

三态两拷贝量子态分辨中整体测量优势的几何依赖^{*}

方梓轩 周晓祺[†]

(中山大学物理学院, 光电材料与技术国家重点实验室, 广州 510275)

多拷贝量子态分辨中, 整体测量可以展现出可分测量无法达到的信息提取能力。本文研究三个 qubit 纯态的两拷贝分辨, 比较整体测量与可分测量在最小误差分辨和无歧义分辨中的表现, 并分析这种优势与态集合几何结构的关系。结果表明, double-trine 态集在最小误差分辨中整体测量与可分测量等价的性质并不具有普遍性: 对于某些非对称、近简并的三态结构, 整体测量可以严格优于所有可分测量。相反, 在无歧义分辨中, 较大的整体测量优势集中出现在 double-trine 这类均匀对称结构附近, 对其对称性的扰动通常会降低这种优势。上述结果说明, 最小误差分辨和无歧义分辨中的测量非局域性由不同的态集合几何机制控制: 前者更容易在非对称结构的态集合中出现, 后者则更依赖均匀对称的态集合几何结构。

关键词: 量子态分辨; 整体测量; 可分测量; 测量非局域性

PACS: 03.67.-a, 03.65.Ta, 03.67.Ac

1 引言

量子态分辨是量子信息科学中的基本问题之一^[1-4], 其目标是通过量子测量判断系统处于若干已知候选态中的哪一个。不同的分辨准则对应不同的测量任务。最小误差分辨 (minimum-error discrimination, ME) 允许错误判断, 但要求平均错误概率最小; 无歧义分辨 (unambiguous state discrimination, USD) 要求一旦给出确定结论就绝不出错, 但允许出现“不确定”结果^[3-8]。二者对测量结构提出了不同约束, 因此也常常揭示出不同的量子测量性质。当候选态以多个副本的形式给出时, 态分辨问题会出现更加丰富的

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 62575313) 资助的课题。

[†] 通信作者。E-mail: zhouxq8@mail.sysu.edu.cn

层级结构。即使输入态本身只是多个副本的乘积态，作用在所有副本上的整体测量仍可能优于逐个副本测量并结合经典通信的策略^[9,10]。这类优势并不来源于输入态的纠缠，而是来源于测量本身的整体性，因此多拷贝态分辨是研究测量非局域性的重要场景^[10-14]。

三态两拷贝 qubit 态分辨是研究这一问题的最小非平凡模型之一。单拷贝时，三个 qubit 态位于二维 Hilbert 空间中，必然线性相关，不能进行完整无歧义分辨；两拷贝时，它们被提升到两 qubit 的三维对称子空间中，通常可以变为线性无关，从而使无歧义分辨成为可能^[12,15-17]。这一模型既足够简单，便于精确分析，又已经包含整体测量 (Global Measurement, GLOBAL)、可分测量 (Separable Measurement, SEP) 以及局域操作与经典通信 (Local Operations and Classical Communications, LOCC) 之间的非平凡差异。该方向中最著名的例子是 trine 态两拷贝 (double-trine) 态集^[11-13]。已有研究表明，double-trine 态集在最小误差分辨和无歧义分辨中表现出不同的测量层级：在最小误差分辨中，整体测量虽然优于 LOCC，但可分测量已经能够达到整体测量的最优成功率；而在无歧义分辨中，整体测量严格优于所有可分测量和 LOCC 测量^[11,12,18]。

Double-trine 态集具有很高的对称性，它所展示的层级关系并不必然代表一般三态两拷贝问题的行为。一个自然的问题是：当三个 qubit 态不再具有 trine 对称性时，整体测量和可分测量之间的差距会如何变化？Double-trine 态集中最小误差分辨满足整体测量与可分测量等价，这是否只是对称结构导致的特殊现象？无歧义分辨中显著的整体测量优势，又是否依赖于这种高度对称的几何结构？这些问题关系到多拷贝态分辨中测量非局域性的几何来源。

本文研究一般三个 qubit 纯态的两拷贝分辨问题，比较整体测量与可分测量在最小误差分辨和无歧义分辨中的最优性能。结果表明，double-trine 态集所体现的层级关系不能简单推广到一般情形。在最小误差分辨中，整体测量与可分测量等价并不是普遍规律；对于某些非对称、近简并的三态结构，整体测量可以严格优于所有可分测量。相反，在无歧义分辨中，较大的整体测量优势集中出现在 double-trine 这类均匀对称结构附近，对其对称性的扰动通常会降低这种优势。由此可见，最小误差分辨和无歧义分辨中的测量非局域性由不同的态集合几何机制控制：前者更容易在非对称结构的态集合中出现，后者则更依赖均匀对称的态集合几何结构。

2 理论模型与态参数化

本文研究三个 qubit 纯态在两拷贝条件下的态分辨问题。设三个单拷贝态为

$$|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle. \quad (1)$$

当输入态为其中某一个 $|\psi_i\rangle$ 时，测量者获得两份相同拷贝。因此，实际待分辨的三种信号态为

$$|\Psi_i\rangle = |\psi_i\rangle^{\otimes 2}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2)$$

本文假设三种信号态等概率出现，即

$$p_i = \frac{1}{3}. \quad (3)$$

整个问题定义在两 qubit Hilbert 空间 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 中。由于输入态为两拷贝乘积态，输入态本身不含纠缠。本文关注的是，作用在两份拷贝上的整体测量是否能够相对于可分测量表现出更高的态分辨能力。

2.1 一般三态 qubit 的参数化

任意三个 qubit 纯态在整体么正变换下的相对几何关系保持不变，而态分辨问题的最优成功率只依赖于这些相对几何关系。因此，可以不失一般性地将第一个态固定为

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle. \quad (4)$$

同时，可以通过选择基矢 $|1\rangle$ 的整体相位，使第二个态的展开系数取为实数。于是，一般三个 qubit 纯态可写为

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle, \quad (5)$$

$$|\psi_1\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (6)$$

$$|\psi_2\rangle = \cos \frac{\eta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\eta}{2} |1\rangle. \quad (7)$$

其中参数范围取为

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \eta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (8)$$

这里， θ 与 η 分别表示 $|\psi_1\rangle$ 、 $|\psi_2\rangle$ 相对于 $|\psi_0\rangle$ 的 Bloch 球极角； ϕ 表示第三个态相对于由 $|\psi_0\rangle$ 和 $|\psi_1\rangle$ 张成的实平面的相位。当 $\phi = 0$ 或 $\phi = \pi$ 时，三个态可以同时选为实系数态；当 $\phi \neq 0, \pi$ 时，态集合包含非平凡复相位。图 1 展示了一般三态 qubit 的 Bloch 球几何示意图。

三个单拷贝态之间的内积为

$$\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle = \cos \frac{\theta}{2}, \quad (9)$$

$$\langle \psi_0 | \psi_2 \rangle = \cos \frac{\eta}{2}, \quad (10)$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\eta}{2} + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\eta}{2}. \quad (11)$$

这些内积决定了两拷贝信号态之间的重叠关系。

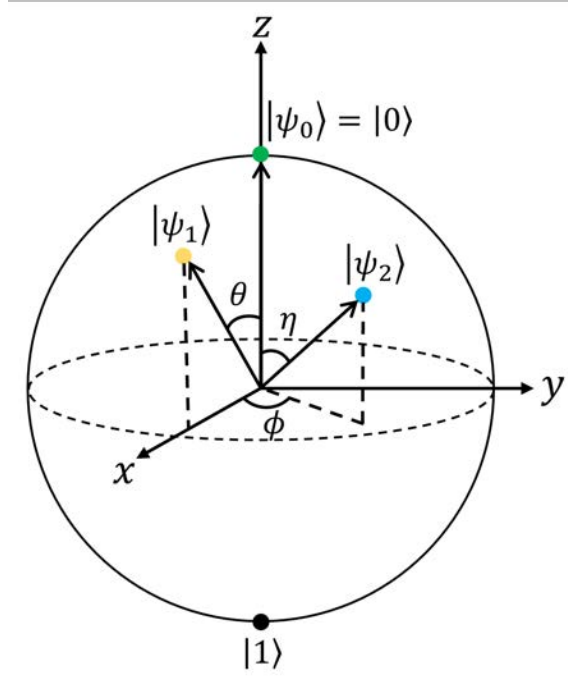


图 1 三个单拷贝 qubit 态的 Bloch 球参数化示意图。通过整体么正变换，可将第一个态固定为 $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ ，并使 $|\psi_1\rangle$ 位于 $x-z$ 平面； θ 和 η 分别表示 $|\psi_1\rangle$ 、 $|\psi_2\rangle$ 相对于 $|\psi_0\rangle$ 的 Bloch 球极角， ϕ 表示 $|\psi_2\rangle$ 相对于 $|\psi_0\rangle$ 与 $|\psi_1\rangle$ 所张成平面的方位角。本文所讨论的态集合几何结构由三态之间的相对位置、两两重叠度以及相对相位共同决定。

Fig. 1. Bloch-sphere parametrization of the three single-copy qubit states. By a global unitary transformation, the first state can be fixed as $|\psi_0\rangle = |0\rangle$, and $|\psi_1\rangle$ can be chosen in the $x-z$ plane. The parameters θ and η denote the polar angles of $|\psi_1\rangle$ and $|\psi_2\rangle$ with respect to $|\psi_0\rangle$, respectively, while ϕ denotes the azimuthal angle of $|\psi_2\rangle$ relative to the plane spanned by $|\psi_0\rangle$ and $|\psi_1\rangle$. The geometry of the state set discussed in this work is determined by the relative positions, pairwise overlaps, and relative phase of the three states.

