

磁星多通道自转减慢模型与引力波辐射约束：基于等效平均制动指数的分析*

李永宏^{1) #} 高志福^{2) †} 王辉^{1) †}

1) (山西省智能光电传感应用技术创新中心, 运城学院, 运城山西 044000, 中国)

2) (中国科学院新疆天文台, 乌鲁木齐, 新疆 830011, 中国)

磁星是宇宙中磁场最强的天体之一, 其自转减慢机制涉及磁偶极辐射、粒子星风、磁场衰减及质量四极和 r 模引力波辐射。由于计时噪声强, 瞬时制动指数难以直接测量; 利用超新星遗迹关联年龄反推等效平均制动指数 $\langle n \rangle$, 可将多通道竞争转化为 $\langle n \rangle$ 给出的运动学约束。本文以此为基础, 对8颗与超新星遗迹成协的磁星样本, 建立粒子星风、磁偶极辐射、质量四极引力波、 r 模引力波加磁场衰减修正的自转减慢模型, 给出各通道力矩系数表达式, 系统导出 $\langle n \rangle$ 与 r 模扭矩分数 $\bar{f}_7$ 的上下界, 阐明平均制动指数与瞬时制动指数的关系及预先扣除磁场衰减修正的必要性。进而估算引力波应变, 结合下一代探测器灵敏度得出: 磁星稳态信号位于亚赫兹, 直接探测难度极大; 即便未直接探测到引力波信号, 电磁观测与探测器上限仍可有效压缩 r 模饱和振幅 α 与磁致椭圆率 ϵ_B 的容许区间。该结果为利用电磁观测系统性约束磁星引力波通道提供了不依赖直接探测的独立路线。

关键词: 磁星, 多通道自转减慢模型, 引力波辐射; 等效平均制动指数

PACS: 97.60.Gb, 95.85.Sz

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: zhifugao@xao.ac.cn; gjwang@my.swjtu.edu.cn

第一作者. E-mail: liyonghong02721227@163.com

* 中国国家重点研发计划(2022YFC2205202)、新疆维吾尔自治区重大科技专项(2022A03013-1)、国家自然科学基金(编号: 12573052)资助的课题、山西省高等学校科技创新项目(2021L483).

1 引言

脉冲星（pulsar）本质上是高速自转、且具有强磁场的中子星：其旋转动能通过磁层过程（典型如磁偶极辐射与粒子星风）转化为电磁辐射与高能粒子流^[1–6]。磁星是一类具有超强磁场（ $B \sim 10^{14}–10^{15}$ G）的年轻孤立中子星，该磁场强度由磁偶极辐射模型结合自转减慢率（ $\dot{P}$ ）反推得到^[7]。根据其高能辐射特征的不同，磁星通常表现为软伽马重复暴（SGRs）和反常X射线脉冲星（AXPs）。这些极端天体代表了宇宙中磁化最强的环境之一，其中量子电动力学效应变得不可忽略。磁星展现出多种高能现象，最为显著的是X射线外暴以及短时、剧烈的耀发。这些辐射事件通常伴随着显著的测时不规则性，包括周期跃变（glitches）和更为罕见的反周期跃变（anti-glitches）。目前，约有32颗磁星及候选源被收录于McGill在线磁星表^[8]中，构成了研究中子星极端物理的重要实验室^[9–12]。

