等宽度的圆环单元，如图 2(a)所示。

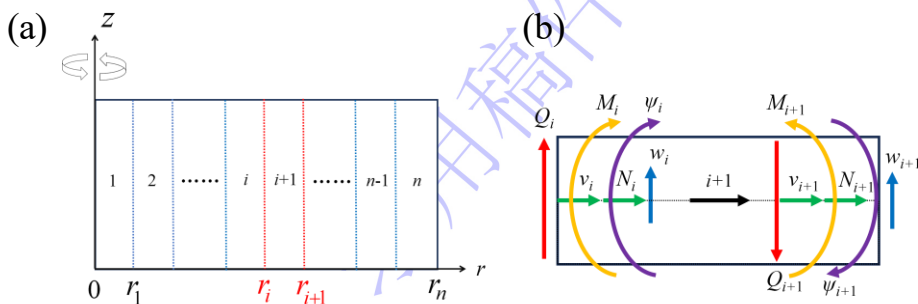


图2 传递矩阵模型示意图 (a) 换能器几何建模; (b) 第 $i + 1$ 个圆环单元的传递矩阵模型

Fig. 2. The diagram of TMM model: (a) The geometric modeling of the transducer; (b) The TMM model of $i + 1$ circular ring element.

对于第 $i + 1$ 个圆环单元, 左右两端位置径向坐标分别为 $r = r_i$ 和 $r = r_{i+1}$, 其微分方程可以表示为:

$$\frac{d}{dr} \mathbf{Z}(r) = \mathbf{P}(r_a) \mathbf{Z}(r). \quad (36)$$

对式(36)求解, 可以得到第 $i + 1$ 个圆环单元的传递关系表达式为:

$$\mathbf{Z}(r_{i+1}) = \exp[\mathbf{P}(r_a)(r_{i+1} - r_i)] \mathbf{Z}(r_i) = \mathbf{T}(r_{i+1}) \mathbf{Z}(r_i), \quad (37)$$

其中, $\mathbf{Z}(r_i) = [Q_i \ M_i \ N_i \ w_i \ v_i \ \psi_i \ \phi_i \ y_i \ U_i]^T$ 是径向坐标 $r = r_i$ 处的状态向量. $\mathbf{P}(r_a)$ 是径向坐标 $r = r_a$ 处的系数矩阵, 也代表着圆环单元对应的系数矩阵, r_a 的取值影响该圆环单元的实际特性, 为确保计算的精确性与效率, 取 $r_a = 0.5(r_{i+1} + r_i)$.

如图 2(b)所示, 圆环单元左右两端的力学系数用 Q, M, N, w, v, ψ 表示, U 为电学系数, 其余为机电耦合系数. 本文构建的传递矩阵模型中包括力学系数、电学系数和机电耦合系数三部分, 而在一些现有的换能器传递矩阵模型中, 只考虑了力学系数, 忽略了电学和机电耦合系数.

由式(37)可得圆环单元的传递矩阵模型为:

$$\mathbf{T}(r_{i+1}) \mathbf{Z}(r_i) - \mathbf{Z}(r_{i+1}) = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (38)$$

当压电层施加电压 $U = 1 \text{ V}$ 时, 式(38)可以简化为:

$$\mathbf{S}_{i+1}^{(k,l)} \mathbf{X}_i - \mathbf{I} \mathbf{X}_{i+1} = -\mathbf{Y}_{i+1}. \quad (39)$$

上式中, 上标 (k, l) 代表矩阵元素的位置为第 k 行第 l 列, 其中,

$$\mathbf{S}_{i+1}^{(k,l)} = \mathbf{T}_{i+1}^{(k,l)}, \quad (40)$$

$$\mathbf{T}_{i+1}^{(k,l)} = \mathbf{T}(r_{i+1}), \quad (41)$$

$$\mathbf{X}_i = [Q_i \quad M_i \quad N_i \quad w_i \quad v_i \quad \psi_i \quad \phi_i \quad y_i]^T, \quad (42)$$

$$\mathbf{Y}_{i+1} = [T_{i+1}^{(1,9)} \quad T_{i+1}^{(2,9)} \quad T_{i+1}^{(3,9)} \quad T_{i+1}^{(4,9)} \quad T_{i+1}^{(5,9)} \quad T_{i+1}^{(6,9)} \quad T_{i+1}^{(7,9)} \quad T_{i+1}^{(8,9)}]^T. \quad (43)$$

由上述分析，建立整个换能器的机电传递矩阵模型如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & -\mathbf{I} & & & & & & & \\ & \mathbf{S}_2 & -\mathbf{I} & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & \mathbf{S}_{n-1} & -\mathbf{I} & & & \\ & & & & & \mathbf{S}_n & -\mathbf{I} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n-1} \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{n-1} \\ \mathbf{Y}_n \end{bmatrix}. \quad (44)$$

在外边界自由的条件下^[22]，从中心 $r = r_0$ 向边缘 $r = r_n$ 传递. 中心处 Q_0 、 v_0 、 ψ_0 、 y_0 等于 0，边缘处 Q_n 、 M_n 、 N_n 、 y_n 等于 0. 结合边界条件，传递矩阵法可以提供通用解决方案来建模整个双叠片换能器并求解，并进一步分析整个换能器的动力学特性，为双叠片换能器的参数优化提供依据.

