

非线性多稳动力系统中暂态混沌与吸引域分形维数的关系 ——以磁摆系统为例*

王靖达, 张灵, 邵佳瑞, 张松斌, 黄育红[†], 王恒通

(陕西师范大学 物理学与信息技术学院, 西安 710119)

摘要: 暂态混沌与分形吸引域是非线性多稳动力系统的两个重要特征。虽然二者的区别已为人们所熟知, 但对于二者之间的联系却一直不是很清楚。本文以双稳磁摆系统为例, 结合实验测量与数值模拟, 采用有限时间 Lyapunov 指数和盒子计数法, 对系统中的暂态混沌、分形吸引域, 以及二者对系统参数的依赖关系进行分析。研究发现, 随着暂态混沌强度的增强, 系统吸引域的分形维数呈现单调递增趋势, 即暂态混沌强度与吸引域分形维数之间存在正相关关系。研究结果揭示了多稳动力系统中轨道初值敏感性与吸引域复杂性的内在联系, 为进一步探究真实复杂非线性多稳系统的动力学行为及其功能调控提供了理论支撑与参考。

关键词: 磁摆, 暂态混沌, 多稳态, 吸引域, 分形维数

1 引言

多稳态 (multistability), 即非线性动力系统在同一个参数条件下可以共存多个不同的稳定态, 是自然界和工程系统中一个普遍存在的现象^[1,2]。从物理学中的半导体激光器^[3]、光学双稳系统, 到化学反应中的振荡模式共存^[4], 从生态学中的森林-草地转变^[5]、海洋生态系统的稳态转换, 到气候系统中的热盐环流突变^[6], 再到神经科学中的大脑网络状态切换^[7]和认知过程中的双稳态感知^[1], 多稳态几乎渗透到所有复杂系统的动力学行为中。在多稳系统中, 系统最终的稳态取决于初始条件落入哪个吸引子的吸引域 (basins of attraction)。不同吸引域之间的边界可能具有极其复杂的分形结构, 甚至出现“多孔吸引域” (riddled basins)。在这种结构下, 任意小的初始状态上的扰动都可能导致系统跳转到其他吸引子^[8]。这种对初始条件的极端敏感性使得多稳态系统的行为预测变得极为困难, 同时也为系统的灵活调控提供了可能^[9]。

在多稳系统中, 从初始状态到最终稳态的过渡过程往往表现出复杂的类混沌行为, 即暂态混沌 (transient chaos)^[10]。(多稳态的另一种体现形式是系统中存在多个不同的混沌吸引子。这种情况下系统无论在暂态还是渐近态均呈现混沌特征。本文仅讨论暂态混沌情况, 即系统在经历过暂态后, 最终会演化到稳定平衡态。) 不同于传统混沌吸引子, 暂态混沌体现的是有限时间尺度上系统的动力学复杂性: 轨道在相空间中呈现出对初始条件的敏感依赖和复杂的振荡行为, 但最终会退出混沌区域并收敛至某一稳态。暂态混沌的产生机制有很多, 其中一种常见的机制是利用系统轨道在鞍点 (saddle point) 附近的初值敏感性^[10]: 初值相近的两个轨道在鞍点附近沿不稳定流形方向指数发散, 同时沿稳定流形方向靠近。这种“有限时间内的混沌性”与“长时间系统演化的渐进稳定性”的统一, 构成了暂态混沌的核心特征。暂态混沌广泛存在于自然和工程系统中, 如流体力学中的转捩过程、化学反应中的暂态振荡、以及天体力学中三体问题的暂态混沌轨道^[10]。对暂

*国家级大学生创新创业计划 (批准号: 202510718080)、陕西省“十四五”教育科学规划课题 (批准号: SGH25Y2615)、教育部物理育人模式改革虚拟教研室 (批准号: PTJG2025_010, PTJG2025_047) 资助的课题。

[†] 通信作者. E-mail: huangyh@snnu.edu.cn

态混沌的深入理解不仅有助于揭示系统的动力学本质，也对工程控制、信号处理和复杂系统的功能调控具有重要意义^[9]。

非线性动力学研究中人们普遍关心的一个问题是：系统的动力学复杂性和几何（结构）复杂性之间存在怎样的关系？对于具有奇怪混沌吸引子的单稳系统，Kaplan-Yorke (KY) 猜想为二者之间建立起了定量联系^[8]。KY 猜想认为混沌吸引子的分形维数（几何复杂性的度量）可以直接根据系统的 Lyapunov 指数谱（动力学复杂性的度量）估算得出。虽然 KY 猜想至今尚未被严格证明，但其有效性已被大量数值实验所验证。KY 猜想的意义在于统一了混沌系统的动力学敏感性和几何复杂性，提供了一种快速估算吸引子维数的有效方法^[8]。然而，KY 猜想不能直接推广到多稳暂态混沌系统，因为：1) 多稳系统通常不存在单一的全局吸引子，系统的渐近状态依赖于初始条件所属的吸引域。如果用传统方法计算暂态混沌系统的最大 Lyapunov 指数，该指数的长期统计值为负，因而不能体现系统的动力学复杂性。对暂态过程中系统稳定性进行刻画，一种更有效的方法是有限时间 Lyapunov 指数^[10]；2) 系统的几何复杂性不仅体现在稳态吸引子上，也可能体现在吸引域边界的分形结构上^[8]。鉴于此，一个新的问题是：多稳动力系统中，刻画暂态混沌强度和轨道初值敏感性的动力学复杂性与刻画吸引域结构的几何复杂性之间，是否也存在类似 KY 猜想的对应关系？据我们所知，目前国内外文献中尚未对此问题进行过讨论。

本文以双磁铁磁摆系统作为研究对象，尝试对上述问题进行探究。磁摆系统（在永磁铁上方悬挂磁球）具有典型的双稳态和暂态混沌特征^[11-14]，其结构简单、物理机制清晰，系统参数（阻尼系数、摆线长度等）可以方便地调节，使我们能够系统地研究参数变化对暂态混沌和吸引域结构的影响。该系统实验实现简单，同时便于理论建模和数值模拟，是探究非线性多稳系统一般性动力学特征的理想系统之一。

本文的研究思路如下：首先通过实验观测磁摆系统中的暂态混沌与多稳态现象（§2）；然后根据实验装置建立磁摆动力学模型，分析平衡点的稳定性（§3）；接下来通过数值模拟，采用盒子计数法刻画吸引域的分形维数，分析系统参数对吸引域分形维数的影响（§4）；然后，利用有限时间 Lyapunov 指数量化暂态混沌强度，系统地分析暂态混沌强度与吸引域分形维数之间的正相关关系（§5）；最后对全文进行总结并讨论研究意义和展望（§6）。

2 磁摆系统中的暂态混沌与多稳态——实验观测

2.1 实验装置

磁摆实验系统由支架、绝缘细绳（长度 l 可调节）、小磁球（直径 2 cm，质量 $m = 50$ g）、2 个相同规格永磁铁及硬纸板构成，如图 1(a)所示。2 个永磁铁对称固定于硬纸板上，其坐标分别为 $(x_1, y_1) = (5, 5)$ 、 $(x_2, y_2) = (-5, -5)$ （单位：cm），硬纸板所在平面与磁摆运动平面间的垂直距离约为 $d = 3$ cm（即摆球到磁铁所在平面的垂直距离）。小磁球通过细绳悬挂于支架，调节支架使磁球初始静止时位于两磁铁连线中点的正上方。绝缘细绳足够长，使得小磁球的运动近似约束在 $x - y$ 平面内。根据磁极方向的设置，永磁铁同磁球之间分为相互吸引和相互排斥两种情况。我们这里以相互吸引情况为例来展示磁摆系统的多稳性和暂态混沌特征。实验简化模型如图 1(b)所示。