制动指数 n 是揭示脉冲星自转减慢物理机制的关键观测量。标准磁偶极辐射模型预言 $n = 3$ ，但实测值无一与之吻合，暗示存在额外的能量损失通道或参量的时变效应^[13,14]。制动指数的测量还与中子星外层磁层物理^[15]、致密物质状态方程^[16]、超流物理^[16]以及磁场演化^[17]等多个方面密切相关。然而，对于磁星，瞬时制动指数 n 的实测面临三重困难：其一，磁星频繁发生glitch与反glitch，恢复时标与 $\dot{\nu}$ 信号混叠；其二，磁星X射线脉冲轮廓在宁静期也常不稳定（星震、磁层重构），导致相位连接断链；其三，磁星 P 多为2–12 s，单历元相位计时精度本就低于毫秒脉冲星，自转频率的二阶导数 $\dot{\nu}$ 的相对误差被放大。再加计时噪声与频繁爆发活动，目前尚无法直接测量可靠的瞬时制动指数 n 。中子星内部的r模（Rossby/惯性振荡模）是一类由科氏力恢复的全局流体振荡模式，主导成分为 $l = m = 2$ （该多极在CFS不稳定性中增长最快，且为引力辐射效率最高的四极分量）；其在转动参考系中的图案角频率为 $\omega_r^{(\text{rot})} = 2\Omega/3$ ，对应的惯性系图案角频率 $|\omega_r^{(\text{inert})}| = 4\Omega/3$ ，在自然单位制下，引力波频率 $f_{\text{GW}} = 4\Omega/(3\pi)$ （由 $l = m = 2$ 四极辐射 $f_{\text{GW}} = m|\omega_r^{(\text{inert})}|/(2\pi)$ 给出）^[18]。在转动星中，这类模式会与引力辐射通过CFS（Chandrasekhar–Friedman–Schutz）不稳定性耦合：引力辐射的反作用效应（辐射反应的后牛顿项）使模式的惯性系能量满足 $\partial E_{\text{inert}}/\partial \Omega < 0$ ，即Friedman & Schutz判据，辐射持续从模式抽走角动量反而把模式振幅泵大，触发指数增长，直至非线性过程（微分自转建立、三模耦合等）将其饱和和在有限无量纲振幅 α （通常 $\alpha \sim 10^{-4}–10^{-2}$ ，远小于早期乐观取 $\alpha \sim 1$ 的上限；其中三模耦合给出 $\alpha_{\text{crit}} \sim 10^{-2}$ ^[19]，高温体粘滞给出 $\alpha \sim 10^{-2}–10^{-1}$ ^[20]，磁星超强 B 还通过Alfvén阻尼进一步压制）^[19,20]。饱和后的r模维持 $l = m = 2$ 的时变电场四极矩，等价于速度场激发的有效质量四极矩，引力波辐射源自该四极矩的二阶时间导数，因而带走的是星体总角动量 $J = I\Omega$ 而非流体局部量——角动量损失直接体现为自转减慢 $\dot{\Omega} < 0$ ；由能量平衡 $\dot{E}_{\text{rot}} =$

$I\Omega|\dot{\Omega}| = L_{\text{GW}}^{\text{r-mode}}$ 及 r 模引力辐射光度 $L_{\text{GW}}^{\text{r-mode}} \propto \alpha^2 \Omega^8$ [18] 得 $\dot{\Omega} \propto -\alpha^2 \Omega^7$, 对应通道特征指数 $k = 7$, 与第2章多通道方程 (§2.2) 中磁偶极 $k = 3$ 、质量四极 $k = 5$ 并列。Annamalai & Nandi [21] 进一步提出利用 r 模及轴向主导的混合模 (axial-led hybrid modes) 的连续引力波信号, 结合电磁距离测量或通用关系, 可同时推断中子星的转动惯量、垂直自转轴的磁偶极矩分量以及 r 模饱和振幅, 为 r 模通道的可观测性提供了系统的参数推断框架。

国内学者在脉冲星/磁星制动指数与多通道减速方面开展了系统的研究工作。早期, Xu & Qiao [22] 率先提出制动指数可作为检验脉冲星辐射模型的判据; Zhang & Xie [23] 则从统计角度揭示了脉冲星制动指数跨度超过一亿倍的物理根源。在星风制动方面, Kou & Tong [24] 建立了 Crab 脉冲星在星风制动模型下的自转演化框架, Tong H [25] 进一步系统比较了磁偶极与星风两种制动机制的适用范围。Ou et al. [26] 对 8 颗脉冲星及 15 颗磁星的频率二阶导数与制动指数进行了系统分析, 给出了磁星群体的制动指数分布特征。针对高/低制动指数脉冲星, Chen & Li [27] 利用回落盘与磁场相互作用解释了 PSR J1734–3333 的低制动指数, Chen W-C [28] 则通过大磁倾角模型解释了 PSR J1640–4631 的高制动指数; Tong & Kou [29] 进一步提出了制动指数从 > 3 演化至 ~ 1 的可能路径。Cheng et al. [17] 从 PSR J1640–4631 的内部物理出发, 结合超流与磁场衰减给出了制动指数的理论约束。在磁星制动指数方面, Wang et al. [30] 和 Ge et al. [31] 分别研究了 PSR B0540–69 的制动指数跃迁与 PSR J1124–5916 的态转变行为, 揭示了磁星磁层活动的复杂性。Zhang et al. [32] 基于粒子星风 (以下简称星风) 扭矩讨论了 Crab 脉冲星制动指数随时间的衰减。Hu et al. [33] 与 Yan et al. [34] 则分别从磁倾角演化和幂律衰减磁场角度, 对多颗年轻脉冲星的制动指数给出了内部物理约束。这些工作与本文磁星多通道框架形成互补。