此外，压电陶瓷表面的电荷量可表示为：

$$q = 2\pi \int_0^{r_n} D_z(r, h_1) r dr. \quad (45)$$

其中，

$$D_z(r, h_1) = \mathbf{H}(r) \cdot \mathbf{Z}(r). \quad (46)$$

式中 $\mathbf{H}(r)$ 为一个 1×9 的矩阵，系数矩阵 $\mathbf{H}(r)$ 中各元素的表达式见附录.

当施加正弦信号激励时，可以确定通过压电陶瓷的电流：

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} = j\omega q. \quad (47)$$

换能器的电阻抗可以由下式计算得到：

$$Z = \frac{U}{I}. \quad (48)$$

3 理论计算与仿真对比

为了验证理论模型的准确性，基于有限元软件 COMSOL Multiphysics 6.2 的固体力学、静电模块，对双叠片换能器的机电特性进行仿真模拟. 压电层施加激

励电压为 1 V，材料为 PZT-4，其材料参数如下： $\rho_2 = 7500 \text{ kg/m}^3$ ， $\Xi_{11} = 7.142 \text{ nF/m}$ ， $\Xi_{33} = 5.841 \text{ nF/m}$ ， $e_{31} = -4.1 \text{ C/m}^2$ ， $e_{33} = 14.1 \text{ C/m}^2$ ， $e_{15} = 10.5 \text{ C/m}^2$ ， $C_{11}^E = 132 \text{ GPa}$ ， $C_{12}^E = 71 \text{ GPa}$ ， $C_{13}^E = 73 \text{ GPa}$ ， $C_{33}^E = 115 \text{ GPa}$ ， $C_{55}^E = 26 \text{ GPa}$ ，金属层的材料为铝，其材料参数为： $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$ ， $Y = 7 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ， $\mu = 0.33$ ，边界条件为自由边界，网格划分选择极细化。

当双叠片换能器的半径 $r_n = 40 \text{ mm}$ ，金属层厚度 $h_1 = 5 \text{ mm}$ ，压电层厚度 $h_2 = 3 \text{ mm}$ 时，换能器的总厚度 $h = 8 \text{ mm}$ ，直径 $R = 80 \text{ mm}$ ，此时厚径比 $h/R = 1/10$ ，有限元仿真结果如图 3 所示。

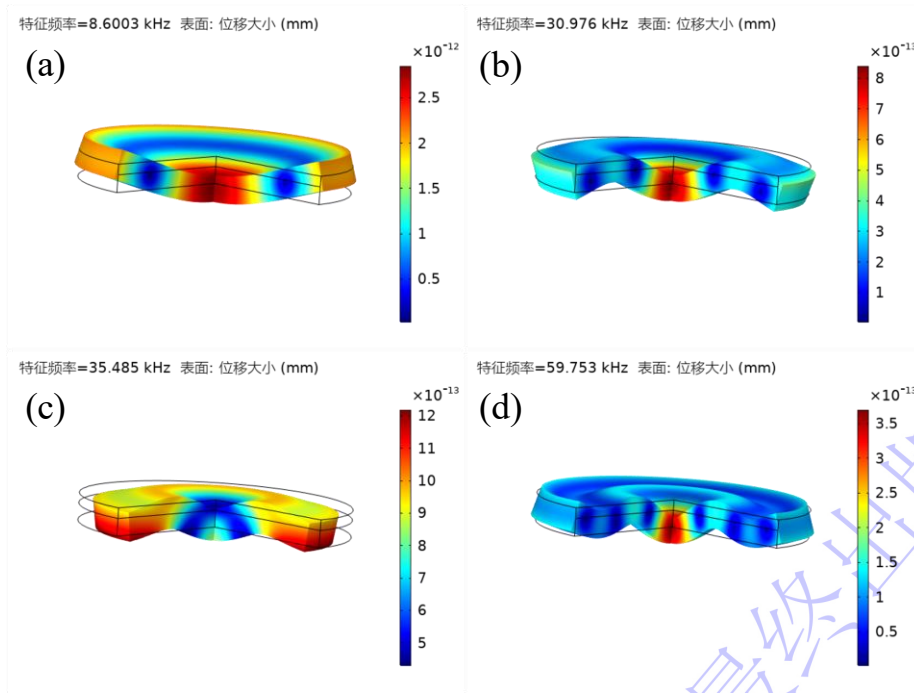


图3 换能器振动模态 (a) 一阶弯曲振动模态；(b) 二阶弯曲振动模态；(c) 径弯耦合振动模态；(d) 三阶弯曲振动模态

Fig. 3. The vibration mode diagram of transducer: (a) First order bending vibration mode; (b) Second order bending vibration mode; (c) Radial bending coupling vibration mode; (d) Third order bending vibration mode.

图 3(a)为双叠片换能器的一阶弯曲振动模态振型，其共振频率为 8.6003 kHz.

图 3(b)为双叠片换能器的二阶弯曲振动模态振型，其共振频率为 30.976 kHz. 图

3(c)为双叠片换能器的径弯耦合振动模态振型，其共振频率为 35.485 kHz. 图 3(d)为双叠片换能器的三阶弯曲振动模态振型，其共振频率为 59.753 kHz.

求解式(48)即可得到双叠片换能器弯曲振动、径弯耦合振动的阻抗曲线，为兼顾计算精度与效率，取 $n=100$. 将理论计算得到的双叠片换能器的阻抗曲线同 COMSOL 有限元仿真的结果进行了对比，结果如图 4 所示.