2.2 暂态混沌与多稳态的实验观测

实验中，我们首先将磁球从平衡位置移开，然后从静止状态释放，同时以 60 Hz 的采样频率进行视频录制。我们用 Tracker 视频对视频进行分析，获得磁球空间位置的时间序列。为了观测系统对初始条件的敏感性，我们分别从两个非常接近的初始位置（偏差小于 0.1 mm）释放磁球，记录并比较二者的运动轨迹。

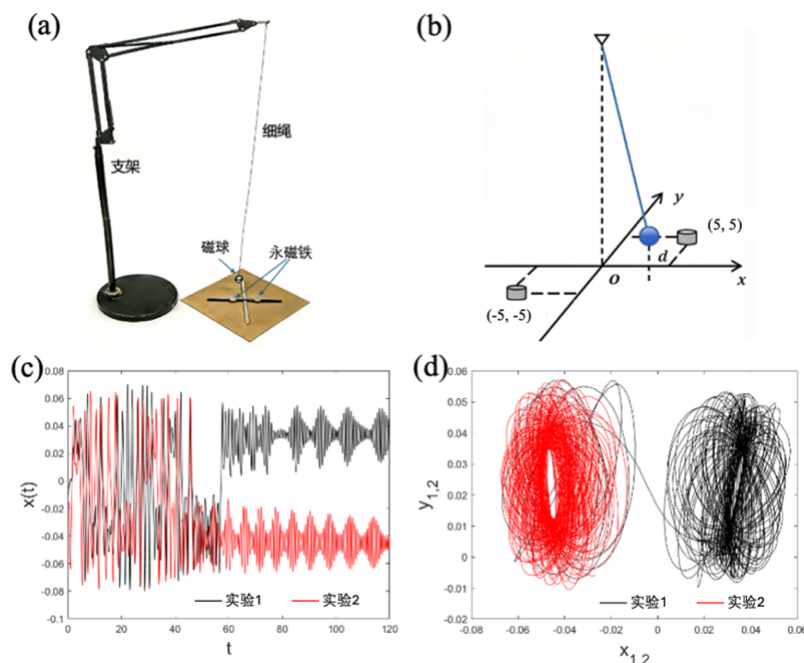


图 1 磁摆实验装置及观测结果。(a) 磁摆实验装置实物图。(b) 磁摆系统简化模型示意图。(c) 从两个相近初始位置（偏差 < 0.1 mm）释放的磁球 x 坐标的时间演化曲线（单位：米），展示暂态混沌（0~60 s）和稳态收敛（> 60 s）两个阶段。(d) 磁球运动对应的 $x - y$ 平面轨迹图，两条轨迹最终分别收敛至不同的稳态，展示了系统的多稳态特征和初值敏感性。

Fig. 1. Experimental setup and observations of the behaviors of magnetic pendulum. (a) Photograph of the experimental setup. (b) Schematic diagram. (c) Time evolutions of the x -coordinate from two slightly different initial positions (Unit: Meter). (d) Corresponding trajectories in the (x, y) -plane.

图 1(c)展示了两次实验中磁球 x 方向位置随时间的演化。根据运动的特征，磁球的运动可以大致分为两个不同阶段：

(1) 暂态混沌阶段（约 0~60 s）。磁球在两个磁铁之间做大幅度的复杂往复运动，呈现出规则、无序的振荡特征。这一阶段对应于引言中所提及的暂态混沌现象，即系统在相空间中鞍点附近经历复杂的类混沌运动，表现出对初始条件的敏感性。

(2) 稳态收敛阶段（约 60 s 之后）。两轨迹完全分离，分别收敛至 $x \approx 0.04$ m（终态 1）与 $x \approx -0.04$ m（终态 2）附近的稳定位置，此后磁球仅在各自稳态附近做小幅衰减振荡并最终静止。两次实验的终态截然不同，展示了磁摆系统的多稳态特征。

图 1(d)进一步展示了磁球在 $x - y$ 平面内的运动轨迹。两条轨迹在经过暂态过程后，最终分别落入两个呈对称分布的不同区域，分别对应系统的两个不同吸引子（稳态 1 和稳态 2）。多次重复实验表明，无论初始位置如何变化，系统最终均收敛至这两个稳态之一，且初始条件的微小变化可能导致截然不同的终态。这意味着系统的相空间被划分为两个不同的吸引域，而吸引域之间的边界对初始条件具有敏感性。

综上所述，磁摆实验清晰地展示了多稳态动力系统的三个核心特征：1) 暂态混沌，即系统在达到稳态之前经历复杂的类混沌运动；2) 多稳态，即系统存在两个不同的稳态，不同初始条件下的轨道可以收敛至不同的终态；3) 初值敏感性，即初始条件的微小差异可导致系统最终落入完全不同的稳态。

3 磁摆系统的理论模型与稳定性分析

接下来我们建立磁摆系统的理论模型，通过修正后的 Lagrange 量推导系统的运动方程，并分析平衡点的位置与稳定性。需要指出的是，由于实验中准确测量磁铁的磁荷以及空气和细绳悬点摩擦系数存在一定困难，同时考虑到通过实验手段无法精确重构吸引域在相空间的分布（不仅涉及大量实验，同时由于误差和噪音的存在，实验得到的吸引域的空间分布图很模糊），以下模型分析中所采用的参数有别于实验中的实际参数。

3.1 修正 Lagrange 动力学模型

设系统运动约束在 $x - y$ 平面内（绝缘细绳足够长），忽略细绳的伸缩形变，考虑小角度近似与空气阻尼，可以通过修正后的 Euler-Lagrange 方程描述系统动力学行为。

在小角度近似下，摆球偏离平衡位置的竖直高度变化近似为 $\Delta h \approx (x^2 + y^2)/(2l)$ ，因此重力势能近似为（取摆球垂直位置处的重力势能为零）

$$V_G = mg\Delta h = \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2)$$

其中 g 为重力加速度（9.80 m/s²）， l 为摆线长度。相互吸引情况下，摆球的磁势能为

$$V_{\text{mag}} = \sum_{i=1}^2 \frac{-q_m}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}} + V_0$$

式中 q_m 为磁荷量， V_0 为常数（使得原点处磁标势为零）， d 为摆球到基座的垂直距离。相应的，排斥作用下的磁势能为

$$V_{\text{mag}} = \sum_{i=1}^2 \frac{q_m}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}} + V_0$$

摆球在 $x - y$ 平面内运动的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

其中 $\dot{x}$ 、 $\dot{y}$ 分别为摆球在 x 、 y 方向上的速度。

系统的 Lagrange 量为 $L = T - (V_G + V_{\text{mag}})$ 。考虑空气阻尼的影响，可得 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\gamma \dot{q}$$