在本文中，态集合的“几何结构”是指三个单拷贝 qubit 态在 Bloch 球上的相对位置关系。由于整体

么正变换不改变态分辨的最优成功率，该相对结构可由参数 (θ, η, ϕ) 描述，也可等价地由三态之间的两两重叠度

$$|\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle|^2, \quad |\langle \psi_0 | \psi_2 \rangle|^2, \quad |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 \quad (12)$$

以及相对相位信息刻画。这里的重叠度指两态内积的模平方。

本文所称“均匀对称结构”主要指 double-trine 型结构，即三态在 Bloch 球上具有循环对称性，三态之间的两两重叠度相同。相应地，“非对称结构”指三态之间的两两重叠度不再相同，三个态之间的距离关系不均匀。若其中某一对态的重叠度接近 1，即两态在 Bloch 球上非常接近，则称该态集合具有近简并结构。后文中关于“对称”“非对称”和“近简并”的讨论均在这一意义下使用。

2.2 两拷贝态的对称子空间表示

对任意单 qubit 态

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (13)$$

其两拷贝态为

$$|\psi\rangle^{\otimes 2} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle). \quad (14)$$

展开可得

$$|\psi\rangle^{\otimes 2} = \alpha^2|00\rangle + \alpha\beta|01\rangle + \alpha\beta|10\rangle + \beta^2|11\rangle. \quad (15)$$

引入两 qubit 对称子空间的一组正交归一基

$$|S_0\rangle = |00\rangle, \quad (16)$$

$$|S_1\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (17)$$

$$|S_2\rangle = |11\rangle. \quad (18)$$

于是有

$$|\psi\rangle^{\otimes 2} = \alpha^2|S_0\rangle + \sqrt{2}\alpha\beta|S_1\rangle + \beta^2|S_2\rangle. \quad (19)$$

因此，所有形如 $|\psi\rangle^{\otimes 2}$ 的两拷贝态都位于三维对称子空间

$$\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2) = \text{span}\{|S_0\rangle, |S_1\rangle, |S_2\rangle\} \quad (20)$$

中。与该对称子空间正交的是一维反对称子空间，由反对称态

$$|A\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (21)$$

张成。由于所有两拷贝信号态均无反对称分量，反对称子空间不影响信号态本身张成的线性空间；但在构造可分测量或比较不同测量类别时，整个 $2 \otimes 2$ 空间仍然需要一并考虑。

根据上述表示，本文的三种两拷贝信号态可以写成

$$|\Psi_0\rangle = |\psi_0\rangle^{\otimes 2} = |S_0\rangle, \quad (22)$$

$$|\Psi_1\rangle = |\psi_1\rangle^{\otimes 2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} |S_0\rangle + \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |S_1\rangle + \sin^2 \frac{\theta}{2} |S_2\rangle, \quad (23)$$

$$|\Psi_2\rangle = |\psi_2\rangle^{\otimes 2} = \cos^2 \frac{\eta}{2} |S_0\rangle + \sqrt{2} e^{i\phi} \cos \frac{\eta}{2} \sin \frac{\eta}{2} |S_1\rangle + e^{2i\phi} \sin^2 \frac{\eta}{2} |S_2\rangle. \quad (24)$$

上述形式表明，两拷贝映射将三个 qubit 态嵌入到三维对称子空间中。该事实是三态 qubit 在单拷贝时不能完整无歧义分辨、而在两拷贝时通常可以完整无歧义分辨的基本原因。

2.3 Gram 矩阵

为描述三种两拷贝信号态之间的重叠关系，定义 Gram 矩阵

$$G_{ij} = \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle, \quad i, j = 0, 1, 2. \quad (25)$$

由于

$$|\Psi_i\rangle = |\psi_i\rangle^{\otimes 2}, \quad (26)$$

有

$$G_{ij} = \langle \psi_i |^{\otimes 2} | \psi_j \rangle^{\otimes 2} = (\langle \psi_i | \psi_j \rangle)^2. \quad (27)$$

也就是说，两拷贝态之间的内积由单拷贝态之间的内积平方给出。

由上一节的内积关系可得

$$G_{00} = G_{11} = G_{22} = 1, \quad (28)$$

$$G_{01} = (\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle)^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (29)$$

$$G_{02} = (\langle \psi_0 | \psi_2 \rangle)^2 = \cos^2 \frac{\eta}{2}, \quad (30)$$

$$G_{12} = (\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle)^2 = \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\eta}{2} + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\eta}{2} \right)^2. \quad (31)$$

因此, 完整 Gram 矩阵为

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \cos^2 \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\eta}{2} \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} & 1 & (\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\eta}{2} + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\eta}{2})^2 \\ \cos^2 \frac{\eta}{2} & (\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\eta}{2} + e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\eta}{2})^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

该矩阵决定了两拷贝信号态的线性相关性, 并在整体测量最优解的分析中起重要作用。

2.4 线性无关性与无歧义分辨的可能性

纯态集合能够进行完整无歧义分辨的充要条件是这些纯态线性无关^[15]。单拷贝时, 三个 qubit 态均属于二维 Hilbert 空间, 因此必然线性相关, 无法对任意三个不同 qubit 态进行完整无歧义分辨。

两拷贝时, 态集位于三维对称子空间中, 其线性无关性可由 Gram 矩阵判断:

$$\det G > 0. \quad (33)$$

当该条件成立时, 三种两拷贝态线性无关, 原则上可以通过整体测量进行完整 USD; 反之, 若 $\det G = 0$, 则完整 USD 不可能实现。

因此, 两拷贝是一般三态 qubit 态获得完整无歧义分辨可能性的最小拷贝数。本文正是在这一最小非平凡模型中比较整体测量与可分测量的最优性能。

3 整体测量与可分测量下的最优分辨模型

上一节给出了三态两拷贝 qubit 信号态的参数化形式。本节进一步给出最小误差分辨与无歧义分辨在整体测量和可分测量下的优化模型。由于本文研究的是 $2 \otimes 2$ 系统, 可分测量可以通过正部分转置 (positive partial transpose, PPT) 条件精确刻画。因此, 本节给出的半定规划可用于计算整体测量与可分测量之间的性能差距 (gap)。

3.1 测量类别

本文主要比较两类测量: 整体测量与可分测量。

整体测量是作用在两拷贝联合 Hilbert 空间 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 上的任意正算符值测度 (positive operator-valued measure, POVM); 关于量子态分辨中的 POVM 表述及其扩展实现, 可参见文献^[3,4,19,20]。一个

POVM 由若干个正半定算符组成, 例如 $\{M_k\}$, 并满足

$$M_k \succeq 0, \quad \sum_k M_k = I_A. \quad (34)$$

若输入态为 ρ , 则第 k 个测量结果出现的概率为

$$p(k|\rho) = \text{Tr}(\rho M_k). \quad (35)$$

整体测量不要求 POVM 元素具有张量积分解结构, 因此代表该双体系统上理论上允许的最一般测量能力。

可分测量是一类受限测量。若一个正算符 M 可以写成

$$M = \sum_l A_l \otimes B_l, \quad (36)$$

其中

$$A_l \succeq 0, \quad B_l \succeq 0, \quad (37)$$

则称 M 是可分算符。若一个 POVM 的所有元素均为可分算符, 则称该 POVM 为可分测量。

LOCC 能够实现的测量一定是可分测量, 但并非所有可分测量都能够由 LOCC 实现。因此三类测量满足包含关系

$$\text{LOCC} \subseteq \text{SEP} \subseteq \text{GLOBAL}. \quad (38)$$

该层级关系是研究局域态分辨和测量非局域性的常用框架^[11,12]。本文主要比较整体测量与可分测量。若整体测量的最优性能严格超过所有可分测量, 则说明这种优势不能归因于某个具体局域协议的不足, 而是体现了整体 POVM 相对于可分 POVM 的本质优势。

对于 $2 \otimes 2$ 系统, Peres–Horodecki 判据表明, PPT 条件与可分性等价^[21,22]。对非零 POVM 元素作迹归一化后可视为 $2 \otimes 2$ 正算符状态, 因此该判据同样适用于本文对 POVM 元素可分性的判定。记 M^Γ 为对第二个 qubit 作部分转置后的算符, 则在本文所考虑的 $2 \otimes 2$ 情形中,

$$M \text{ 可分} \iff M \succeq 0, \quad M^\Gamma \succeq 0. \quad (39)$$

因此, 在本文中可以通过对每个 POVM 元素施加 PPT 约束来精确刻画可分测量。

需要注意的是, 尽管三种两拷贝信号态均位于三维对称子空间中, 测量本身仍定义在完整的 $2 \otimes 2$ Hilbert 空间上。特别地, 可分性是相对于两 qubit 的张量积分解定义的, 因此在讨论可分测量时必须保留整个四维空间, 而不能只在三维对称子空间中处理。

3.2 最小误差分辨的整体测量优化

在最小误差分辨中，测量结果直接对应输入态身份的猜测。对于三种信号态 $|\Psi_0\rangle$ 、 $|\Psi_1\rangle$ 和 $|\Psi_2\rangle$ ，整体测量可表示为三个 POVM 元素

$$\{M_0, M_1, M_2\}. \quad (40)$$

当测量结果为 i 时，判断输入态为 $|\Psi_i\rangle$ 。在等先验条件下，其平均成功率为

$$P_{\text{ME}} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 \langle \Psi_i | M_i | \Psi_i \rangle. \quad (41)$$

整体测量下的最优最小误差分辨成功率记为 $P_{\text{ME}}^{\text{glob}}$ ，其优化问题为

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} = \max_{\{M_i\}} \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 \langle \Psi_i | M_i | \Psi_i \rangle, \quad (42)$$

满足

$$M_i \succeq 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad (43)$$

$$\sum_{i=0}^2 M_i = I_4. \quad (44)$$

这里 I_4 是两 qubit 总空间上的单位算符。该优化问题给出了任意整体 POVM 下的最大平均成功率。

3.3 最小误差分辨的可分测量优化

在可分测量条件下，需要要求每个 POVM 元素都是可分算符。由于本文所研究的系统为 $2 \otimes 2$ ，这等价于要求每个 POVM 元素满足 PPT 条件。于是，可分测量下的最小误差分辨最优成功率记为 $P_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ ，其优化问题可以写为

$$P_{\text{ME}}^{\text{sep}} = \max_{\{M_i\}} \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 \langle \Psi_i | M_i | \Psi_i \rangle, \quad (45)$$

满足

$$M_i \succeq 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad (46)$$

$$M_i^\Gamma \succeq 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad (47)$$

$$\sum_{i=0}^2 M_i = I_4. \quad (48)$$

由于 $2 \otimes 2$ 系统中 PPT 与可分性等价，上式给出的 $P_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 是可分测量下的精确最优成功率。