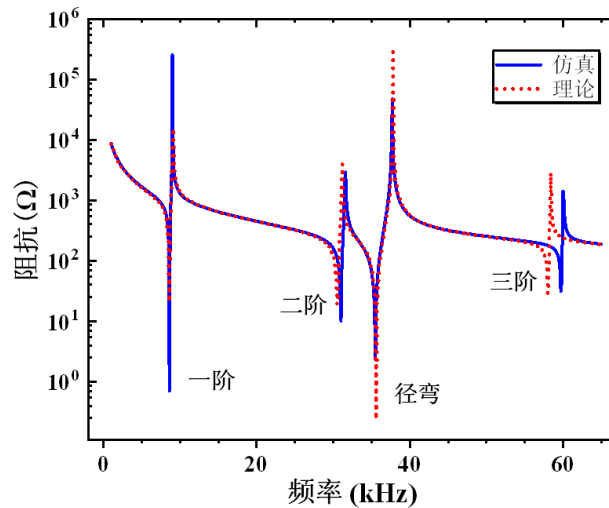


图4 换能器的阻抗曲线

Fig. 4. The impedance curve of transducer.

将理论计算得到的双叠片换能器的共振频率同 COMSOL 有限元仿真的结果进行了对比，结果如表 1 所示.

表1 换能器的前四阶振动模态共振频率 ($h/R = 1/10$)

Table 1. The first four resonant-frequencies of transducers with $h/R = 1/10$.

振动模态	共振频率/kHz		$\Delta/\%$
	f_T	f_C	
一阶弯曲	8.594	8.600	0.07
二阶弯曲	30.568	30.976	1.32
径弯耦合	35.606	35.485	0.34
三阶弯曲	58.086	59.753	2.79

f_T 、 f_C 分别表示理论计算、仿真模拟所得前四阶振动模态的共振频率，相对误差 $\Delta = |f_T - f_C| / f_C \times 100\%$ 。

一般认为中厚板的尺寸介于厚度与直径之比介于 1/10—1/5，为了验证理论模型对中厚板、薄板的适用性，通过不断改变双叠片换能器的直径，保持厚度不变，来改变双叠片换能器的厚度与直径之比。表 2、表 3 分别比较了双叠片换能器厚径比 $h/R = 1/20$ ($h = 8 \text{ mm}$, $R = 160 \text{ mm}$)、 $h/R = 1/5$ ($h = 8 \text{ mm}$, $R = 40 \text{ mm}$) 情况下理论计算与仿真模拟的前四阶振动模态的共振频率及相对误差。

表2 换能器的前四阶振动模态共振频率 ($h/R = 1/20$)

Table 2. The first four resonant-frequencies of transducers with $h/R = 1/20$.

振动模态	共振频率/kHz		$\Delta/\%$
	f_T	f_C	
一阶弯曲	2.251	2.246	0.22
二阶弯曲	9.024	9.047	0.25
径弯耦合	17.654	17.673	0.11
三阶弯曲	19.103	19.264	0.84

表3 换能器的前四阶振动模态共振频率 ($h/R = 1/5$)

Table 3. The first four resonant-frequencies of transducers with $h/R = 1/5$.

振动模态	共振频率/kHz		$\Delta/\%$
	f_T	f_C	
一阶弯曲	29.764	30.026	0.87
径弯耦合	70.060	69.057	1.45
二阶弯曲	87.118	90.136	3.35
三阶弯曲	140.425	147.040	4.50

通过比较表 1、表 2、表 3 中理论计算和仿真模拟的共振频率相对误差，可以得出以下结论：

1) 对于双叠片换能器,随着弯曲振动的振动阶数的不断提高,理论计算结果与有限元分析结果之间的相对误差逐渐增大,这是由于当换能器处于高阶振动模态时,会存在模态之间的相互耦合,导致频率偏移较大.

2) 对于厚径比不同的双叠片换能器,随着厚径比逐渐增大,即双叠片换能器的尺寸从薄板逐渐变为中厚板,其相对误差逐渐增大.这是因为随着厚径比增大,双叠片换能器越难产生弯曲振动和径弯耦合振动.

3) 无论厚径比相差大或小,双叠片换能器的前四阶共振频率的理论结果和仿真结果之间的误差始终小于 5%,对纵弯耦合模态前的低阶模态,理论计算更加准确,误差均小于 2%,验证了理论计算的准确性.

4 实验验证

为进一步验证理论的正确性,加工制作了如图 5 所示的换能器样机,换能器的材料与有限元分析的材料相同,换能器的半径 $r_n = 40\text{ mm}$,金属层厚度 $h_1 = 5\text{ mm}$,压电层厚度 $h_2 = 3\text{ mm}$,利用阻抗分析仪和激光测振仪对换能器的电参数特性和振动模态进行实验分析.

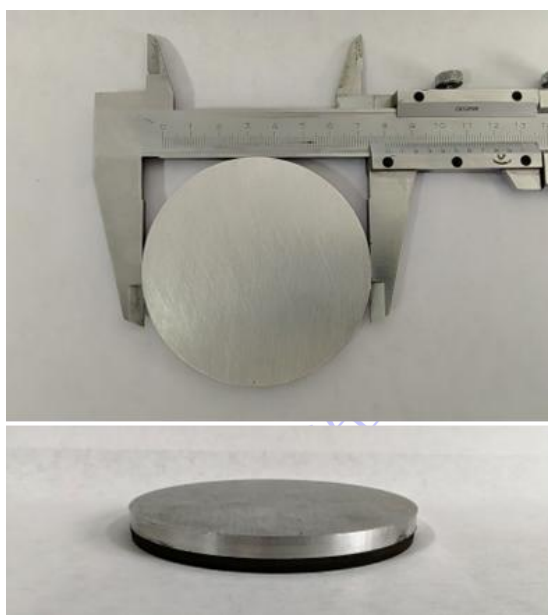


图5 换能器实物图

Fig. 5. The prototype diagram of transducer.