其中 q 为广义坐标（ x 或 y ）， γ 为摆球在低速运动状态下的空气摩擦系数， $-\gamma \dot{q}$ 为广义阻尼力。对系统的时间进行无量纲化处理（令 $\tau = t\sqrt{g/l}$ ），磁球的坐标与速度仍用 x 、 y 、 $\dot{x}$ 、 $\dot{y}$ 表示，最终得到如下动力学微分方程组

$$\begin{aligned} \ddot{x} + b\dot{x} + \psi x &= \mp \sum_{i=1}^2 \frac{x - x_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + d^2]^{3/2}}, \\ \ddot{y} + b\dot{y} + \psi y &= \mp \sum_{i=1}^2 \frac{y - y_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + d^2]^{3/2}}, \end{aligned}$$

式中右侧“-”号对应摆球同磁铁相互吸引情况，“+”号对应相互排斥情况。式中 $b = \gamma/(m\sqrt{g/l})$ 为无量纲化后得到的阻尼系数， $\psi = g/l$ 为引力参数， d 为摆球到基座（磁铁所在平面）的垂直距离。

理论和数值研究中，为了突出吸引域的分形特征，我们将模型中的参数设为 $d = 0.3$ ， $\psi = 0.3$ ， $b = 0.03$ ，同时将两个磁铁的位置固定为 $(x_1, y_1) = (1, 1)$ 和 $(x_2, y_2) = (-1, -1)$ 。（对本文所研究的磁摆实验系统， $l \approx 1.5 \text{ m}$ ， $m \approx 50 \text{ g}$ ， $\gamma \approx 3.4 \times 10^{-6} \text{ kg/s}$ ，对应的无量纲化后的阻尼系数约为 $b = 2.7 \times 10^{-5}$ 。该值明显小于数值模拟中采用的 $b = 0.03$ 。实际实验中，除了空气阻尼，磁摆的运动还受到悬挂点摩擦、细绳内耗，以及磁球转动耗散和模型简化等因素影响，故此模型中的参数 b 应理解为有效阻尼系数。）

3.2 平衡点及稳定性分析

将上述二阶方程组改写为一阶形式（令 $u = \dot{x}$ ， $v = \dot{y}$ ），平衡点位置由条件 $\dot{x} = \dot{u} = \dot{y} = \dot{v} = 0$ 确定，其稳定性可通过分析平衡点处系统 Jacobi 矩阵的特征值（eigenvalue）来判断（特征值实部均小于 0 则平衡点渐进稳定，存在正实部则不稳定）。

通过数值可求解得到平衡位置。吸引作用下的平衡点位置及其特征值与稳定性如表 1 所示。由表可知， $(0.99, 0.99)$ 与 $(-0.99, -0.99)$ 处特征值实部均小于 0，为稳定平衡点； $(0, 0)$ 处存在一个实部大于 0 的特征值，为不稳定平衡点。同时，由于 $(0, 0)$ 处其它特征值的实部均小于 0，因此 $(0, 0)$ 处为不稳定鞍点。进一步，通过分析鞍点处的 Jacobi 矩阵，可得到其最大特征值的实部的解析表达式为

$$\lambda_{\max} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4K}}{2}$$

其中

$$K = -\psi + \frac{2(4 - d^2)}{(2 + d^2)^{5/2}}$$

由此可见，相互吸引情况下，鞍点的不稳定性（最大特征值实部）随着摩擦系数 b 的增大而单调减小，随着摆球到磁铁所在平面的垂直距离 d 的增大也单调减小。简而言之，随着摩擦系数的增大或摆球距离的增大，鞍点处的初值敏感性均单调降低。

表 1 吸引作用下平衡点位置的 Jacobi 矩阵特征值与稳定性

Table 1. The eigenvalues and stability of the equilibrium states under attractive magnetic force.

平衡点位置	Jacobi 矩阵特征值	稳定性
$(0.99, 0.99)$	$-0.015 \pm 6.1i, -0.015 \pm 6.07i$	稳定
$(-0.99, -0.99)$	$-0.015 \pm 6.1i, -0.015 \pm 6.07i$	稳定
$(0, 0)$	$0.954, -0.984, -0.015 \pm 0.981i$	不稳定鞍点

利用同样方法可分析排斥力作用下摆球的平衡点位置和稳定性。由于该情况下系统存在 5 个鞍点，我们这里略过详细特征值分析过程，仅给出鞍点稳定性的变化特征：随着摩擦系数的增大或摆球距离的增大，鞍点处的初值敏感性单调降低。该结论同相互吸引情况定性一致。取参数 $d =$

0.3、 $\psi = 0.3$ ， $b = 0.03$ ，排斥作用下 7 个平衡点的位置及其特征值与稳定性如表 2 所示。对于排斥力情况，系统中存在 2 个稳定平衡点，另外存在 5 个不稳定鞍点。

表 2 排斥作用下平衡点位置的 Jacobi 矩阵特征值与稳定性

Table 2. The eigenvalues and stability of the equilibrium states under repulsive magnetic force.

平衡点位置	Jacobi 矩阵特征值	稳定性
$(-1.8, -1.8); (1.8, 1.8)$	$0.56, -0.59, -0.015 \pm 1.2i$	不稳定鞍点
$(-1.01, -1.01); (1.01, 1.01)$	$6.046, 6.029, -6.076, -6.059$	不稳定鞍点
$(0.85, -0.85); (-0.85, 0.85)$	$-0.015 \pm 0.713i, -0.015 \pm 0.607i$	稳定
$(0, 0)$	$0.587, -0.617, -0.015 \pm 1.24i$	不稳定鞍点

对于磁摆系统，鞍点及其附近的流形结构是理解多稳态、暂态复杂运动和吸引域边界结构的重要动力学因素^[8, 10, 11]。系统轨道在鞍点附近可能沿不稳定方向发散，同时沿稳定方向被吸引，从而表现出有限时间内的初值敏感性和复杂暂态行为。从相空间结构看，吸引域边界通常与鞍点的稳定流形密切相关，而稳定/不稳定流形的伸展、折叠和交织可为吸引域边界的复杂分形结构提供物理解释。同时，对于原点处鞍点稳定性的理论分析显示，随着摩擦系数和摆球高度的增大，鞍点附近轨道的敏感性降低。接下来我们通过数值模拟研究吸引域边界的分形结构及其对系统参数的依赖关系，进而探究吸引域几何复杂性同系统暂态动力学复杂性之间的联系。

4 吸引域的分形结构及其参数依赖

数值模拟中，我们采用 Verlet 积分算法求解动力学方程组，取时间步长 $\Delta t = 0.01$ ，总模拟时间为 $t = 3000$ 。同时，为了增加暂态混沌的时间长度，我们在模拟中将摆球的初始速度统一设为 $(\dot{x}, \dot{y}) = (1, -1)$ ，仅分析摆球在位置空间上的吸引域分布。我们这里主要关注吸引域的分形特征及系统参数对吸引域分形结构的影响。

4.1 吸引域的计算方法

吸引域是指所有收敛至同一吸引子（终态）的初始条件集合。在数值计算中，对位置空间中一定范围内的初始条件进行网格扫描，通过数值求解动力学方程确定每个初始条件最终收敛至哪个吸引子，从而获得吸引域在 $x - y$ 空间的分布，其中不同颜色的区域对应不同吸引子的吸引域。