为了克服制动指数直接测量的困难, Gao et al. [35] 提出利用超新星遗迹 (SNR) 关联年龄 T_{SNR} 来反推一个等效平均制动指数 $\langle n \rangle$ 。该方法基于单一幂律自转减慢假设, 通过积分自转减慢方程并引入特征年龄 τ_c , 得到 $\langle n \rangle = 1 + 2\tau_c/T_{\text{SNR}}$ 。该指数并非瞬时值, 而是整个自转减慢历史的平均表征。Gao 等将此方法应用于 8 颗与 SNR 成协的磁星, 发现其 $\langle n \rangle$ 分布在约 1 到 42 之间 (其中上沿 ≈ 42 来自 1E 2259+586 的 $\langle n \rangle = 32 \pm 10$), 显著偏离 $n = 3$ 。需注意 $\langle n \rangle \gg 7$ 已超出四通道瞬时制动指数 $\{1, 3, 5, 7\}$ 的理论上限, 暗示此类源的等效指数由磁场衰减等非幂律项主导, 而非真实瞬时 $n > 7$, 这正是本文在 LP 约束前需先扣除磁场衰减修正的动机之一 (见 §2.3、§3.4)。除 1E 2259+586 外, 其余 7 颗的 $\langle n \rangle$ 均落在 1–13 区间, 仍可用四通道框架讨论。凸显了磁星自转减慢机制的多通道特性。

上述 $\langle n \rangle$ 偏离 3 且分布宽泛 (见 §1 末), 说明单一磁偶极模型不足以描述磁星自旋演化, 必须考虑多通

道竞争。近年来，多通道自转减慢模型已被广泛研究并成功应用于多个源。例如，Li et al. [36–38] 提出了一个包含磁偶极辐射 [39]、星风制动、磁场衰减、磁倾角演化和引力波辐射的统一模型，成功解释了磁星Swift J1834.9-0846的异常制动指数 ($n = 1.08$)。然而，这些研究通常需要对每个源进行详细的参数拟合，且依赖于特定的模型假设（如磁倾角演化律、磁场衰减时标等），缺乏一个直接从平均制动指数出发、不依赖具体模型参数的普适性约束框架。

特别地，对于r模引力波辐射在磁星自转减慢中的贡献，虽然已有大量理论工作探讨了其可能 [40,41]，但如何利用有限的观测数据（如平均制动指数）来定量约束r模的扭矩分数，仍然是一个开放问题。与普通年轻脉冲星不同，磁星的超强磁场会通过磁应力显著抑制r模不稳定性的增长 [42,43]，使其在常规自转周期下难以达到可观振幅。同时，磁星的引力波辐射主要集中在亚赫兹频段：典型磁星自转周期 $P \sim 2\text{--}12\text{ s}$ ，对于主导的质量四极通道 [44,45]，引力波频率 $f_{\text{GW}} = 2/P \sim 0.17\text{--}1\text{ Hz}$ ；对于r模电流四极通道， $f_{\text{GW}} = 4\Omega/(3\pi) \approx 0.44\text{--}2.67\text{ Hz}$ （取 $\Omega = 2\pi/P$ ） [18]。两通道均落在0.1–3 Hz亚赫兹区间，远低于地面激光干涉仪（aLIGO/Virgo）最佳灵敏频段（ $\sim 10\text{--}10^3\text{ Hz}$ ），且该频段恰好位于地震(seismic)噪声严重污染的低频区域，直接探测难度极大。对应无量纲特征应变 $h_0 \lesssim 10^{-25}$ （见§4详算），即便下一代爱因斯坦望远镜（ET-D）在低频端推测灵敏度亦仅 $\sim 2\text{--}3 \times 10^{-26}$ ，直接探测难度极大。

值得注意的是，近期Dong & Melatos [46]对低磁场吸积毫秒脉冲星中由随机团块机械撞击强迫激发的r模进行了详细计算，发现即使在这种“外力持续供能”的有利场景下，其引力波应变仍远低于当前LIGO/Virgo灵敏度，且所需相干积分时间长达 $10^5\text{--}10^6$ 年。磁星情况只会更严峻，超强磁场（ $B \sim 10^{14}\text{--}10^{15}\text{ G}$ ）通过 Alfvén 阻尼进一步压制r模振幅，使得直接引力波探测在可预见未来几乎无望。

这一结论与多项随机引力波背景研究的结果相互呼应。Zhu, Fan & Zhu [47]计算了宇宙中所有新生快速旋转中子星的r模振荡所产生的随机引力波背景，发现即使采用最乐观的参数（假设r模振幅达到1的量级），背景能量密度峰值也仅有约 10^{-8} ；若采用更现实的上限（r模振幅不超过 10^{-2} ），背景能量密度会再降低四个数量级以上，远低于任何现有或近期探测器的灵敏度。Yan et al. [48]专门计算了新生磁星群体产生的随机引力波背景，发现即使采用最乐观的磁星形成率和初始自转参数，这种由磁致形变主导的背景信号在爱因斯坦望远镜中的信噪比也仅为0.37（三年积分）。类似地，对于更极端的新生大质量磁星（质量约 $2.5 M_{\odot}$ ），其随机背景能否被探测到仍然强烈依赖于物态方程、环向磁场强度和并合率模型，在较保守的并合率下远达不到确凿探测的程度 [49]。这些结果共同表明，直接探测磁星引力波极为困难。