4.1 换能器阻抗测量实验

使用 WK6500B 精密阻抗分析仪对双叠片换能器的电阻抗特性进行了测量，如图 6 所示. 测量中频率扫描范围设置为 0—60 kHz. 所测得的电阻抗的频率响应曲线如图 6 所示，阻抗曲线中阻抗谷值对应于换能器的共振状态，一共有四个共振点，即四个振动模态能够被成功激发.

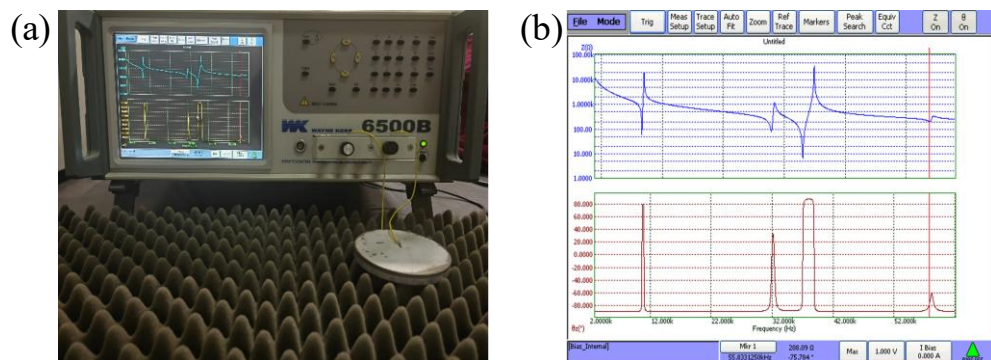


图6 双叠片换能器的阻抗测量实验装置和阻抗测量结果 (a) WK6500B 阻抗分析仪及换能器; (b) 换能器电阻抗及相位的频率响应曲线

Fig. 6. The impedance measurement experiment equipment and impedance measurement results of unimorph transducer: (a) WK6500B impedance analyzer and transducer; (b) frequency response curves for the impedance and phase of the transducer.

4.2 换能器激光测振实验

为验证理论分析和有限元仿真得出的振动模态，使用 Polytec PSV-400 激光测振扫描仪对双叠片换能器的振动模态进行了测量，如图 7 所示，频率扫描范围设置为 0—100 kHz，激励电压的幅值为 1 V. 图 8 为激光测振仪所测得的换能器前四阶振动模态的位移图以及在共振频率下的换能器的表面位移分布，实测得到的振动模态与理论分析结果一致，验证了双叠片换能器理论模型的有效性.



图7 双叠片换能器的激光测振实验

Fig. 7. The laser vibration measurement experiment of unimorph transducer.

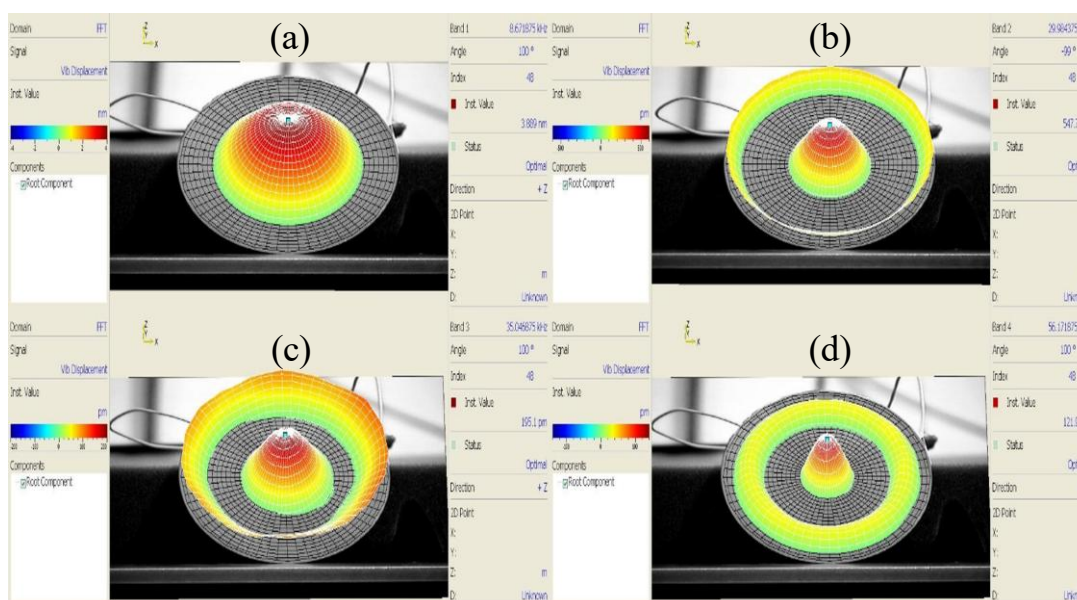


图8 激光测振仪测得的前四阶振动模态的位移图 (a) 一阶弯曲振动模态；(b) 二阶弯曲振动模态；(c) 径弯耦合振动模态；(d) 三阶弯曲振动模态

Fig. 8. The displacement diagram of the first four vibration modes measured by laser seismometer: (a) First order bending vibration mode; (b) Second order bending vibration mode; (c) Radial bending coupling vibration mode; (d) Third order bending vibration mode.