为了刻画整体测量相对于可分测量的优势，定义

$$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} = P_{\text{ME}}^{\text{glob}} - P_{\text{ME}}^{\text{sep}}. \quad (49)$$

若

$$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} > 0, \quad (50)$$

则说明在最小误差分辨任务中，整体测量严格优于所有可分测量。

3.4 无歧义分辨的整体测量优化

在无歧义分辨中，测量允许出现“不确定”结果。相应 POVM 写为

$$\{M_0, M_1, M_2, M_?\}. \quad (51)$$

其中 M_i 表示确定判断输入态为 $|\Psi_i\rangle$ ，而 $M_?$ 表示不确定结果。

无歧义分辨要求确定性输出不能出错。因此，对于任意 $i \neq j$ ，必须满足

$$\langle \Psi_j | M_i | \Psi_j \rangle = 0. \quad (52)$$

在等先验条件下，无歧义分辨的成功率为

$$P_{\text{USD}} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 \langle \Psi_i | M_i | \Psi_i \rangle. \quad (53)$$

整体测量下的最优无歧义分辨成功率记为 $P_{\text{USD}}^{\text{glob}}$ ，其优化问题为

$$P_{\text{USD}}^{\text{glob}} = \max_{\{M_i, M_?\}} \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 \langle \Psi_i | M_i | \Psi_i \rangle, \quad (54)$$

满足

$$M_i \succeq 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad (55)$$

$$M_? \succeq 0, \quad (56)$$

$$\sum_{i=0}^2 M_i + M_? = I_4, \quad (57)$$

$$\langle \Psi_j | M_i | \Psi_j \rangle = 0, \quad i \neq j. \quad (58)$$

该优化问题给出了任意整体 POVM 在零错误约束下的最大无歧义分辨成功率。

3.5 无歧义分辨的可分测量优化

在可分测量条件下，USD 的每个 POVM 元素也必须是可分算符。由于本文系统为 $2 \otimes 2$ ，这等价于对所有 POVM 元素施加 PPT 约束。因此，可分测量下的 USD 最优成功率记为 $P_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ ，其优化问题为

$$P_{\text{USD}}^{\text{sep}} = \max_{\{M_i, M_?\}} \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 \langle \Psi_i | M_i | \Psi_i \rangle, \quad (59)$$

满足

$$M_i \succeq 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad (60)$$

$$M_i^\Gamma \succeq 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad (61)$$

$$M_? \succeq 0, \quad (62)$$

$$M_?^\Gamma \succeq 0, \quad (63)$$

$$\sum_{i=0}^2 M_i + M_? = I_4, \quad (64)$$

$$\langle \Psi_j | M_i | \Psi_j \rangle = 0, \quad i \neq j. \quad (65)$$

类似地，定义 USD 中整体测量相对于可分测量的性能差距为

$$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = P_{\text{USD}}^{\text{glob}} - P_{\text{USD}}^{\text{sep}}. \quad (66)$$

若

$$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} > 0, \quad (67)$$

则说明整体测量在无歧义分辨任务中严格优于所有可分测量。

3.6 计算流程

基于上述优化模型，本文对参数

$$(\theta, \eta, \phi) \quad (68)$$

进行扫描。对于每一组参数，首先构造三种两拷贝信号态

$$|\Psi_i\rangle = |\psi_i\rangle^{\otimes 2}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (69)$$

随后分别求解四个优化问题：

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}}, \quad P_{\text{ME}}^{\text{sep}}, \quad (70)$$

$$P_{\text{USD}}^{\text{glob}}, \quad P_{\text{USD}}^{\text{sep}}. \quad (71)$$

由此得到

$$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}(\theta, \eta, \phi) \quad (72)$$

和

$$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}(\theta, \eta, \phi). \quad (73)$$

这两个量用于刻画一般三态两拷贝态集中，整体测量相对于可分测量的性能优势及其对态集合几何结构的依赖关系。

后续章节将首先以 double-trine 态集作为解析基准，给出其已知测量层级；随后讨论一般三态两拷贝情形下 ME 和 USD 的数值结果，并比较两类分辨任务中测量优势的几何特征。

在数值实现中，本文采用半定规划 (semidefinite programming, SDP) 求解上述优化问题 [23,24]。所有 SDP 均使用 CVXPY 建模 [25]，并调用 SCS 求解 [26]。全局扫描中， θ 与 η 在 $(0, \pi)$ 范围内取网格点， ϕ 取若干代表性切片；在发现 gap 较大的区域后进一步进行局部细化扫描。为检验数值结果的可靠性，本文对 double-trine 点进行了校验，数值结果与解析值在 10^{-8} 量级内一致。对于 ME 热点区域，本文进一步检查了相邻参数点的一维切片，以确认该 gap 并非单个孤立参数点的数值误差。

4 Double-trine 态集的解析基准

在分析一般三态两拷贝情形之前，本节先讨论一个具有解析结果的标准算例：double-trine 态集。该态集在多拷贝态分辨和测量非局域性研究中具有代表性。本文将其作为解析基准，用于对照后续的一般三态数值结果。

需要强调的是，本节的目的不是将 double-trine 态集的已知性质作为本文的新结果，而是通过该标准算例说明 ME 与 USD 在同一态集上可以呈现不同的测量层级，并为后续一般三态情形的讨论提供参照。

4.1 Double-trine 态集

在本文采用的参数化下，double-trine 态集对应

$$\theta = \eta = \frac{2\pi}{3}, \quad \phi = \pi. \quad (74)$$

此时三个单拷贝态可写为

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle, \quad (75)$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle, \quad (76)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle. \quad (77)$$

这三个态在 Bloch 球上构成三重对称结构。对应的两拷贝信号态为

$$|\Psi_i\rangle = |\psi_i\rangle^{\otimes 2}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (78)$$

由第二节的结果可知，两拷贝态之间的内积等于单拷贝内积的平方。对上述三态，有

$$\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \frac{1}{4}, \quad i \neq j. \quad (79)$$

因此，double-trine 态集的 Gram 矩阵为

$$G_{\text{DT}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

该矩阵具有一个对称本征向量和两个简并本征向量。其本征值为

$$\lambda_+ = \frac{3}{2}, \quad (81)$$

$$\lambda_- = \frac{3}{4}, \quad (82)$$

其中 λ_- 二重简并。

4.2 最小误差分辨的整体测量结果

对于等先验的对称纯态集，平方根测量可以给出整体测量下的最小误差分辨最优成功率^[27]。若 Gram 矩阵本征值为 λ_k ，则整体最优成功率可写为

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{k=1}^N \sqrt{\lambda_k} \right)^2, \quad (83)$$

其中 N 为候选态数。在 double-trine 情形中， $N = 3$ ，本征值为

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{4}. \quad (84)$$

因此

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} = \frac{1}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{\frac{3}{4}} \right)^2. \quad (85)$$

化简可得

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad (86)$$

数值上,

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} \approx 0.9714. \quad (87)$$

这一结果表明, 整体测量可以以很高的成功率分辨三种两拷贝 trine 态。

4.3 最小误差分辨的可分测量结果

Double-trine 态集在 ME 中的一个重要性质是: 可分测量可以达到与整体测量相同的最优成功率^[11,12]。也就是说,

$$P_{\text{ME}}^{\text{sep}} = P_{\text{ME}}^{\text{glob}} \approx 0.9714. \quad (88)$$

因此

$$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} = P_{\text{ME}}^{\text{glob}} - P_{\text{ME}}^{\text{sep}} = 0. \quad (89)$$

这说明, 在 double-trine 态集的最小误差分辨任务中, 整体测量相对于可分测量没有优势。已有研究进一步表明, 尽管可分测量能够达到整体测量的最优成功率, LOCC 并不能达到这一最优值^[11]。因此, 在 ME 中 double-trine 态集的测量层级为

$$\text{GLOBAL} = \text{SEP} > \text{LOCC}. \quad (90)$$

这一层级结构说明, 整体测量相对于 LOCC 的优势, 并不必然意味着整体测量相对于所有可分测量也有优势。可分测量与 LOCC 之间的差异在此处起到了关键作用。

从几何上看, double-trine 态集具有高度对称性。三种信号态均位于两 qubit 的三维对称子空间中, 而完整 Hilbert 空间还包含一维反对称子空间。对于 double-trine 的 ME 最优测量, 已有研究给出了相应的可分测量构造。该构造可以理解为: 利用与信号态正交的反对称子空间对 POVM 元素进行补全, 使所得 POVM 元素满足可分性, 同时保持其在信号态上的成功率不变^[11,12]。该性质依赖于 double-trine 态集的对称结构, 并不必然适用于一般三态两拷贝情形。

4.4 无歧义分辨的整体测量结果

与 ME 不同, USD 要求确定性输出不能出错, 但允许出现不确定结果。由于 double-trine 两拷贝态线性无关, 完整 USD 可以实现。

对等先验的对称线性无关三态, 整体测量下的最优 USD 成功率等于 Gram 矩阵的最小本征值^[15]。

Double-trine 的 Gram 矩阵最小本征值为

$$\lambda_{\min} = \frac{3}{4}. \quad (91)$$

因此

$$P_{\text{USD}}^{\text{glob}} = \lambda_{\min} = 0.75. \quad (92)$$

也就是说，在整体测量下，double-trine 态集可以以 0.75 的成功率进行无歧义分辨。

4.5 无歧义分辨的可分测量结果

在 USD 任务中，double-trine 态集的测量层级与 ME 显著不同。已有研究表明，可分测量和 LOCC 在该任务中的最优成功率均为 0.5^[12]。因此

$$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = P_{\text{USD}}^{\text{glob}} - P_{\text{USD}}^{\text{sep}} = 0.75 - 0.5 = 0.25. \quad (93)$$