吸引域边界的复杂程度可以通过分形维数 D 来定量描述。方便起见，这里我们采用盒子计数法（box-counting method）计算 D ：用边长为 ε 的正方形网格覆盖吸引域，统计包含吸引域边界的盒子数 $N(\varepsilon)$ ；然后通过改变格子的边长，得到不同边长下的非空盒子数；最后通过线性拟合 $\ln N(\varepsilon)$ 与 $\ln \varepsilon$ 的关系曲线，其斜率绝对值即分形维数 D ^[8]

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$$

一般而言， D 越大，吸引域边界越复杂，系统的初值敏感性越强； D 越小，边界越规则平滑，系统的初值敏感性越弱。模拟中，我们对吸引域的扫描范围为 $-1.4 < x, y < 1.4$ ，扫描精度为 500×500 个网格点，即扫描的空间精度为 $\Delta x = \Delta y = 2.8 \times 10^{-3}$ 。

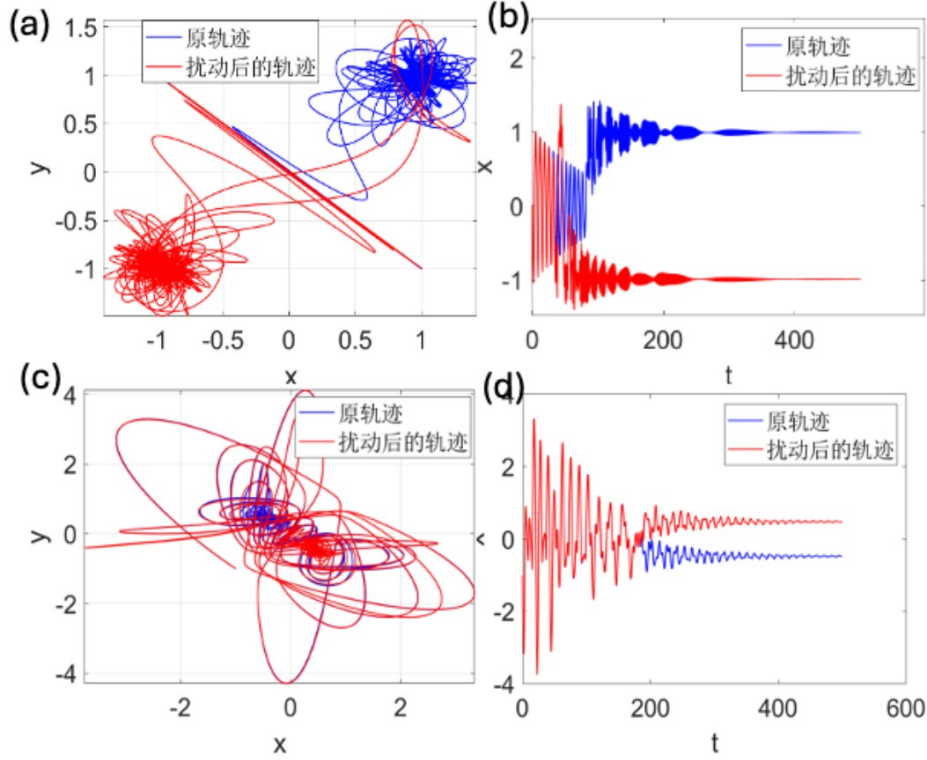


图 2 磁摆模型数值模拟结果。(a, b) 吸引力作用下摆球的初始轨迹和扰动轨迹。(c, d) 排斥力作用下摆球的初始轨迹和扰动轨迹。

Fig. 2. Numerical results of magnetic pendulum. (a, b) Under attractive magnetic force, the trajectories started from two slightly different initial conditions. (c, d) The results for repulsive magnetic force.

4.2 多稳态和初值敏感性的数值再现

图 2(a)、(b)中显示的是吸引作用下，摆球初始轨迹与扰动轨迹（位置偏差 0.1 mm）的时间演化。吸引作用下，两条轨迹在 $t = 50$ 前围绕原点（鞍点）振荡，之后逐渐分离，最终分别收敛至平衡点(0.99, 0.99)与(-0.99, -0.99)；图 2(c)、(d)显示在排斥作用下，轨迹分离更晚（约 $t = 200$ ），并最终分别收敛至平衡点(0.85, -0.85)与(-0.85, 0.85)。两种作用模式下均体现出"暂态混沌-稳态收敛"的过程，再现了§2 实验中观测到的多稳态特征和初值敏感性。

4.3 阻尼系数对吸引域的影响

固定参数 $d = 0.30$ 、 $\psi = 0.30$ ，改变阻尼系数 b ，吸引作用下系统的吸引域分布与分形维数如图 3 所示。蓝色和黄色区域分别对应于稳态(-0.99, -0.99)和稳态(0.99, 0.99)的吸引域。图中可见，当 $b = 0.01$ 时，吸引域边界呈现复杂分形结构，计算得到的分形维数为 $D = 1.92$ ；随着 b 的增大，吸引域边界逐渐平滑， D 逐渐变小。 b 增大至 0.04 时，吸引域的分形维数降至 $D = 1.63$ 。