如表 4 所示， f_{E1} 、 f_{E2} 分别为阻抗分析实验、激光测振实验测量得到的换能器前四阶振动模态的共振频率。其中，相对误差 $\Delta_1 = |f_T - f_{E1}| / f_{E1} \times 100\%$ ， $\Delta_2 = |f_T - f_{E2}| / f_{E2} \times 100\%$ ，误差的主要来源有：

1) 受限于加工精度、组装工艺，双叠片换能器实验测量的结果与理论计算、仿真模拟的模型存在一定的差异。

2) 理论计算与仿真模拟中使用的材料参数是标准的材料参数，实际制造的双叠片换能器的材料参数与标准的材料参数存在差异，这也是造成相对误差较大的原因之一。

3) 在理论计算与仿真模拟中未考虑损耗和负载对换能器的影响，但是在实验测量过程中不能忽略。

表4 理论计算、实验测得换能器前四阶振动模态的共振频率及相对误差
Table 4. The resonance frequencies and relative errors of the first four vibration modes of the transducer obtained by theoretical calculation and experimental measuring.

振动模态	共振频率/kHz			$\Delta_1/\%$	$\Delta_2/\%$
	f_T	f_{E1}	f_{E2}		
一阶弯曲	8.594	8.633	8.671	0.45	0.89
二阶弯曲	30.568	29.910	29.984	2.20	1.95
径弯耦合	35.606	35.035	35.046	1.63	1.60
三阶弯曲	58.086	55.833	56.171	4.04	3.41

5 结论

本文基于 Mindlin 板理论和传递矩阵法，提出了一种新的解析分析方法，可精准高效计算自由边界条件下，任意厚度与直径的双叠片换能器弯曲振动、径弯耦合振动的振动模态与电阻抗。使用有限元软件进行了仿真模拟，分别对比了双叠片换能器的厚径比 (h/R) 为 1/20、1/10、1/5 的前四阶共振频率，所得数值与解析解的理论值符合较好，不论是弯曲振动模态还是径弯耦合振动模态，最大相对误差均不超过 5%，低阶模态的理论计算更加准确，误差均小于 2%。加工出实物换能器，实验所测得的共振频率与理论计算得出的解析解、仿真得出的数值

解吻合较好. 利用阻抗分析仪测得的共振频率与理论计算的结果一致, 确保换能器的振动模态能够被有效激发, 利用激光测振仪测得换能器的振型与仿真结果一致, 符合实际工程的需求. 本研究建立的理论模型可以为双叠片换能器的优化和设计提供快速分析方法, 可以为实际的工程应用提供理论支撑.

附录

$$\mathbf{P}(r) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} & p_{17} & p_{18} & p_{19} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} & p_{27} & p_{28} & p_{29} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} & p_{37} & p_{38} & p_{39} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} & p_{47} & p_{48} & p_{49} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} & p_{57} & p_{58} & p_{59} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} & p_{67} & p_{68} & p_{69} \\ p_{71} & p_{72} & p_{73} & p_{74} & p_{75} & p_{76} & p_{77} & p_{78} & p_{79} \\ p_{81} & p_{82} & p_{83} & p_{84} & p_{85} & p_{86} & p_{87} & p_{88} & p_{89} \\ p_{91} & p_{92} & p_{93} & p_{94} & p_{95} & p_{96} & p_{97} & p_{98} & p_{99} \end{bmatrix},$$

$$P_{11} = -\frac{1}{r}, \quad P_{12} = 0, \quad P_{13} = 0, \quad P_{14} = -h_1 \omega^2 \rho_1 - h_2 \omega^2 \rho_2, \quad P_{15} = 0, \quad P_{16} = 0, \quad P_{17} = 0,$$

$$P_{18} = 0, \quad P_{19} = 0;$$

$$P_{21} = 1, \quad P_{22} = \frac{a_4 B_3 - A_4 B_3 - a_3 B_4 + A_3 B_4}{A_4 B_3 r - A_3 B_4 r}, \quad P_{23} = -\frac{A_3 a_4 - a_3 A_4}{A_4 B_3 r - A_3 B_4 r}, \quad P_{24} = 0,$$

$$P_{25} = \frac{A_3 a_4 B_1 + a_3 (-A_4 B_1 + A_1 B_4) + A_3 B_4 (-a_1 + (I_{2D} + I_{2U}) r^2 \omega^2) - B_3 (A_1 a_4 - a_1 A_4 + A_4 (I_{2D} + I_{2U}) r^2 \omega^2)}{(A_4 B_3 - A_3 B_4) r^2}$$