这说明，在 double-trine 态集的可分测量中，整体测量严格优于所有可分测量。

可以通过一个局域策略理解 0.5 这一成功率。对第一份拷贝进行能够无误排除一个 trine 态的测量后，三态分辨问题被化为剩余两个候选态之间的无歧义分辨。对两个 trine 态而言，单拷贝内积的模为 0.5，因此二态 USD 的最优成功率为

$$1 - 0.5 = 0.5. \quad (94)$$

该局域策略达到成功率 0.5。已有结果进一步证明，可分测量不能超过这一成功率。因此，double-trine 态集在 USD 中满足

$$\text{GLOBAL} > \text{SEP} = \text{LOCC}. \quad (95)$$

4.6 Double-trine 基准的意义

Double-trine 态集展示了同一组两拷贝乘积态在不同态分辨任务下的不同测量层级。在 ME 中，可分测量可以达到整体测量的最优性能；而在 USD 中，整体测量严格优于所有可分测量。这说明，测量非局域性的表现形式依赖于具体的分辨准则。为了更清楚地比较 double-trine 态集在两类分辨任务中的不同测量层级，表 1 总结了上述解析结果。

这一标准算例也提出了本文后续研究的两个问题。其一，double-trine 态集在 ME 中满足 $\text{GLOBAL} = \text{SEP}$ ，这一性质是否只是高度对称结构导致的特殊结果？其二，double-trine 态集在 USD 中给出的 0.25 优势是否代表一般三态两拷贝态集中较大的整体测量优势？

表 1 Double-trine 态集在最小误差分辨和无歧义分辨中的最优分辨性能及测量层级。其中 P^{glob} 和 P^{sep} 分别表示整体测量和可分测量下的最优成功率, $\Delta^{\text{sep}} = P^{\text{glob}} - P^{\text{sep}}$ 表示整体测量相对于可分测量的性能差距。该表表明, 同一 double-trine 态集在 ME 和 USD 中呈现不同的测量层级: 在 ME 中 $\text{GLOBAL} = \text{SEP} > \text{LOCC}$, 而在 USD 中 $\text{GLOBAL} > \text{SEP} = \text{LOCC}$ 。

Table 1. Optimal discrimination performance and measurement hierarchy of the double-trine state set in minimum-error discrimination and unambiguous state discrimination. Here P^{glob} and P^{sep} denote the optimal success probabilities under global and separable measurements, respectively, and $\Delta^{\text{sep}} = P^{\text{glob}} - P^{\text{sep}}$ denotes the performance gap between them. The table shows that the same double-trine state set exhibits different measurement hierarchies in ME and USD:

$\text{GLOBAL} = \text{SEP} > \text{LOCC}$ in ME, whereas $\text{GLOBAL} > \text{SEP} = \text{LOCC}$ in USD.

态集	分辨任务	P^{glob}	P^{sep}	Δ^{sep}	测量层级
double-trine	ME	0.9714	0.9714	0	$\text{GLOBAL} = \text{SEP} > \text{LOCC}$
double-trine	USD	0.75	0.5	0.25	$\text{GLOBAL} > \text{SEP} = \text{LOCC}$

后续章节将针对一般三态两拷贝态集, 通过第 3 节给出的整体测量和可分测量优化模型, 分别分析 ME 与 USD 中的性能差距及其几何依赖关系。

5 一般三态两拷贝最小误差分辨中的整体测量优势

上一节讨论了 double-trine 态集的解析结果。在最小误差分辨中, double-trine 态集满足

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} = P_{\text{ME}}^{\text{sep}}, \quad (96)$$

即整体测量相对于可分测量没有优势。这一性质与 double-trine 态集的高度对称性密切相关。为了判断这一结论是否适用于一般三态两拷贝 qubit 态集, 本节利用第 3 节给出的半定规划模型, 对一般参数

$$(\theta, \eta, \phi) \quad (97)$$

下的

$$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} = P_{\text{ME}}^{\text{glob}} - P_{\text{ME}}^{\text{sep}} \quad (98)$$

进行数值分析。

5.1 数值扫描方法

对于每一组参数

$$(\theta, \eta, \phi), \quad (99)$$

首先根据第 2 节的参数化构造三个单拷贝态

$$|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \quad (100)$$

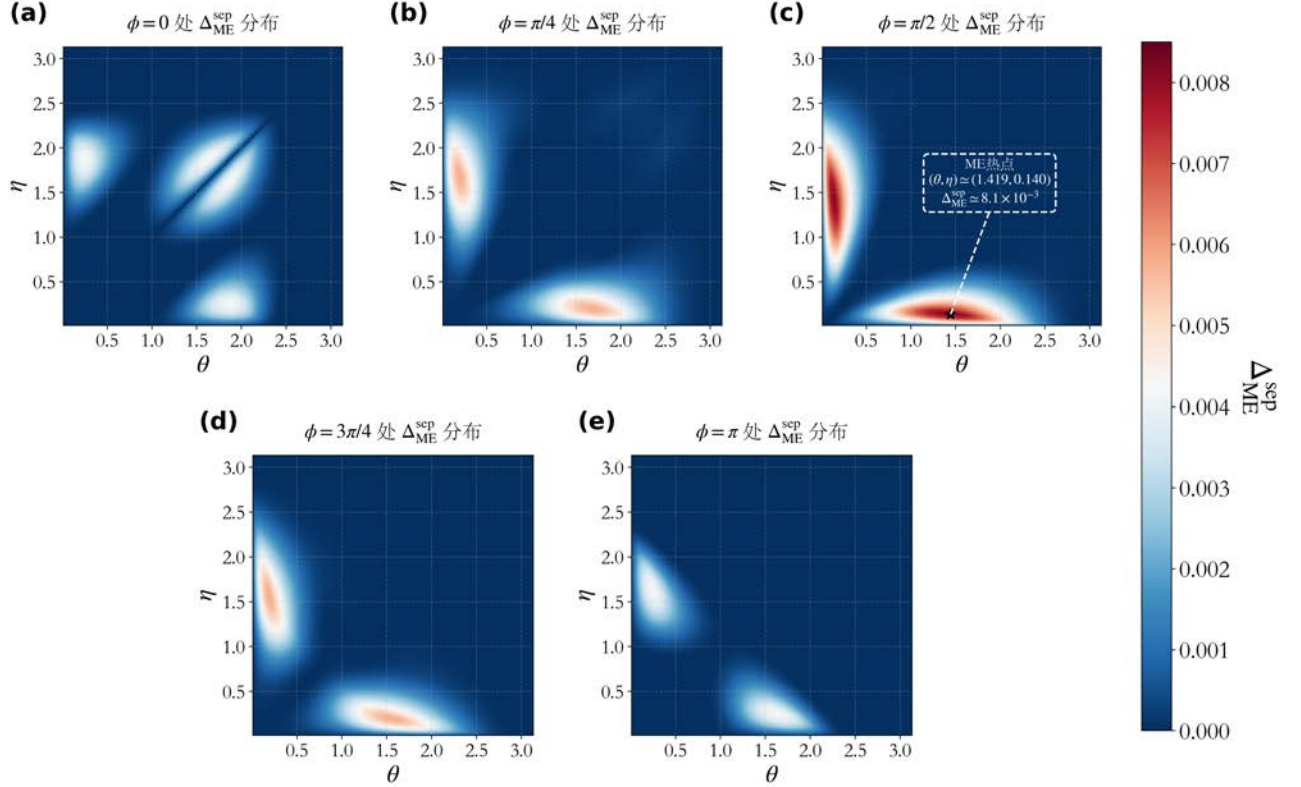


图 2 最小误差分辨中整体测量相对于可分测量的性能差距。颜色表示 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} = P_{\text{ME}}^{\text{glob}} - P_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 。(a)–(e) 分别给出 $\phi = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ 处的 (θ, η) 参数切片。结果显示，较大的 ME 差距并不出现在 double-trine 对称区域，而主要出现在非对称、近简并的几何区域。图中标出的代表性热点位于 $(\theta, \eta) \simeq (1.419, 0.140)$ ，其差距约为 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} \simeq 8.1 \times 10^{-3}$ 。

Fig. 2. Performance gap between global and separable measurements in minimum-error discrimination.

The color scale represents $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} = P_{\text{ME}}^{\text{glob}} - P_{\text{ME}}^{\text{sep}}$. Panels (a)–(e) show the distributions of $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ in the (θ, η) plane for $\phi = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$, respectively. A large ME gap does not occur near the double-trine symmetric configuration, but mainly appears in asymmetric, nearly degenerate regions. The marked representative hotspot is located at $(\theta, \eta) \simeq (1.419, 0.140)$, where $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} \simeq 8.1 \times 10^{-3}$.

并进一步构造两拷贝信号态

$$|\Psi_i\rangle = |\psi_i\rangle^{\otimes 2}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (101)$$

随后分别求解第 3 节中的两个最小误差分辨优化问题： $P_{\text{ME}}^{\text{glob}}$ 和 $P_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 。由于本文考虑的是 $2 \otimes 2$ 系统，可分测量由 PPT 条件精确刻画，因此 $P_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 是可分测量下的精确最优成功率。本文主要关注二者差值

$$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}(\theta, \eta, \phi). \quad (102)$$

在数值计算中，先对参数空间进行较粗的全局扫描，以寻找可能出现较大差值的区域；随后在这些区域附近进行局部细化扫描。由于三个候选态的标签可以互换，不同参数点有时对应同一态集的重新标号。因此，在分析数值结果时，本文关注态集的几何结构，而不仅仅是某一组参数坐标本身。为展示不同相位切片下 ME 差距的整体分布，本文选取若干代表性 ϕ 值，在 (θ, η) 平面上绘制 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 的二维相图。在数值计算中，double-trine 点被用作校验算例。ME 任务中，数值求得的 $P_{\text{ME}}^{\text{glob}}$ 与 $P_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 均与解析值 0.9714 一致到数值精度。该校验用于确认本文所采用的整体测量和可分测量 SDP 模型的正确性。

5.2 ME 差距的参数空间分布

图 2 给出了 $\phi = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ 五个相位切片下 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 在 (θ, η) 平面上的分布。可以看到，ME 差距在大部分参数区域较小，仅在若干非对称区域中显著增大。尤其在 $\phi = \pi/2$ 的切片中，存在一个较明显的热点区域，对应参数约为 $(\theta, \eta) \simeq (1.419, 0.140)$ ，此处 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} \simeq 8.1 \times 10^{-3}$ 。