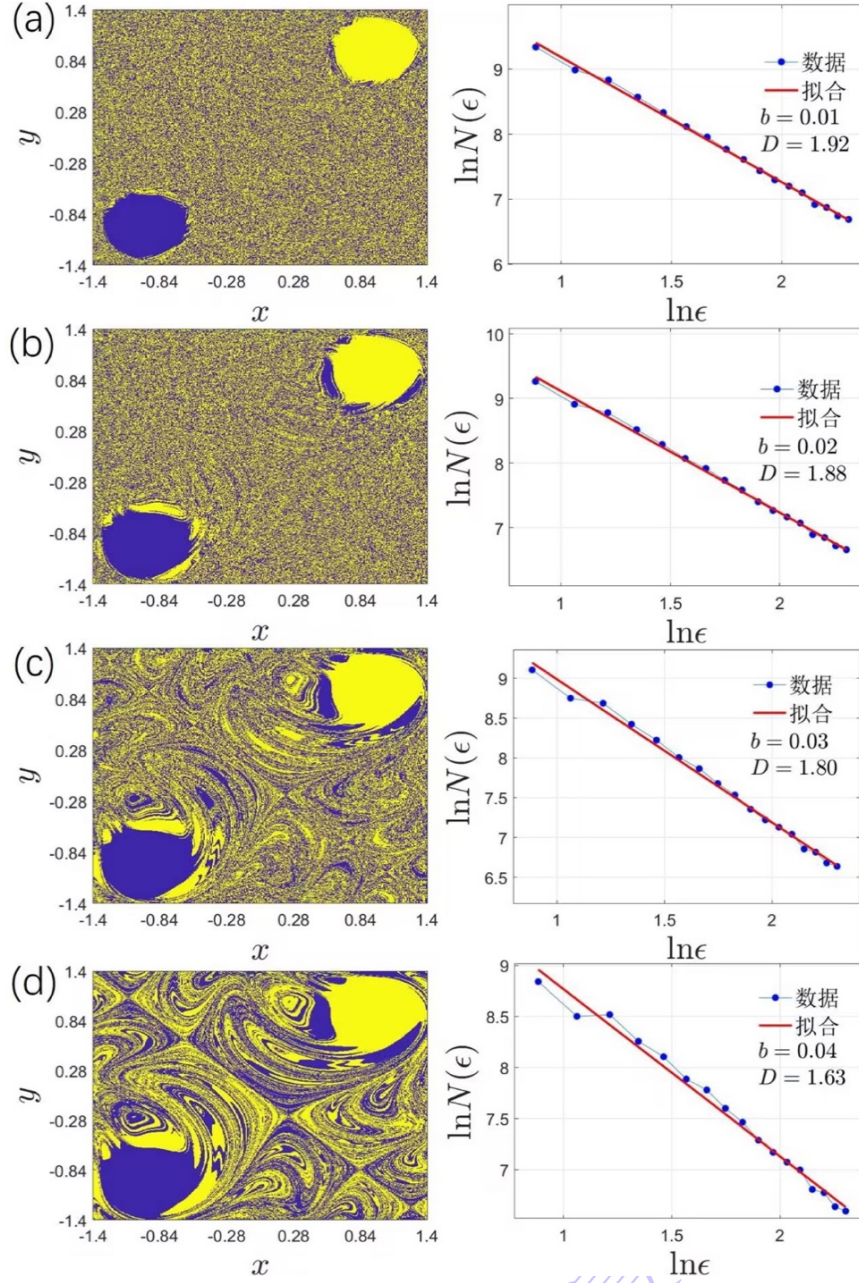


图 3 吸引力情况下，阻尼系数对吸引域及其分形维数的影响。(a) $b=0.01$, $D=1.92$ 。(b) $b=0.02$, $D=1.88$ 。(c) $b=0.03$, $D=1.80$ 。(d) $b=0.04$, $D=1.63$ 。图中蓝色区域内的点最终演化到稳定平衡点 $(-0.99, -0.99)$ ；黄色区域内的点最终演化到稳定平衡点 $(0.99, 0.99)$ 。

Fig. 3. Under attractive magnetic force, the influence of damping coefficient b on the attracting basins and the fractal dimension D . (a) $b = 0.01$, $D = 1.92$. (b) $b = 0.02$, $D = 1.88$. (c) $b = 0.03$, $D = 1.80$. (d) $b = 0.04$, $D = 1.63$.

4.4 摆球高度对吸引域的影响

固定参数 $b = 0.03$ 、 $\psi = 0.30$ ，改变摆球的高度 d （ d 越大对应摆线长度越短，摆球与基座中心距离越远），吸引域结构和分形维度变化如图 4 所示。 $d = 0.1$ 时，吸引域的分形维数为 $D = 1.86$ ；随着 d 的增大，吸引域边界逐渐平滑， D 逐渐变小。 d 增大至 0.7 时， D 降至 1.35 。需要指出的是，与阻尼系数不同，参数 d 的变化主要改变摆球与磁铁之间的相互作用强度以及系统势能景观的形状，而不是直接改变系统的耗散强度。因此，随着 d 增大而观察到的吸引域边界分形维数降

低，意味着吸引域边界复杂性的变化并不完全由阻尼耗散强弱决定，而与鞍点附近的不稳定性和轨道逃逸过程密切相关。

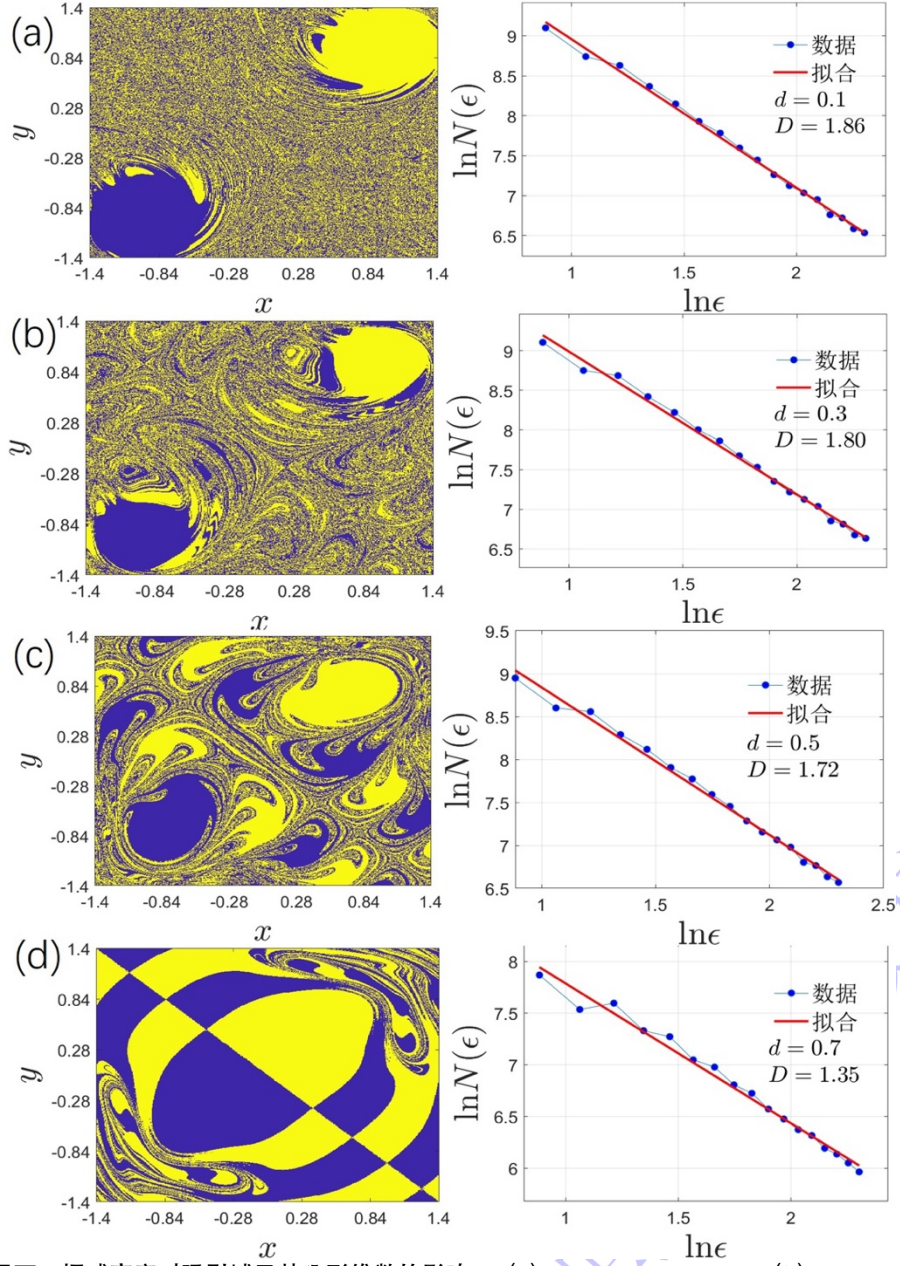


图4 吸引力情况下，摆球高度对吸引域及其分形维数的影响。(a) $d = 0.1, D = 1.86$ 。(b) $d = 0.3, D = 1.80$ 。(c) $d = 0.5, D = 1.72$ 。(d) $d = 0.7, D = 1.35$ 。图中蓝色区域内的点最终演化到稳定平衡点 $(-0.99, -0.99)$ ；黄色区域内的点最终演化到稳定平衡点 $(0.99, 0.99)$ 。

Fig. 4. Under attractive magnetic force, the influence of the vertical distance d between the pendulum bob and the magnet plan on the attracting basins and fractal dimension. (a) $d = 0.1, D = 1.86$. (b) $d = 0.3, D = 1.80$. (c) $d = 0.5, D = 1.72$. (d) $d = 0.7, D = 1.35$.