,

$$P_{26} = \frac{A_3 a_4 B_2 + a_3 (-A_4 B_2 + A_2 B_4) + A_3 B_4 (-a_2 + (I_{3D} + I_{3U}) r^2 \omega^2) - B_3 (A_2 a_4 - a_2 A_4 + A_4 (I_{3D} + I_{3U}) r^2 \omega^2)}{(A_4 B_3 - A_3 B_4) r^2}$$

$$, \quad P_{27} = \frac{(-a_4 B_3 + A_4 B_3 + (a_3 - A_3) B_4) E_1}{(A_4 B_3 - A_3 B_4) r}, \quad P_{28} = 0,$$

$$P_{29} = \frac{A_3 a_4 \bar{e}_{31} - a_3 A_4 \bar{e}_{31} - a_4 B_3 U_1 + A_4 B_3 U_1 + a_3 B_4 U_1 - A_3 B_4 U_1}{A_4 B_3 r - A_3 B_4 r};$$

$$P_{31} = 0, \quad P_{32} = \frac{B_3 b_4 - b_3 B_4}{A_4 B_3 r - A_3 B_4 r}, \quad P_{33} = \frac{A_4 b_3 - A_4 B_3 - A_3 b_4 + A_3 B_4}{A_4 B_3 r - A_3 B_4 r}, \quad P_{34} = 0,$$

$$P_{35} = \frac{-A_4 (B_1 b_3 - b_1 B_3 + B_3 (I_{1D} + I_{1U}) r^2 \omega^2) + A_3 (B_1 b_4 - b_1 B_4 + B_4 (I_{1D} + I_{1U}) r^2 \omega^2)}{(A_4 B_3 - A_3 B_4) r^2},$$

$$P_{36} = \frac{-A_2 B_3 b_4 + A_2 b_3 B_4 - A_4 (B_2 b_3 - b_2 B_3 + B_3 (I_{2D} + I_{2U}) r^2 \omega^2) + A_3 (B_2 b_4 - b_2 B_4 + B_4 (I_{2D} + I_{2U}) r^2 \omega^2)}{(A_4 B_3 - A_3 B_4) r^2}$$

$$, \quad P_{37} = -\frac{B_3 b_4 E_1 - b_3 B_4 E_1}{A_4 B_3 r - A_3 B_4 r}, \quad P_{38} = 0,$$

$$P_{39} = \frac{A_4 (-b_3 + B_3) \bar{e}_{31} + A_3 (b_4 - B_4) \bar{e}_{31} - B_3 b_4 U_1 + b_3 B_4 U_1}{(A_4 B_3 - A_3 B_4) r};$$

$$P_{41} = \frac{E_2}{D_1 E_2 - C_1 E_3}, \quad P_{42} = 0, \quad P_{43} = 0, \quad P_{44} = 0, \quad P_{45} = 0, \quad P_{46} = -1, \quad P_{47} = 0,$$

$$P_{48} = \frac{E_3}{-D_1 E_2 + C_1 E_3}, \quad P_{49} = 0;$$

$$P_{51} = 0, \quad P_{52} = \frac{B_4}{-A_4 B_3 + A_3 B_4}, \quad P_{53} = \frac{A_4}{A_4 B_3 - A_3 B_4}, \quad P_{54} = 0, \quad P_{55} = -\frac{A_4 B_1 - A_1 B_4}{A_4 B_3 r - A_3 B_4 r},$$

$$P_{56} = -\frac{A_4 B_2 - A_2 B_4}{A_4 B_3 r - A_3 B_4 r}, \quad P_{57} = \frac{B_4 E_1}{A_4 B_3 - A_3 B_4}, \quad P_{58} = 0, \quad P_{59} = \frac{A_4 \bar{e}_{31} - B_4 U_1}{-A_4 B_3 + A_3 B_4};$$

$$P_{61} = 0, \quad P_{62} = \frac{B_3}{A_4 B_3 - A_3 B_4}, \quad P_{63} = \frac{A_3}{-A_4 B_3 + A_3 B_4}, \quad P_{64} = 0, \quad P_{65} = \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{A_4 B_3 r - A_3 B_4 r},$$

$$P_{66} = \frac{A_3 B_2 - A_2 B_3}{A_4 B_3 r - A_3 B_4 r}, \quad P_{67} = \frac{B_3 E_1}{-A_4 B_3 + A_3 B_4}, \quad P_{68} = 0, \quad P_{69} = \frac{A_3 \bar{e}_{31} - B_3 U_1}{A_4 B_3 - A_3 B_4};$$

$$P_{71} = \frac{C_1}{-D_1 E_2 + C_1 E_3}, \quad P_{72} = 0, \quad P_{73} = 0, \quad P_{74} = 0, \quad P_{75} = 0, \quad P_{76} = 0, \quad P_{77} = 0,$$

$$P_{78} = \frac{D_1}{D_1 E_2 - C_1 E_3}, \quad P_{79} = 0;$$

$$P_{81} = 0, \quad P_{82} = \frac{B_3 \bar{e}_{31} h_2}{-A_4 B_3 + A_3 B_4}, \quad P_{83} = \frac{A_3 \bar{e}_{31} h_2}{A_4 B_3 - A_3 B_4}, \quad P_{84} = 0,$$

$$P_{85} = \frac{(-A_3 B_1 + A_1 B_3) \bar{e}_{31} h_2}{(A_4 B_3 - A_3 B_4) r}, \quad P_{86} = \frac{((A_2 - A_4) B_3 + A_3 (-B_2 + B_4)) \bar{e}_{31} h_2}{(A_4 B_3 - A_3 B_4) r},$$

$$P_{87} = \frac{B_3 E_1 \bar{e}_{31} h_2}{A_4 B_3 - A_3 B_4} - \frac{2 \bar{\Xi}_{33} \pi}{h_2}, \quad P_{88} = -\frac{1}{r}, \quad P_{89} = \frac{(-A_3 \bar{e}_{31} + B_3 U_1) \bar{e}_{31} h_2}{A_4 B_3 - A_3 B_4};$$