相比之下，double-trine 对称点位于 $\phi = \pi, \theta = \eta = 2\pi/3$ ，其 ME 差距为零。由此可见，double-trine 中 $P_{\text{ME}}^{\text{glob}} = P_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 的性质并不能推广到一般三态两拷贝态集；但较大的 ME 差距也不是由 trine 对称结构触发，而是出现在明显非对称的几何区域。

5.3 非对称三态中的非零 ME 差距

对一般三态参数空间的数值搜索表明，double-trine 中的

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} = P_{\text{ME}}^{\text{sep}} \quad (103)$$

并不是普遍规律。在本文数值计算中，某些非对称态集给出了明显大于数值误差的 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} > 0$ 。

本文在数值搜索中获得一组具有代表性的参数：

$$\theta \simeq 1.419, \quad (104)$$

$$\eta \simeq 0.140, \quad (105)$$

$$\phi \simeq 1.560. \quad (106)$$

在该参数点处，最小误差分辨的整体测量最优成功率为

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} \simeq 0.6226, \quad (107)$$

而可分测量最优成功率为

$$P_{\text{ME}}^{\text{sep}} \simeq 0.6145. \quad (108)$$

因此

$$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} \simeq 8.1 \times 10^{-3}. \quad (109)$$

该结果表明，在一般三态两拷贝 qubit 态集中，最小误差分辨也可以出现整体测量相对于可分测量的优势。换言之，ME 中的整体测量优势并不只体现在整体测量相对于 LOCC 的优势上；在某些非对称态集中，它可以进一步体现为整体测量相对于所有可分测量的优势。

需要强调的是，本文并未给出该参数点为全局最大差距点的解析证明。该点在本文中作为具有代表性的非零差距算例，用于说明一般三态两拷贝 ME 中可以出现 $P_{\text{ME}}^{\text{glob}} > P_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 的现象，并结合相图分析说明 ME 差距的几何特征。

5.4 代表性参数点的几何结构

图 3(a) 给出了该代表性参数点在 Bloch 球上的几何结构。可以看到， $|\psi_0\rangle$ 与 $|\psi_2\rangle$ 非常接近，而 $|\psi_1\rangle$ 与这两个态具有中等分离。该点的两两重叠度为

$$|\langle\psi_0|\psi_1\rangle|^2 \simeq 0.576, \quad (110)$$

$$|\langle\psi_0|\psi_2\rangle|^2 \simeq 0.995, \quad (111)$$

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 \simeq 0.576. \quad (112)$$

因此，该态集具有明显的非对称结构： $|\psi_2\rangle$ 与 $|\psi_0\rangle$ 非常接近，而第三个态 $|\psi_1\rangle$ 与这两个近邻态具有中等分离。同时，该态集包含接近 $\phi \simeq \pi/2$ 的复相位。

也就是说，较大的 ME 差距并不出现在三态均匀分布的情形，而出现在一种近简并结构中：两个态几乎重合，第三个态与它们中等分离，并且态集包含非平凡复相位。

这种几何结构与 double-trine 态集形成明显对比。Double-trine 态集具有高度对称性，三种态之间的两拷贝内积完全相同；而上述非对称态集则具有显著不均匀的重叠度结构。数值结果表明，正是这种不均匀性使整体测量与可分测量之间的性能差距得以打开。

5.5 参数切片分析

为判断该热点是否为孤立点，图 3(b)–(d) 分别给出了固定另外两个参数时 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 随 θ 、 η 、 ϕ 的变化。

固定

$$\eta \simeq 0.140, \quad \phi \simeq 1.560, \quad (113)$$

改变 θ 时， $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 在较宽范围内保持在 10^{-3} 量级以上，并在 $\theta \simeq 1.4$ 附近达到较大值。该结果表明，ME 差距对 θ 的变化具有一定稳定性，并不是单一参数点上的数值偶然。

固定

$$\theta \simeq 1.419, \quad \phi \simeq 1.560, \quad (114)$$

改变 η 时，可以观察到更加明显的非单调行为。当 η 很小时， $|\psi_2\rangle$ 与 $|\psi_0\rangle$ 几乎重合，三态分辨问题趋于退化，差距较小。随着 η 增大，差距逐渐增大，并在 $\eta \simeq 0.14$ 附近达到较大值。继续增大 η 后，近简并结构被破坏，差距再次减小。

固定

$$\theta \simeq 1.419, \quad \eta \simeq 0.140, \quad (115)$$

改变相位 ϕ 时， $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 在 $\phi \simeq \pi/2$ 附近取得较大值。当 ϕ 向 0 或 π 靠近时，差距减小。这说明复相位在打开 ME 中的整体测量优势时具有重要作用。

这些切片表明，较大的 ME 差距对应一个有限范围的非对称几何区域，而不是单个数值孤立点。

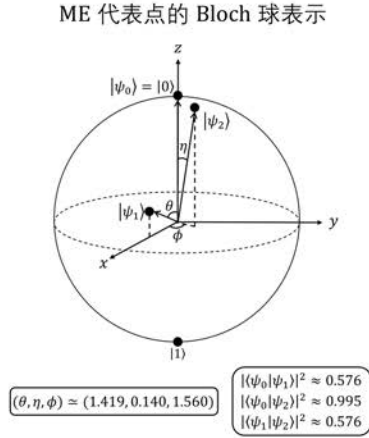
5.6 ME 差距的几何解释

Double-trine 态集在 ME 中满足

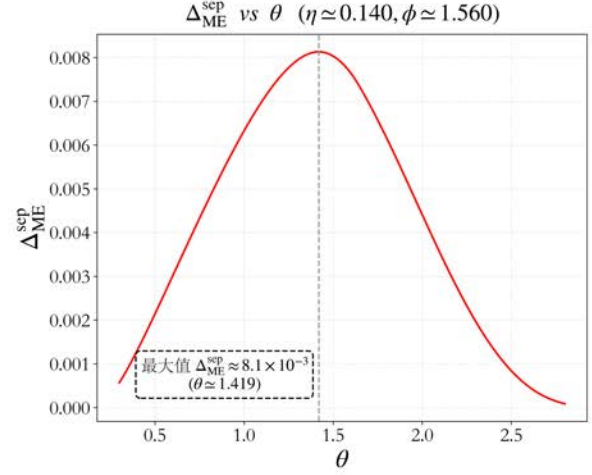
$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} = P_{\text{ME}}^{\text{sep}}. \quad (116)$$

其原因可以从对称子空间与反对称子空间的结构上理解。三种两拷贝信号态均位于三维对称子空间中，而完整的两 qubit Hilbert 空间还包含一维反对称子空间。在 double-trine 的高度对称情形中，整体最优 ME

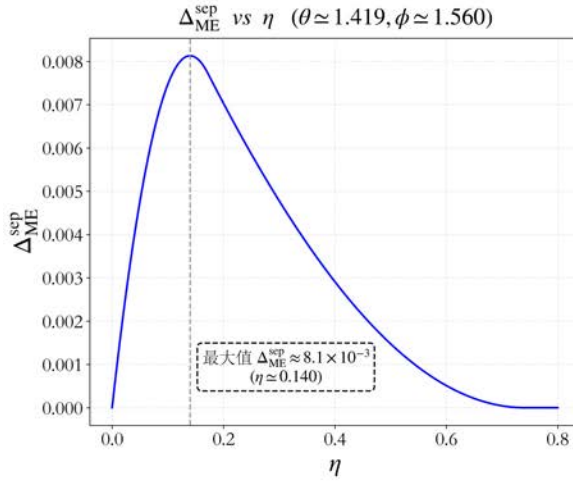
(a)



(b)



(c)



(d)

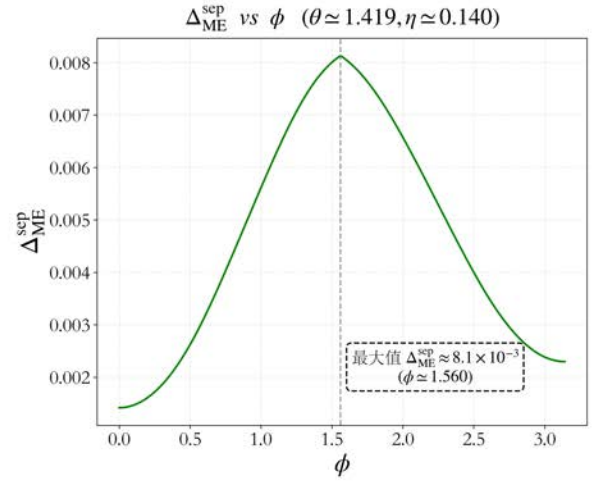


图 3 最小误差分辨中较大差距的几何结构及参数依赖。(a) 代表性 ME 热点对应的 Bloch 球几何。该点中 $|\psi_0\rangle$ 与 $|\psi_2\rangle$ 非常接近，而 $|\psi_1\rangle$ 与这两个态具有中等分离，并且包含非平凡复相位。(b)–(d) 分别给出 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 随 θ 、 η 、 ϕ 的一维变化曲线，其他参数固定在热点附近。结果表明，较大的 ME 差距在该非对称几何区域中具有一定稳定性，而不是单个孤立参数点的数值偶然。

Fig. 3. Geometric structure and parameter dependence of a large ME gap. Panel (a) shows the Bloch-sphere representation of a representative ME hotspot. At this point, $|\psi_0\rangle$ and $|\psi_2\rangle$ are very close to each other, while $|\psi_1\rangle$ has a moderate separation from them and involves a nontrivial complex phase. Panels (b)–(d) show the dependence of $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ on θ , η , and ϕ , respectively, with the other two parameters fixed near the hotspot. The large ME gap remains stable in a finite asymmetric geometric region.