4.5 排斥力下的吸引域分布

固定参数 $d = 0.30$ 、 $\psi = 0.30$ ，改变阻尼系数 b ，排斥作用下吸引域与分形维数如图5所示。 $b = 0.01$ 时， $D = 1.41$ ； b 增大至 0.04 时， D 降至 1.06 ，其变化趋势与吸引力情况一致。对比图3(c)和图5(c)可见，在相同的模型参数下，排斥力作用下的吸引域相比于吸引作用下的吸引域其复

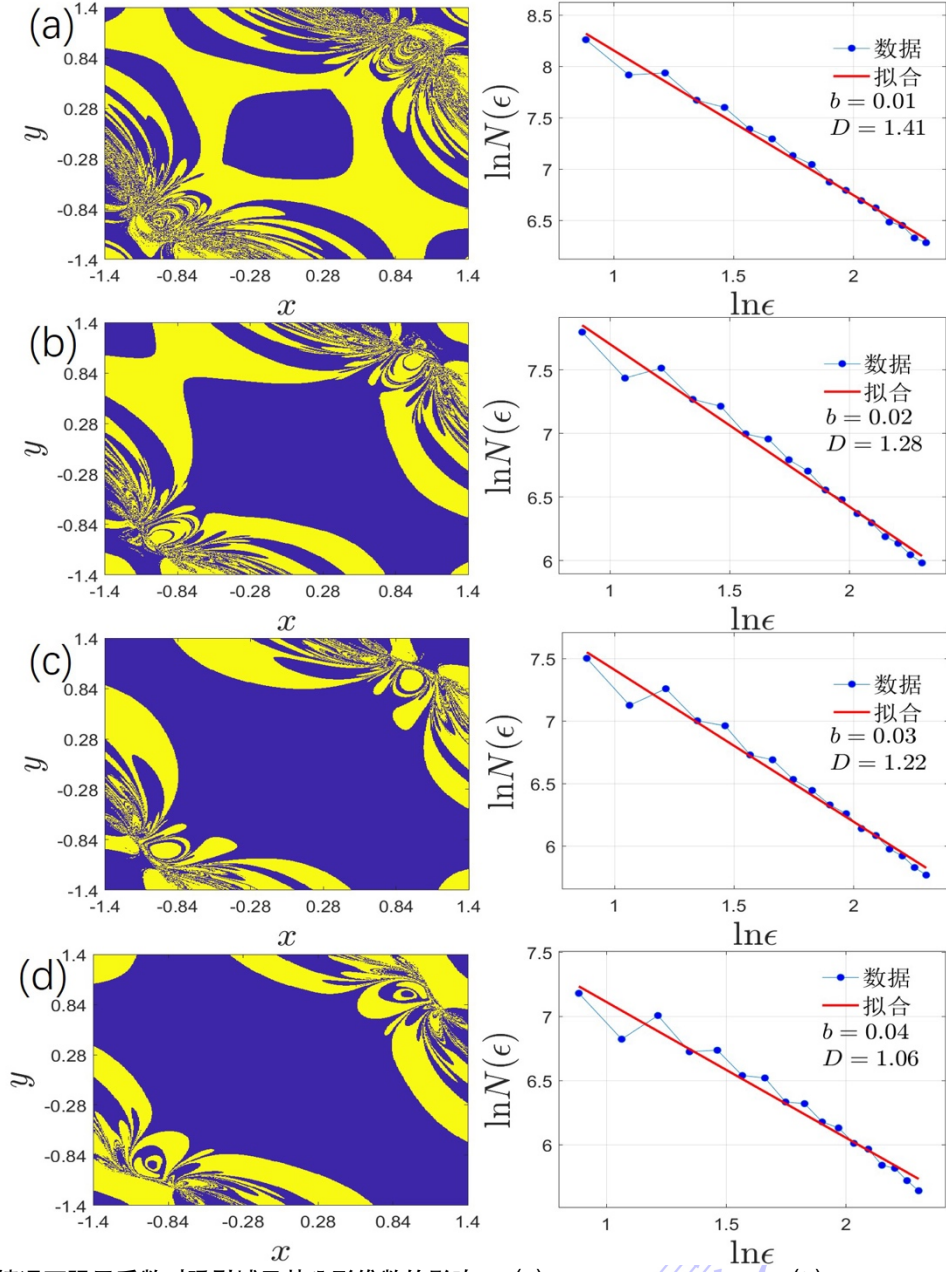


图 5 排斥力情况下阻尼系数对吸引域及其分形维数的影响。(a) $b = 0.01, D = 1.41$ 。(b) $b = 0.02, D = 1.28$ 。(c) $b = 0.03, D = 1.22$ 。(d) $b = 0.04, D = 1.06$ 。图中蓝色区域内的点最终演化到稳定平衡点 $(0.85, -0.85)$ ；黄色区域内的点最终演化到稳定平衡点 $(-0.85, 0.85)$ 。

Fig. 5. Under repulsive magnetic force, the influence of damping coefficient b on the attracting basins and fractal dimension. (a) $b = 0.01, D = 1.41$. (b) $b = 0.02, D = 1.28$. (c) $b = 0.03, D = 1.22$. (d) $b = 0.04, D = 1.06$.

杂程度降低，分形维度变小。这一结果与原点处鞍点的稳定性理论分析结果一致：如表 1 和表 2 所示，吸引作用下原点处的最大特征值大于排斥作用下原点处的最大特征值。

以上模拟结果显示，阻尼系数和摆球高度都会影响吸引域边界的分形结构。当阻尼系数减小或摆球高度降低时，系统轨道在鞍点附近的不稳定性增强，暂态阶段的初值敏感性更加明显，吸引域边界也更复杂，分形维数更大；反之，当阻尼系数或摆球高度增大时，鞍点附近的不稳定性减弱，吸引域边界趋于规则，分形维数降低。需要强调的是，阻尼系数的变化确实会改变系统耗散强度和暂态持续时间，但摆球高度的变化主要改变磁相互作用强度和势能景观。因此，吸引域

边界分形维数的变化不能简单归结为耗散强弱的变化，而应理解为与鞍点附近动力学不稳定性、轨道逃逸过程以及系统耗散共同相关。接下来，我们将在§5 利用有限时间 Lyapunov 指数量化暂态阶段的初值敏感性，并进一步分析其与吸引域边界分形维数之间的关系。

5 暂态混沌强度与吸引域分形维数的正相关关系

5.1 有限时间 Lyapunov 指数与暂态混沌的定量刻画

不同于其它经典混沌系统，磁摆系统中的混沌运动是暂时的，即属于暂态混沌。如图 1 和图 2 所示，不同初值出发的磁摆，经过短暂的、围绕原点鞍点的大幅度振荡后，都会被吸引到某一磁铁附近做小幅度振荡，并最终静止。对于本文所研究的磁摆系统，其势能景观 (potential energy landscape) 相对清晰，系统最终会收敛至某一稳定平衡点，因此不存在永久混沌吸引子。暂态阶段中轨道表现出的复杂振荡和初值敏感性，可从多势阱结构中鞍点附近的不稳定性以及相应流形结构的作用来理解^[10,11]。需要指出的是，本文并不直接构造或提取系统中的混沌鞍 (chaotic saddle)，也不将有限时间 Lyapunov 指数为正简单等同于对混沌鞍存在性的严格证明。本文所关注的是：在系统到达稳定平衡点之前，轨道在有限时间内表现出的初值敏感性和类混沌暂态行为，以及这种动力学复杂性与吸引域边界几何复杂性之间的关系。对暂态混沌的动力学敏感性的定量刻画，传统的 Lyapunov 指数已不再适用，而应该采用有限时间 Lyapunov 指数^[10]。