$$P_{91} = 0, \quad P_{92} = 0, \quad P_{93} = 0, \quad P_{94} = 0, \quad P_{95} = 0, \quad P_{96} = 0, \quad P_{97} = 0, \quad P_{98} = 0,$$

$$P_{99} = 0.$$

$$I_{1U} = \rho_1 h_1, \quad I_{1D} = \rho_2 h_2, \quad I_{2U} = \int_0^{h_1} \rho_1 (z - zm) dz, \quad I_{2D} = \int_{h_1}^{h_1+h_2} \rho_2 (z - zm) dz,$$

$$I_{3U} = \int_0^{h_1} \rho_1 (z - zm)^2 dz, \quad I_{3D} = \int_{h_1}^{h_1+h_2} \rho_2 (z - zm)^2 dz, \quad i_{2U} = \int_0^{h_1} (z - zm) dz,$$

$$i_{2D} = \int_{h_1}^{h_1+h_2} (z - zm) dz, \quad i_{3U} = \int_0^{h_1} (z - zm)^2 dz, \quad i_{3D} = \int_{h_1}^{h_1+h_2} (z - zm)^2 dz,$$

$$A_1 = \bar{C}_{12}^E i_{2D} - \frac{i_{2U} Y \mu}{-1 + \mu^2}, \quad A_2 = \bar{C}_{12}^E i_{3D} - \frac{i_{3U} Y \mu}{-1 + \mu^2}, \quad A_3 = \bar{C}_{11}^E i_{2D} - \frac{i_{2U} Y}{-1 + \mu^2},$$

$$A_4 = \bar{C}_{11}^E i_{3D} - \frac{i_{3U} Y}{-1 + \mu^2}, \quad a_1 = \bar{C}_{11}^E i_{2D} - \frac{i_{2U} Y}{-1 + \mu^2}, \quad a_2 = \bar{C}_{11}^E i_{3D} - \frac{i_{3U} Y}{-1 + \mu^2},$$

$$a_3 = \bar{C}_{12}^E i_{2D} - \frac{i_{2U} Y \mu}{-1 + \mu^2}, \quad a_4 = \bar{C}_{12}^E i_{3D} - \frac{i_{3U} Y \mu}{-1 + \mu^2}, \quad B_1 = \bar{C}_{12}^E h_2 - \frac{h_1 Y \mu}{-1 + \mu^2},$$

$$B_2 = \bar{C}_{12}^E i_{2D} - \frac{i_{2U} Y \mu}{-1 + \mu^2}, \quad B_3 = \bar{C}_{11}^E h_2 - \frac{h_1 Y}{-1 + \mu^2}, \quad B_4 = \bar{C}_{11}^E i_{2D} - \frac{i_{2U} Y}{-1 + \mu^2},$$

$$b_1 = \bar{C}_{11}^E h_2 - \frac{h_1 Y}{-1 + \mu^2}, \quad b_2 = \bar{C}_{11}^E i_{2D} - \frac{i_{2U} Y}{-1 + \mu^2}, \quad b_3 = \bar{C}_{12}^E h_2 - \frac{h_1 Y \mu}{-1 + \mu^2},$$

$$b_4 = \bar{C}_{12}^E i_{2D} - \frac{i_{2U} Y \mu}{-1 + \mu^2}, \quad C_1 = e_{15} h_2, \quad D_1 = C_{55}^E h_2 \kappa + \frac{h_1 Y \kappa}{2(1 + \mu)}, \quad E_1 = -\frac{2 \bar{e}_{31} h_2}{\pi},$$

$$E_2 = -\frac{2 \bar{\Xi}_{11} h_2}{\pi}, \quad E_3 = -\frac{2 e_{15} h_2}{\pi}, \quad U_1 = \frac{\bar{e}_{31} i_{2D}}{h_2}.$$

$$\mathbf{H}(r) = [H_{11} \quad H_{12} \quad H_{13} \quad H_{14} \quad H_{15} \quad H_{16} \quad H_{17} \quad H_{18} \quad H_{19}],$$

$$H_{11} = 0, \quad H_{12} = \frac{B_4 \bar{e}_{31}}{-A_4 B_3 + A_3 B_4} + \frac{B_3 \bar{e}_{31} (h_1 - zm)}{A_4 B_3 - A_3 B_4},$$

$$H_{13} = -\frac{A_4 \bar{e}_{31}}{-A_4 B_3 + A_3 B_4} - \frac{A_3 \bar{e}_{31} (h_1 - zm)}{A_4 B_3 - A_3 B_4}, \quad H_{14} = 0,$$

$$H_{15} = \frac{\bar{e}_{31}}{r} + \frac{(A_4 B_1 - A_1 B_4) \bar{e}_{31}}{(-A_4 B_3 + A_3 B_4) r} + \frac{(A_3 B_1 - A_1 B_3) \bar{e}_{31} (h_1 - zm)}{(A_4 B_3 - A_3 B_4) r},$$