测量在对称子空间中的结构具有很高对称性，可以通过适当利用反对称子空间，将整体最优 POVM 补全为可分 POVM，同时保持其在信号态上的成功率不变。

对于一般非对称三态，整体最优测量在对称子空间中的结构不再具有这种均匀性。此时，数值结果表明，这种补全机制不再保证能够保持整体最优性能。因而可分测量的最优成功率低于整体测量，出现

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} > P_{\text{ME}}^{\text{sep}}. \quad (117)$$

从这一角度看，ME 中的整体测量优势并不主要由态集的高对称性触发，而是与态集合的非对称几何结构有关。近简并态对、第三个中等分离态以及复相位共同构成了容易打开 ME 差距的几何条件。

从可分测量是否能够接近整体测量的角度看，double-trine 态集和上述非对称近简并态集代表了两类不同情形。在 double-trine 情形中，三种单拷贝态的两两重叠度完全相同，对应的两拷贝信号态在三维对称子空间中具有均匀结构。因此，整体最优 ME 测量在三个候选态之间具有对称分配的形式。此时，虽然测量本身作用在完整的 $2 \otimes 2$ 空间上，但可以利用与信号态正交的反对称子空间对 POVM 元素进行补全，使其满足可分性约束，同时不改变其在信号态上的成功率。因此，可分测量能够达到整体测量的最优成功率。

相比之下，在代表性的 ME 热点中，三态之间的两两重叠关系并不均匀，其中 $|\psi_0\rangle$ 与 $|\psi_2\rangle$ 非常接近，而 $|\psi_1\rangle$ 与它们保持中等分离。这种结构使 ME 问题具有明显不均匀的判别需求：测量既需要区分近简并态对，又需要保持对第三个态的识别能力。整体测量可以在两拷贝联合空间中更灵活地调整 POVM 元素，从而优化这种不均匀的概率判别边界；而可分测量受到 PPT 约束，不能完全复制整体最优测量的结构，因此出现小但非零的 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 。

上述比较说明，ME 中可分测量是否能够达到或接近整体测量，与态集合的几何结构有关。Double-trine 态集由于具有均匀对称性，整体最优测量可以通过反对称子空间补全为可分 POVM，因此满足 $P_{\text{ME}}^{\text{glob}} = P_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 。而对于本文发现的代表性 ME 热点，三态之间的两两重叠关系明显不均匀，非对称近简并结构会破坏 double-trine 情形中的对称补全机制，从而更容易打开 ME 差距。

5.7 本节小结

本节结果表明，double-trine 态集在 ME 中整体测量与可分测量等价的性质并不适用于一般三态两拷贝 qubit 态集。对于某些非对称、近简并的三态结构，整体测量可以严格优于所有可分测量。数值结果显示，ME 中的整体测量优势倾向于出现在非对称几何结构中，而不是出现在 double-trine 这样的高度对称

结构中。

这一现象与下一节将要讨论的 USD 情形形成对比。在 USD 中，double-trine 态集本身给出了显著的整体测量优势，而对该对称结构的扰动通常会降低这种优势。由此可见，ME 与 USD 中的测量非局域性具有不同的几何来源。

6 一般三态两拷贝无歧义分辨中的整体测量优势

上一节表明，在最小误差分辨中，double-trine 态集并不显示整体测量相对于可分测量的优势；相反，非对称、近简并的三态结构可以产生非零的

$$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} = P_{\text{ME}}^{\text{glob}} - P_{\text{ME}}^{\text{sep}}. \quad (118)$$

本节进一步分析无歧义分辨情形。与 ME 不同，USD 要求所有确定性输出均无错误，因此其最优测量对态集合的线性无关性和几何均匀性更加敏感。数值结果显示，USD 中较大的整体测量优势并不出现在上一节所讨论的非对称近简并结构中，而是集中于 double-trine 这类高度对称结构附近。

6.1 USD 差距的定义与计算

对于每一组参数

$$(\theta, \eta, \phi), \quad (119)$$

本文分别求解第 3 节中给出的整体测量和可分测量下的 USD 优化问题，得到 $P_{\text{USD}}^{\text{glob}}$ 和 $P_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 。二者之差定义为

$$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = P_{\text{USD}}^{\text{glob}} - P_{\text{USD}}^{\text{sep}}. \quad (120)$$

若

$$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} > 0, \quad (121)$$

则说明在无歧义分辨任务中，整体测量严格优于所有可分测量。

需要注意的是，当三种两拷贝信号态线性相关时，完整 USD 不可能实现。在线性无关情形下，整体测量原则上可以进行完整 USD；而在可分测量限制下，即使态集线性无关，其成功率也可能低于整体测量的最优值。为比较 USD 与 ME 中整体测量优势的几何分布，本文同样在若干固定 ϕ 切片上绘制 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 的相图。

6.2 USD 差距的参数空间分布

图 4 给出了 $\phi = \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, \pi$ 四个切片下 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 在 (θ, η) 平面上的分布。与图 2 中 ME 的情形不同, USD 的大差距并不出现在近简并非对称区域, 而集中在 $\phi = \pi$ 切片中靠近 $\theta = \eta = 2\pi/3$ 的

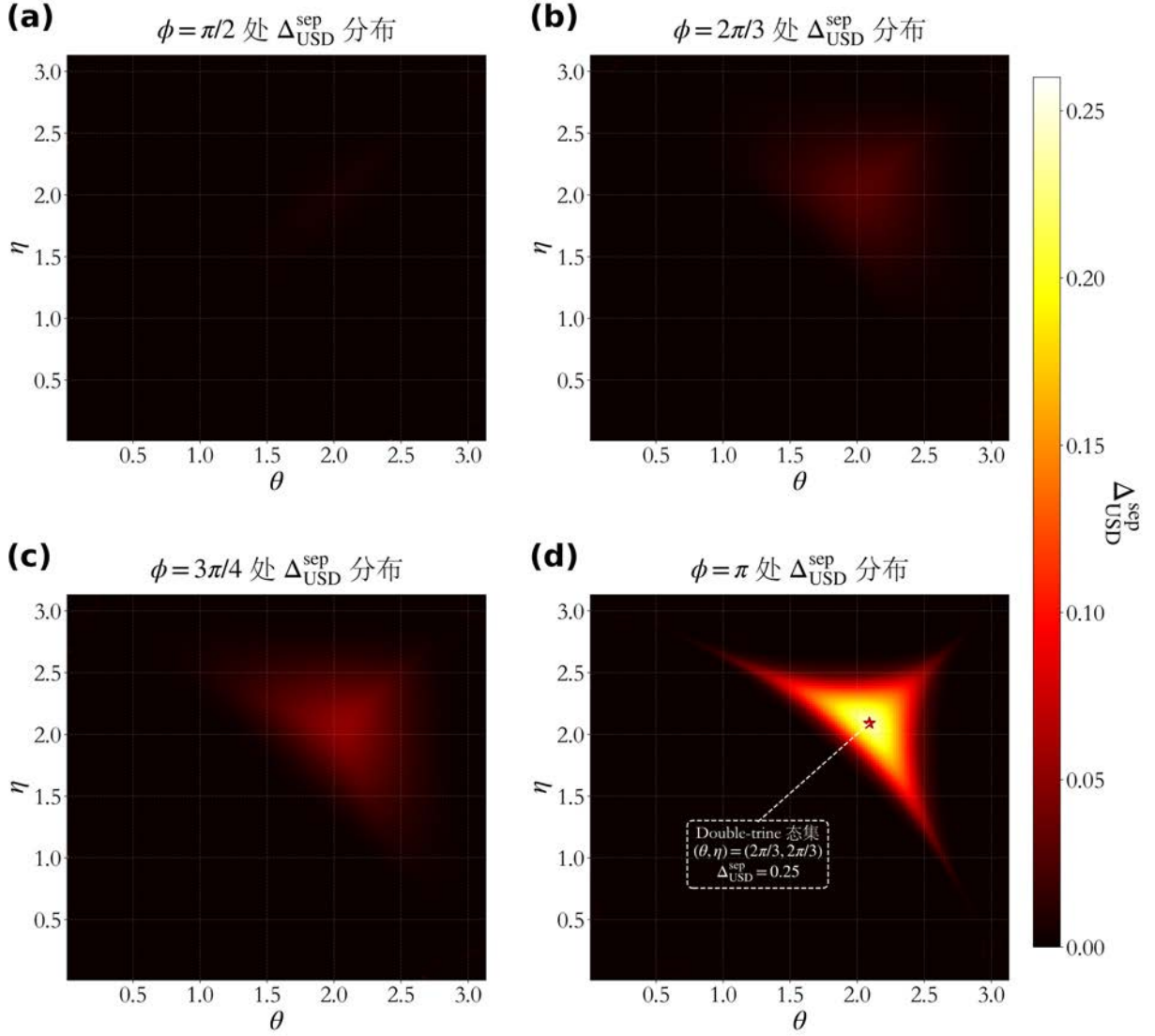


图 4 无歧义分辨中整体测量相对于可分离测量的性能差距。颜色表示 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = P_{\text{USD}}^{\text{glob}} - P_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 。(a)–(d) 分别给出 $\phi = \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, \pi$ 处的 (θ, η) 参数切片。结果显示, 较大的 USD 差距主要集中在 double-trine 态集附近。Double-trine 点位于 $\theta = \eta = 2\pi/3, \phi = \pi$, 其差距为 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = 0.25$ 。

Fig. 4. Performance gap between global and separable measurements in unambiguous state discrimination. The color scale represents $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = P_{\text{USD}}^{\text{glob}} - P_{\text{USD}}^{\text{sep}}$. Panels (a)–(d) show the distributions of $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ in the (θ, η) plane for $\phi = \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, \pi$, respectively. A large USD gap is concentrated near the double-trine state set. The double-trine point is located at $\theta = \eta = 2\pi/3, \phi = \pi$, where $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = 0.25$.

double-trine 对称点附近。

如第 4 节所述, double-trine 态集在 USD 中具有解析结果。整体测量下的最优成功率为

$$P_{\text{USD}}^{\text{glob}} = 0.75, \quad (122)$$

而可分测量下的最优成功率为

$$P_{\text{USD}}^{\text{sep}} = 0.5. \quad (123)$$

因此

$$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = 0.75 - 0.5 = 0.25. \quad (124)$$

这一结果说明, double-trine 态集在 USD 中具有显著的整体测量优势。与 ME 情形不同, 这里的优势不是相对于 LOCC 的优势, 而是相对于所有可分测量的优势。

在本文的数值扫描中, double-trine 点仍然表现为 USD 差距的突出点。在本文采用的参数扫描范围和数值精度内, 未发现超过 0.25 的 USD 差距。虽然本文未给出 double-trine 态集最大化 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 的解析证明, 但数值结果表明, double-trine 态集至少是 USD 差距的一个稳定局部最大点。