这里，“有限时间”指的是系统轨道在相空间中在鞍点附近保持振荡能力的时间。对于本文所研究的磁摆系统，暂态可以简单看作是摆球从初始时刻到被束缚到某一磁铁附近做小范围振荡所经历的时间。以图 1(c)中的实验结果为例，暂态混沌时间约为 $T \approx 60$ s。除了平均时间上的不同，有限时间 Lyapunov 指数的计算同传统 Lyapunov 指数的计算相同^[8,10]。

具体数值模拟中，我们将磁摆的暂态混沌的时间窗口定义为从初始时刻到系统在相空间中的轨道最后一次穿过原点鞍点（跨越景观势垒）所经历的时间，即将轨道被束缚在某个平衡点位置附近振荡视作脱离暂态。由于不同的初始位置对应的暂态时间窗口差别明显（一般而言，在固定初始速度条件下，初始位置距离稳定平衡点越远，暂态时间越长），我们在计算有限时间最大 Lyapunov 指数时，取相同参数条件下位置空间中 100 个随机初值所产生的轨道进行统计平均。

5.2 Lyapunov 指数与吸引域分形维数的正相关关系

磁摆系统的复杂性不仅体现在暂态混沌阶段的初值敏感上，同时也体现在其复杂的吸引域结构上。前者可以用有限时间 Lyapunov 指数来刻画，后者可以通过分形维数刻画。虽然刻画的方法不同，但二者之间存在密切关联，均是非线性系统动力学复杂性的体现。

首先，暂态混沌过程中的初值敏感性受鞍点稳定性的影响。特别地，在鞍点附近，系统轨道的不稳定方向由鞍点的不稳定流形决定。其次，吸引域的边界受鞍点的稳定流形影响。特别地，在稳定流形附近，微小的扰动可能导致系统轨道从一个吸引域跳到另一个吸引域。以往研究中人们一直对二者之间的联系缺乏深刻的认识，甚至认为二者之间不存在联系。正如 Kaplan-Yorke 猜想将混沌系统的 Lyapunov 指数谱和奇怪吸引子的分形维数之间建立联系一样^[8]，多稳暂态混沌系统中的有限时间 Lyapunov 指数和吸引域分形维数之间也应该存在密切关联。这里，我们以磁摆系统为例，通过数值模拟对这一猜测进行验证。

图 6 中显示的是吸引作用下通过数值模拟得到的系统在不同阻尼系数 b 下的（在图 3 的基础上增加了一个新的数据点 $b = 0.05$ ）暂态混沌的有限时间最大 Lyapunov 指数和吸引域分形维数之间的关系。图中结果显示，在所研究的参数范围内，随着吸引域边界分形维数 D 的增大，系统的有限时间最大 Lyapunov 指数也呈现增大的趋势。由于吸引域高精度扫描和有限时间 Lyapunov 指数统计均需要较大的计算量，图 6 目前仅展示了典型参数下的定性关系。尽管如此，该结果仍初步表明，暂态阶段的动力学敏感性与吸引域边界的几何复杂性之间可能存在正相关联系。

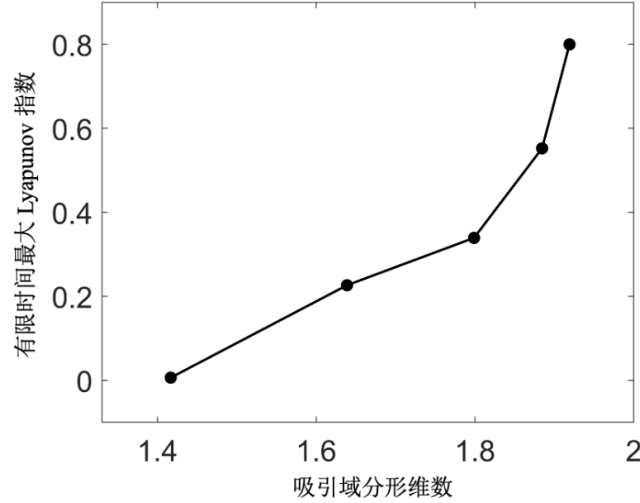


图 6 吸引力情况下，有限时间最大 Lyapunov 指数与吸引域分形维数的关系曲线。

Fig. 6. Under attractive magnetic force, the variation of the largest finite-time Lyapunov exponent with respect to the fractal dimension of attracting basins.

5.3 物理机制讨论

暂态混沌强度和吸引域边界分形维数之间的正相关趋势可以从鞍点附近系统的动力学特征加以理解。对于本文所分析的磁摆系统，轨道在到达稳定平衡点之前会在多势阱势能景观中经历复杂暂态过程。鞍点附近的不稳定性会导致相邻轨道在有限时间内分离，从而表现出明显的初值敏感性；与此同时，鞍点附近稳定/不稳定流形的伸展、折叠和交织，可为吸引域边界的复杂结构提供物理解释。因此，当系统参数使鞍点附近的不稳定性增强时，相邻轨道更容易在暂态阶段分离并落入不同吸引域，吸引域边界也更容易呈现复杂的分形结构；反之，当阻尼增大或摆球高度增大时，鞍点附近的不稳定性减弱，轨道对初值的敏感性降低，吸引域边界趋于规则。

需要强调的是，阻尼系数的变化本身会改变系统的耗散强度和暂态持续时间。因此，图 6 中有限时间 Lyapunov 指数与吸引域边界分形维数的正相关趋势，不能简单理解为已经严格证明了某种普适的拓扑流形拉伸折叠机制。更准确地说，在本文所研究的磁摆模型中，阻尼减小会延长轨道在多势阱势能景观中的暂态运动时间，同时也会增强鞍点附近的不稳定性，使相邻轨道在有限时间内更容易分离并落入不同吸引域。另一方面，摆球高度 d 的变化主要改变摆球与磁铁之间的相互作用强度和势能景观，而不是直接改变耗散强度；随着 d 增大，鞍点附近的不稳定性减弱，吸引域边界分形维数也降低。故此，吸引域边界复杂性的变化与鞍点附近动力学不稳定性、轨道逃逸过程以及系统耗散共同相关。此外，本文并未直接提取磁摆系统中的混沌鞍，也未对稳定/不稳定流形的全局交织结构进行定量计算。因此，本文关于暂态混沌机制的讨论应理解为基于有限时

间 Lyapunov 指数、鞍点稳定性分析和吸引域边界分形结构的物理解释，而不是对混沌鞍存在性的严格数学证明。从这一意义上看，本文结果可视为受 Kaplan-Yorke 猜想启发，对多稳暂态系统中动力学复杂性与几何复杂性关系的一种初步探索。