$$\begin{aligned}
H_{16} &= \frac{A_4 B_2 \bar{e}_{31}}{(-A_4 B_3 + A_3 B_4)r} - \frac{A_2 B_4 \bar{e}_{31}}{(-A_4 B_3 + A_3 B_4)r} + \frac{\bar{e}_{31}(h_1 - zm)}{r} + \frac{A_3 B_2 \bar{e}_{31}(h_1 - zm)}{(A_4 B_3 - A_3 B_4)r} - \frac{A_2 B_3 \bar{e}_{31}(h_1 - zm)}{(A_4 B_3 - A_3 B_4)r} \\
, \quad H_{17} &= \frac{B_4 E_1 \bar{e}_{31}}{A_4 B_3 - A_3 B_4} - \frac{\bar{\Xi}_{33}}{h_2} - \frac{B_3 E_1 \bar{e}_{31}(h_1 - zm)}{A_4 B_3 - A_3 B_4}, \quad H_{18} = 0, \\
H_{19} &= -\frac{\bar{\Xi}_{33}}{h_2} + \frac{\bar{e}_{31}(A_4 \bar{e}_{31} - B_4 U_1)}{-A_4 B_3 + A_3 B_4} + \frac{\bar{e}_{31}(A_3 \bar{e}_{31} - B_3 U_1)(h_1 - zm)}{A_4 B_3 - A_3 B_4}, \\
zm &= \frac{\left(\bar{C}_{12}^E h_2^2 + 2\bar{C}_{12}^E h_1 h_2\right)(\mu^2 - 1) - h_1^2 Y \mu}{2\left(\bar{C}_{12}^E h_2(\mu^2 - 1) - h_1 Y \mu\right)}.
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] Zhao Q, Wang L B, Zhao K, Yang H L 2019 *Sensors* **19** 4668
- [2] Afzal M S, Shim H, Roh Y 2018 *Sensors* **18** 4491
- [3] Dong S X, Bouchilloux P, Du X H, Uchino K 2001 *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* **12** 613
- [4] Dobrucki A B, Pruchnicki P 1997 *Sens. Actuators A Phys.* **58** 203
- [5] Yang J S, Fang H Y, Jiang Q 1999 *Int. J. Appl. Electromagn. Mech.* **10** 459
- [6] Yang J S 1997 *Smart Mater. Struct.* **6** 485
- [7] Rzymowski W 2002 *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* **48** 209
- [8] Love A E H 1888 *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **179** 491
- [9] Mu T R 1984 *Acta Acust.* **9** 298 (in Chinese) [穆廷荣 1984 声学学报 **9** 298]
- [10] Denkmann W, Nickell R, Stickler D 1973 *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **21** 317
- [11] Adelman N T, Stavsky Y 1980 *J. Acoust. Soc. Am.* **67** 819
- [12] Reissner E 1944 *J. Math. Phys.* **23** 184
- [13] Reissner E 1945 *J. Appl. Mech.* **12** A69
- [14] Mindlin R D 1951 *J. Appl. Mech.* **18** 31
- [15] Mindlin R D 1952 *J. Appl. Phys.* **23** 83
- [16] Mindlin R D 1972 *Int. J. Solids Struct.* **8** 895

- [17] Duan W H, Quek S T, Wang Q 2005 *J. Sound Vib.* **281** 119
- [18] Wang Q, Quek S T, Sun C T, Liu X 2001 *Smart Mater. Struct.* **10** 229
- [19] Lee P C Y, Lin W S 1997 *Proceedings of International Frequency Control Symposium* Orlando, FL, USA, May 30–30, 1997 p659
- [20] Dong Y L, Chen C, Lin S Y 2024 *J. Acoust. Soc. Am.* **155** 511
- [21] Liu Y, Chen C, Lin S Y 2025 *Ultrasonics* **151** 107630
- [22] Murthy V R, Nigam N C 1975 *J. Sound Vib.* **39** 237

Research on radial-bending coupled vibration of unimorph transducer based on transfer matrix method*

REN Wenbo[#] ZHANG Chao[#] LIN Shuyu[†]

(Shaanxi Provincial Key Laboratory of Ultrasound, School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

Abstract

A piezoelectric unimorph transducer consists of piezoelectric and metal discs and operates in a bending vibration mode. It is widely used in underwater acoustics and air-coupled ultrasonics. However, as the thickness of the plate increases, the transverse shear strain and its associated coupling effects cannot be ignored, especially for plates with a thickness above the medium range, where the Kirchhoff thin plate theory is no longer applicable. To precisely investigate the electromechanical characteristics of the transducer, the transfer matrix method is adopted, in which the transducer is radially divided into n equal-width annular elements connected mechanically in series. Based on Mindlin plate theory, the radial displacement at the mid-plane and electrical transfer parameters are introduced. Combined with boundary conditions, the analytical method is utilized to derive the resonance frequency equations for both bending vibration and coupled radial-bending vibration of the transducer, as well as the analytical expression for its input impedance. The proposed theoretical model accounts for both the radial-bending coupling effect and the electrical parameters of the transducer, and is capable of accurately

and efficiently calculating the resonance frequencies and impedance curves for both bending and coupled radial-bending vibrations of unimorph transducers with arbitrary thickness and diameter. To verify the validity of this theoretical model, the finite element method was employed to numerically simulate the vibration modes and impedance frequency response of the transducer. The relative errors of the first four vibration modes and their resonance frequencies were compared under different values of the thickness-to-diameter ratio (h/R). Additionally, a prototype transducer was fabricated, and its impedance characteristics and vibration modes were experimentally measured. The results indicate that the resonance frequencies obtained from theoretical calculations agree well with the results of numerical simulations and experimental measurements. This theoretical model provides a rapid analysis method for the optimization and design of the unimorph transducers and offers theoretical support for practical engineering applications.

Keywords: transfer matrix method, mindlin plate theory, radial-bending coupled vibration, impedance analysis

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12574498)

These authors contributed equally.

† Corresponding author.E-mail: sylin@snnu.edu.cn

The first author.E-mail: 2023300912@snnu.edu.cn