6.3 Double-trine 结构附近的扰动

图 5(a) 给出了 double-trine 态集的 Bloch 球几何。三个态位于同一大圆并相隔 120° , 构成均匀对称结构。

图 5(b)–(d) 显示, 对 θ 、 η 、 ϕ 的扰动都会降低 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 。这表明 double-trine 对称结构在 USD 中起到特殊作用。

首先固定

$$\eta = \frac{2\pi}{3}, \quad \phi = \pi, \quad (125)$$

并令

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 0.05. \quad (126)$$

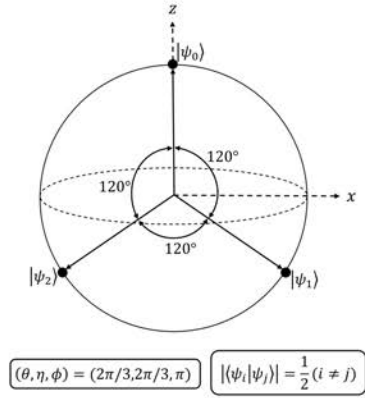
此时数值计算得到

$$P_{\text{USD}}^{\text{glob}} \simeq 0.7479, \quad (127)$$

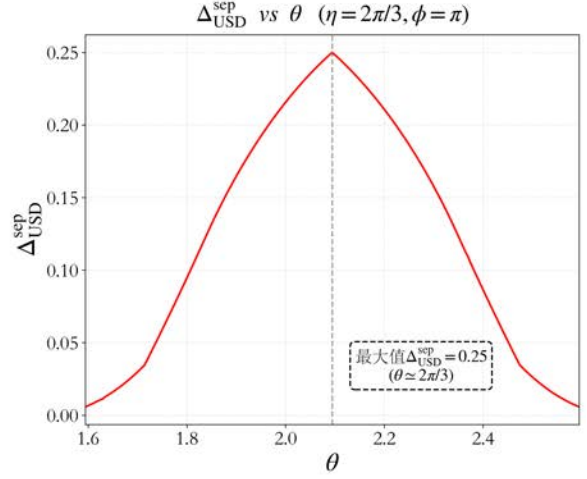
$$P_{\text{USD}}^{\text{sep}} \simeq 0.5146, \quad (128)$$

(a)

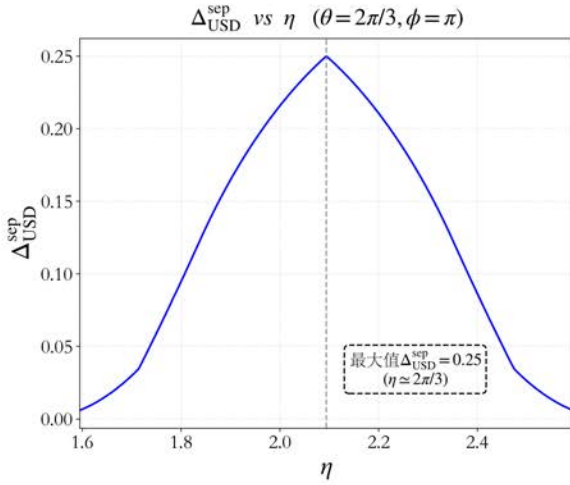
Double-trine 态集的 Bloch 球表示



(b)



(c)



(d)

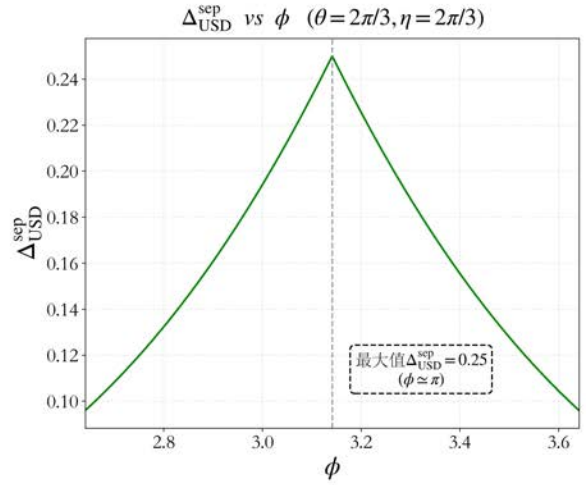


图 5 Double-trine 态集的几何结构及无歧义分辨差距的参数依赖。(a) Double-trine 态集在 Bloch 球上的对称分布，三个态位于同一大圆上且相隔 120° 。(b)–(d) 分别给出在 double-trine 点附近扰动 θ 、 η 、 ϕ 时 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 的变化。结果表明，double-trine 点给出 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = 0.25$ 的差距，而对该对称结构的扰动通常会降低 USD 的整体测量优势。

Fig. 5. Geometric structure of the double-trine state set and parameter dependence of the USD gap.

Panel (a) shows the Bloch-sphere representation of the double-trine state set, where the three states lie on the same great circle and are separated by 120° . Panels (b)–(d) show the variation of $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ when θ , η , and ϕ are perturbed around the double-trine point. The double-trine point gives $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = 0.25$, while perturbations away from this symmetric configuration generally reduce the USD advantage.

从而

$$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} \simeq 0.2333. \quad (129)$$

该值低于 double-trine 点的 0.25。

其次，保持

$$\theta = \eta = \frac{2\pi}{3}, \quad (130)$$

并将相位扰动为

$$\phi = \pi - 0.05. \quad (131)$$

此时得到

$$P_{\text{USD}}^{\text{glob}} \simeq 0.7286, \quad (132)$$

$$P_{\text{USD}}^{\text{sep}} \simeq 0.4996, \quad (133)$$

因此

$$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} \simeq 0.2290. \quad (134)$$

同样低于 double-trine 点。

这些结果表明，double-trine 的对称结构对 USD 中的整体测量优势具有重要作用。当三重对称性被破坏时，整体测量与可分测量之间的差距通常会减小。

6.4 非对称近简并结构中的 USD 表现

第 5 节中，在最小误差分辨下出现较大 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 的代表性参数点为

$$\theta \simeq 1.419, \quad \eta \simeq 0.140, \quad \phi \simeq 1.560. \quad (135)$$

该态集的几何特征是： $|\psi_0\rangle$ 与 $|\psi_2\rangle$ 非常接近，而 $|\psi_1\rangle$ 与它们具有中等分离。该结构有利于在 ME 中打开整体测量相对于可分测量的差距。

然而，在同一参数点考察 USD 时，情况完全不同。图 2 和图 3 中显示的 ME 热点并不对应 USD 热点。在该参数点附近，USD 中整体测量和可分测量的最优成功率几乎相同， $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 接近零。由于 $|\psi_0\rangle$ 与 $|\psi_2\rangle$ 非常接近，对这两个态进行无歧义区分的成功率受到强烈限制。数值计算显示，在该参数点附近，

$$P_{\text{USD}}^{\text{glob}} \simeq 0.0603, \quad P_{\text{USD}}^{\text{sep}} \simeq 0.0603, \quad (136)$$

因此 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 接近零。也就是说，该近简并结构虽然有利于 ME 中出现非零 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ ，但并不产生显著的 USD 整体测量优势。

这一现象说明，ME 与 USD 对态集合几何结构的偏好不同。ME 允许错误，因此可以在非对称、近简并结构中体现整体测量对概率判别的优势；而 USD 要求零错误输出，近简并态对会显著压低无歧义分辨成功率。

6.5 USD 差距的几何特征

从数值结果可以看出，USD 中较大的 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 主要出现在态集合分布较均匀、三种两拷贝态之间没有特别接近态对的区域。Double-trine 态集正是这一类结构的代表。其三种两拷贝态在三维对称子空间中具有高度均匀的几何关系，使得整体测量可以有效构造无错误的确定性输出。

相比之下，若态集中存在一对非常接近的态，则 USD 的成功率会受到明显限制。即使整体测量可以利用整个两拷贝空间，零错误条件仍要求确定性输出不能对其他候选态产生响应。近简并态对使得这一约束变得更加苛刻。因此，近简并结构并不利于形成大的 USD 差距。

这与第 5 节中 ME 的结果形成对比。ME 中较大的整体测量优势出现在非对称、近简并结构中；USD 中较大的整体测量优势则倾向于出现在均匀、对称结构附近。由此可见，同一三态两拷贝模型在不同分辨准则下对应不同的测量非局域性机制。

6.6 ME 与 USD 的比较

对比图 2-3 与图 4-5 可以看出，ME 与 USD 的有利几何结构不同。ME 的较大差距出现在非对称近简并区域；USD 的较大差距出现在 double-trine 对称区域。

在最小误差分辨中，double-trine 态集满足

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} = P_{\text{ME}}^{\text{sep}}, \quad (137)$$

因此没有整体测量相对于可分测量的优势。一般非对称三态则可以出现

$$P_{\text{ME}}^{\text{glob}} > P_{\text{ME}}^{\text{sep}}, \quad (138)$$

其代表性差距约为

$$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} \simeq 8.1 \times 10^{-3}. \quad (139)$$

表 2 不同三态几何结构下最小误差分辨和无歧义分辨中整体测量优势的对比。Double-trine 型均匀对称结构对应三态之间的两两重叠度相同并具有均匀对称性；非对称近简并结构对应一对态非常接近而第三个态与其保持中等分离。结果显示，ME 中较大的整体测量优势倾向于出现在非对称近简并结构中，而 USD 中较大的整体测量优势更依赖 double-trine 型均匀对称结构。

Table 2. Comparison of the GLOBAL-SEP gaps in minimum-error discrimination and unambiguous state discrimination for different three-state geometries. The double-trine-type uniformly symmetric geometry has equal pairwise overlaps and a uniform symmetry among the three states. The asymmetric nearly degenerate geometry contains a pair of very close states and a third state with a moderate separation from them. The results show that a relatively large global-measurement advantage in ME tends to appear in asymmetric nearly degenerate geometries, whereas a large global-measurement advantage in USD is more closely associated with the double-trine-type uniformly symmetric geometry.