6 结 论

多稳态是自然界和工程系统中普遍存在的非线性动力学现象。在多稳系统中，暂态混沌刻画了系统在到达稳态前的动力学复杂性，分形吸引域则反映了系统终态对初始条件的敏感依赖。受 Kaplan-Yorke 猜想的启发（该猜想揭示了单稳态混沌系统中 Lyapunov 指数谱与吸引子分形维数之间的联系），本文提出并尝试回答的核心问题为：多稳动力系统中暂态混沌强度与吸引域分形维数之间是否存在类似的对应关系？为此，本文以双磁铁磁摆系统为研究对象，结合实验观测、动力学建模和数值模拟，采用有限时间 Lyapunov 指数和盒子计数法分别量化暂态混沌强度和吸引域分形维数，系统研究了二者之间的内在联系。本文的主要研究结果如下：1) 实验和数值模拟均证实双磁铁磁摆系统具有典型的暂态混沌和双稳态特征，初始条件的微小差异可导致系统收敛至完全不同的稳态，且吸引域具有复杂的分形结构。2) 吸引域的分形维数受系统参数的显著影响：随阻尼系数增大和摆球高度增大而降低；相同参数下排斥力作用的分形维数低于吸引力情况。3) 有限时间最大 Lyapunov 指数与吸引域边界分形维数之间在所研究参数范围内呈现明显的正相关趋势。暂态混沌越强，吸引域越复杂，分形维数越大；反之亦然。上述研究结果表明，多稳动力系统中刻画暂态过程的动力学复杂性与刻画吸引域边界结构的几何复杂性具有内在关联，二者均与鞍点附近的动力学性质密切相关：鞍点附近的不稳定性和不稳定流形影响暂态阶段的轨道敏感性，而稳定流形及其全局结构与吸引域边界的复杂形态密切相关。

本文的结果可视为受 Kaplan-Yorke 猜想启发，在多稳暂态混沌系统中建立动力学复杂性与几何复杂性联系的一种初步尝试。鉴于多稳系统在自然界和工程中普遍存在，且是许多复杂系统实现其功能的动力学基础（如大脑神经网络中的状态切换与信息处理、电力系统的暂态稳定性、生态系统的稳态转换等），该发现可能具有一定的应用意义：例如，通过调控系统参数改变暂态混沌强度，可能实现对吸引域结构的优化，从而提高多稳系统的可控性和鲁棒性。当然，本文的研究仍有进一步拓展的空间。首先，受计算资源的限制，我们在分析暂态混沌强度同分形维数关系的时候只分析了少量几个参数下二者的关系（如图 6 所示），得到的结果只是定性的。要准确描述二者之间的关联，需要计算更多参数下系统吸引域的分形维数，这一点需要在未来工作中完善。其次，文中所发现的暂态混沌强度同分形维数正相关关系是否具有普适性，即在其他多稳系统（如耦合振子、光学双稳系统、化学反应体系等）中是否同样成立，有待进一步验证。此外，本文尚未直接提取磁摆系统中的混沌鞍或非吸引不变集，也未定量刻画稳定/不稳定流形的全局交织结构。未来可进一步通过混沌鞍提取、逃逸时间分布、uncertainty exponent 或全局流形计算等方法，更严格地区分混沌鞍引发的暂态混沌与一般长暂态衰减振荡，并进一步检验本文所发现的正相关关系是否具有更广泛的适用性。再次，能否建立类似 KY 公式的定量关系式，从有限时间 Lyapunov 指数直接估算吸引域分形维数，值得进一步探索。最后，鞍点的稳定与不稳定流形如何定量地影响吸引域的边界结构和暂态混沌的强度，也需要更深入的理论分析。

参考文献

- [1] Feudel U, Pisarchik A N, Showalter K 2018 *Chaos* 28 033501
- [2] Feudel U 2008 *Int. J. Bifurcation Chaos* 18 1607
- [3] Wieczorek S, Krauskopf B, Simpson T B, Lenstra D 2005 *Phys. Rep.* 416 1
- [4] Epstein I R, Showalter K 1996 *J. Phys. Chem.* 100 13132
- [5] Hirota M, Holmgren M, Van Nes E H, Scheffer M 2011 *Science* 334 232
- [6] Lucarini V, Bodai T 2017 *Nonlinearity* 30 R32
- [7] Kelso J A S 2012 *Philos. Trans. R. Soc. B* 367 906
- [8] Ott E 2002 *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [9] Pisarchik A N, Feudel U 2014 *Phys. Rep.* 540 167
- [10] Lai Y-C, Tel T 2009 *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite-Time Scales* (New York: Springer)
- [11] Motter A E, Gruiz M, Karolyi G, Tel T 2013 *Phys. Rev. Lett.* 111 194101
- [12] D'Alessio S 2020 *Phys. Educ.* 55 063002
- [13] Christian J M, Middleton-Spencer H A J 2020 *Mathematics Today* 70
- [14] Qin B, Shang H L, Jiang H M 2021 *Acta Phys. Sin.* 70 180501 (in Chinese) [秦波, 尚慧琳, 蒋慧敏 2021 物理学报 70 180501]

录用稿件，非最终出版稿

Relationship Between Transient Chaos and Fractal Dimension of Attraction Basins in Nonlinear Multistable Dynamical Systems: A Case Study of the Magnetic Pendulum System*

WANG Jingda, ZHANG Ling, SHAO Jiarui, ZHANG Songbin,

HUANG Yuhong[†], WANG Hengtong

(School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University,
Xi'an 710119, China)

Abstract

Transient chaos and fractal basin boundaries are two important features of nonlinear multistable dynamical systems. Although their differences have been widely recognized, the intrinsic relationship between the dynamical complexity of transient chaos and the geometric complexity of basin boundaries remains unclear. Taking the bistable magnetic pendulum as a model system, we investigate this relationship through experiment, modeling, and numerical simulation. We first demonstrate experimentally the properties of transient chaotic motion and bistability in the magnetic pendulum. We then construct a simplified dynamical model and analyze the equilibrium points and their stability. Numerical simulations are performed to study how the basin structure depends on key system parameters, including the damping coefficient and the vertical distance between the pendulum bob and the permanent magnets. The transient sensitivity of trajectories is quantified by the finite-time Lyapunov exponent, while the geometric complexity of basin boundaries is characterized by the box-counting dimension. Our results show that, within the parameter range studied, stronger transient chaos is accompanied by more complex basin boundaries and a larger fractal dimension. In particular, the finite-time Lyapunov exponent and the fractal dimension of basin boundaries exhibit a positive correlation. This correlation can be physically understood from the local instability near saddle points and the associated escape dynamics in the multistable energy landscape. These findings suggest an intrinsic connection between trajectory-level dynamical complexity and basin-boundary geometric complexity in multistable systems, and may provide useful insight into transient behavior, sensitivity to initial conditions, and basin-structure control in complex nonlinear systems.

Keywords: Magnetic pendulum, transient chaos, multistability, basins of attraction, fractal dimension

* Project supported by the National Training Program of Innovation and Entrepreneurship for Undergraduates (Grant No. 202510718080), the 14th Five-Year Plan Educational Science Research Project of Shaanxi Province (Grant No. SGH25Y2615), and the Teaching Reform Project of the Virtual Teaching and Research Office for Reforming the Physics Education Model under the Ministry of Education (Grant Nos. PTJG2025_010, PTJG2025_047).

[†] Corresponding author. E-mail: huangyh@snnu.edu.cn