几何结构	典型参数或重叠度特征	ME 中表现	USD 中表现
Double-trine 型 均匀对称结构	$(\theta, \eta, \phi) = (2\pi/3, 2\pi/3, \pi)$ 三态对称分布	$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} = 0$	$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = 0.25$
非对称近简并结构	$(\theta, \eta, \phi) \simeq (1.419, 0.140, 1.560)$ 一对态非常接近	$\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}} \simeq 8.1 \times 10^{-3}$	$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} \approx 0$

在无歧义分辨中，double-trine 态集给出

$$\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}} = 0.25, \quad (140)$$

而对称结构的扰动通常会降低该差距。另一方面，ME 差距较大的非对称近简并态集在 USD 中并不显示显著整体测量优势。为了突出 ME 与 USD 中整体测量优势的不同几何来源，表 2 对本文讨论的代表性态集进行了对比。

无歧义分辨与最小误差分辨的差异来自零错误约束。最小误差分辨允许错误，因此其优化目标是在不同错误概率之间进行权衡；在非对称近简并结构中，整体测量可以通过更一般的联合 POVM 改善这种概率权衡。无歧义分辨则不同，其确定性输出必须严格满足零错误条件，即用于判断某一候选态的 POVM 元素不能对其他候选态产生响应。因此，当态集中存在一对近简并态时，零错误条件会强烈压低这两个态的可确定识别概率。此时即使允许整体测量，成功率也受到态集本身几何重叠度的限制，可分测量与整体

测量之间的差距反而难以显著扩大。

Double-trine 态集在无歧义分辨中表现出较大的性能差距，是因为它兼具线性无关性和均匀对称性。三种两拷贝态在对称子空间中的相对结构均衡，使整体测量可以以较高成功率构造无错误的确定性输出；但这些无错误检测方向通常不能完全由可分 POVM 实现。因此，在无歧义分辨中，较大的整体测量优势更依赖 double-trine 型均匀对称结构。对该结构的角度或相位扰动会破坏三态之间的均衡关系，从而降低该差距。

因此，ME 与 USD 的整体测量优势并非由同一种几何结构控制。ME 中的非零 $\Delta_{\text{ME}}^{\text{sep}}$ 更容易出现在非对称、近简并态集中；而 USD 中较大的 $\Delta_{\text{USD}}^{\text{sep}}$ 更倾向于出现在 double-trine 这类均匀对称结构中。

这一结果表明，态分辨任务的目标函数对测量非局域性的表现形式具有决定性影响。对同一类三态两拷贝信号态而言，不同分辨准则会选择出不同的有利态集几何结构。

6.7 本节小结

本节分析了一般三态两拷贝 qubit 态集在无歧义分辨中的整体测量优势。结果显示，double-trine 态集在 USD 中给出显著的 $\text{GLOBAL} > \text{SEP}$ 差距，而对其对称结构的扰动通常会降低该差距。与上一节 ME 情形相比，USD 中的优势更依赖于态集合的均匀对称结构，而不倾向于出现在近简并非对称区域。

因此，三态两拷贝模型揭示了一个明确的任务依赖性：最小误差分辨和无歧义分辨中的测量非局域性具有不同的几何来源。这一结论为理解更一般多拷贝态分辨中的测量层级提供了基础。

7 总结与展望

本文研究了一般三个 qubit 纯态的两拷贝分辨问题，比较了整体测量与可分测量在最小误差分辨和无歧义分辨中的最优性能。结果表明，即使在三态两拷贝这一低维模型中，整体测量优势也已经表现出明显的任务依赖性和几何依赖性。在最小误差分辨中，整体测量与可分测量等价并不是普遍规律；对于某些非对称、近简并的三态结构，整体测量可以严格优于所有可分测量，代表性差距约为 8.1×10^{-3} 。该优势并不出现在高度对称态集中，而更容易在两个态非常接近、第三个态与它们中等分离并带有非平凡复相位的几何区域中打开。相比之下，在无歧义分辨中，较大的整体测量优势更集中地出现在均匀、对称的几何结构附近，代表性差距可达到 0.25；对该对称结构的扰动通常会降低这种优势，而在最小误差分辨中表现出较大差距的非对称近简并态集，在无歧义分辨中并不产生显著优势。由此可见，最小误差分辨和无歧义分

辨中的测量非局域性由不同的态集合几何机制控制：前者更容易在非对称结构的态集合中出现，后者则更依赖均匀对称的态集合几何结构。

这些结果说明，多拷贝态分辨中的整体测量优势不能仅由态之间的重叠度大小来判断，还需要结合具体的分辨准则和态集合的整体几何结构来理解。三态两拷贝 qubit 系统虽然简单，但已经能够体现整体测量、可分测量以及不同态分辨任务之间的非平凡关系，因此可作为研究多拷贝测量非局域性的基础模型。后续可以进一步研究固定不确定率分辨等介于最小误差分辨和无歧义分辨之间的任务，分析整体测量优势如何在两类极限任务之间过渡；也可以将这一分析推广到更多态数、更高拷贝数或更高维系统，以探索有限拷贝量子态分辨中测量非局域性的出现条件和几何机制。本文关于一般参数空间的结果主要基于数值优化，相关最大差距能否得到解析刻画仍有待进一步研究。

参考文献

- [1] Bergou J A 2010 *J. Mod. Opt.* **57** 160
- [2] Holevo A S 1973 *J. Multivar. Anal.* **3** 337
- [3] Helstrom C W 1976 *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press)
- [4] Barnett S M, Croke S 2009 *Adv. Opt. Photon.* **1** 238
- [5] Ivanovic I D 1987 *Phys. Lett. A* **123** 257
- [6] Dieks D 1988 *Phys. Lett. A* **126** 303
- [7] Peres A 1988 *Phys. Lett. A* **128** 19
- [8] Yuen H P, Kennedy R S, Lax M 1975 *IEEE Trans. Inf. Theory* **21** 125
- [9] Peres A, Wootters W K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 1119
- [10] Bennett C H, DiVincenzo D P, Fuchs C A, Mor T, Rains E, Shor P W, Smolin J A, Wootters W K 1999 *Phys. Rev. A* **59** 1070
- [11] Chitambar E, Hsieh M H 2013 *Phys. Rev. A* **88** 020302(R)
- [12] Chitambar E, Duan R, Hsieh M H 2014 *IEEE Trans. Inf. Theory* **60** 1549

- [13] Nakahira K, Kato K, Usuda T S 2018 *Phys. Rev. A* **97** 022340
- [14] Nakahira K, Kato K, Usuda T S 2019 *Phys. Rev. A* **99** 022316
- [15] Chefles A 2001 *Phys. Rev. A* **64** 062305
- [16] Walgate J, Short A J, Hardy L, Vedral V 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4972
- [17] Virmani S, Sacchi M, Plenio M, Markham D 2001 *Phys. Lett. A* **288** 62
- [18] Chefles A 2004 *Phys. Rev. A* **69** 050307(R)
- [19] Chen P X, Bergou J A, Zhu S Y, Guo G C 2007 *Phys. Rev. A* **76** 060303(R)
- [20] Sparaciari C, Paris M G A 2013 *Phys. Rev. A* **87** 012106
- [21] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413
- [22] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R 1996 *Phys. Lett. A* **223** 1
- [23] Vandenberghe L, Boyd S 1996 *SIAM Rev.* **38** 49
- [24] Eldar Y C 2003 *IEEE Trans. Inf. Theory* **49** 446
- [25] Diamond S, Boyd S 2016 *J. Mach. Learn. Res.* **17** 1
- [26] O'Donoghue B, Chu E, Parikh N, Boyd S 2016 *J. Optim. Theory Appl.* **169** 1042
- [27] Eldar Y C, Forney G D 2001 *IEEE Trans. Inf. Theory* **47** 858

Geometry dependence of collective-measurement advantage in two-copy discrimination of three quantum states*

FANG Zixuan ZHOU Xiaoqi[†]

(*School of Physics and State Key Laboratory of Optoelectronic Materials and Technologies,
Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China*)

Abstract

Multi-copy quantum state discrimination provides a minimal setting in which the nonlocality of measurements can be revealed even when the input states themselves are product states. In this work, we investigate the two-copy discrimination of three qubit pure states with equal prior probabilities, and compare the optimal performances of global and separable measurements in two representative discrimination tasks: minimum-error discrimination (ME) and unambiguous state discrimination (USD). A general three-state qubit ensemble is parametrized by three Bloch-sphere parameters, which determine the pairwise overlaps and relative phase of the states. After the two-copy embedding, the three signal states lie in the symmetric subspace of two qubits. The optimal success probabilities under global measurements are formulated as semidefinite programs. For separable measurements, we use the positive-partial-transpose condition, which exactly characterizes separability in the $2 \otimes 2$ system, and thus obtain the exact optimal separable performance.

Using the double-trine ensemble as an analytical benchmark, we first recover its known measurement hierarchy: in ME, separable measurements can attain the global optimum, whereas in USD, global measurements strictly outperform all separable measurements. We then extend the analysis to general

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 62575313).

[†] Corresponding author. E-mail: zhouxq8@mail.sysu.edu.cn

three-state geometries by scanning the parameter space and refining the regions where a nonzero global-over-separable gap appears. Our results show that the equality between global and separable measurements in ME is not generic. For certain asymmetric, nearly degenerate configurations, in which two states are very close while the third state has a moderate separation from them and a nontrivial relative phase, global measurements can strictly outperform all separable measurements; a representative gap is about 8.1×10^{-3} . In contrast, the largest USD advantage is concentrated near the uniformly symmetric double-trine geometry, where the gap reaches 0.25, and perturbations away from this symmetry generally reduce the advantage.

These results demonstrate that measurement nonlocality in two-copy three-state discrimination is strongly task dependent. The global-measurement advantage in ME is favored by nonuniform, nearly degenerate state geometries, whereas that in USD is closely tied to the symmetric double-trine-type geometry. This distinction clarifies that the advantage of global measurements in multi-copy state discrimination cannot be inferred solely from pairwise overlaps, but must be understood jointly from the discrimination criterion and the overall geometry of the state set.

Keywords: quantum state discrimination; global measurement; separable measurement; measurement nonlocality