正是由于这一根本困难，本文放弃直接测量引力波应变的路线，转而采用Gao et al. [35]的超新星遗迹

年龄框架，利用等效平均制动指数 $\langle n \rangle$ 来约束r模的扭矩份额。该框架将问题从“能否直接看到r模的引力波信号”转变为从自转能量平衡出发，对r模的扭矩份额 $\bar{f}_7$ 给出不依赖微观细节的上下界”，并对磁星引力波应变的量级给出保守估计和下一代探测器的探测前景。这种直接探测受阻、电磁计时又无法给出瞬时制动指数的双重困境，恰好凸显了利用超新星遗迹年龄反推等效平均制动指数 $\langle n \rangle$ 、并在多通道能量平衡框架下对r模扭矩分数 $\bar{f}_7$ 进行约束的必要性和独特价值。

本文旨在填补这一空白。我们将Gao et al. [35]的8颗磁星样本作为研究对象，构建一个包含粒子星风、磁偶极辐射、磁场衰减、质量四极引力波和r模引力波在内的五通道自转减慢模型。通过建立一个从平均制动指数 $\langle n \rangle$ 到各通道扭矩分数（特别是r模扭矩分数 $\bar{f}_7$ ）的上下界约束框架，我们希望在不仅依赖具体模型参数的情况下，系统性地检验磁星是否需要引力波扭矩来解释其观测到的自转减慢行为，并给出定量的上限。此外，我们还将在该框架下估算磁星可能产生的引力波应变，并评估其在下一代引力波探测器（如爱因斯坦望远镜EC）中的可探测性 [50]。

本文的组织安排如下：第2章介绍平均制动指数与多通道自转减慢模型，包括等效平均制动指数的定义、多通道方程以及各通道力矩系数的推导，并给出瞬时制动指数的加权平均形式。第3章基于平均扭矩分数与平均制动指数的关系，系统地推导r模扭矩分数 $\bar{f}_7$ 的上下界解析表达式。第4章估算磁星的质量四极和r模引力波应变，并评估其可探测性。第5章总结本文的主要成果和创新点，并对未来工作做出展望。

2 磁星制动指数与多通道自转减慢模型

2.1 制动指数的定义

在脉冲星中，制动指数通常定义为

$$n \equiv \frac{\nu \ddot{\nu}}{\dot{\nu}^2} = 2 - \frac{P \ddot{P}}{\dot{P}^2}, \quad (1)$$

其中 ν 是自转频率， $\dot{\nu}$ 和 $\ddot{\nu}$ 分别是它的一阶和二阶时间导数； $P = 1/\nu$ 是自转周期， $\dot{P}$ 和 $\ddot{P}$ 分别是它的一阶和二阶时间导数。这个指数可以通过长时间的相位跟踪测量直接得到。但是对于磁星，由于它们在宁静期缺乏稳定的脉冲轮廓、存在很强的计时噪声、经常发生周期跃变和爆发活动，再加上自转周期很长导致相位难以连续追踪，目前还无法直接测出可靠的瞬时制动指数 n 。

为了从有限的观测数据中获取自转减慢的信息，传统的方法是假设自转减慢遵循单一的幂律规律，例如经典的磁偶极辐射模型（ $n = 3$ ）或纯粒子星风模型（ $n = 1$ ）。但是，Gao et al. [35] 对8颗与超新星遗迹

相关联的磁星的研究表明，它们的等效平均制动指数 $\langle n \rangle$ 分布在1到42之间，明显偏离任何一个单一通道的预期值。这个结果有力地说明：磁星的自转减慢不是由单一机制主导的，而是多种物理过程共同作用的结果。因此，我们需要放弃单一幂律的假设，把自转减慢方程推广到包含多个通道的一般形式。

2.2 多通道自转减慢方程

脉冲星自转减慢的通用多通道方程可以写为 [51]：

$$\dot{\Omega} = - \sum_i C_i(t) \Omega^{k_i} \quad (2)$$

其中 $C_i(t)$ 是第 i 个通道的力矩系数（可以随时间变化）， k_i 是这个通道的特征指数。对于磁星，我们考虑四个主要的幂律通道：

1. 粒子星风/磁层质量损失 ($k = 1$): $\dot{E}_{\text{wind}} \sim \dot{M} \Omega^2 R^2$ ，对应 $\dot{\Omega} \propto -\Omega^1$ 。星风效率 $\eta_{\text{wind}}(t)$ 会随着磁层状态的改变而变化 [25,39]。此外，磁倾角的演化也会影响星风效率 [38]。

2. 磁偶极辐射 ($k = 3$): $C_3(t) = \frac{B_d^2(t) R^6}{4 I c^3} (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \chi)$ [14,51]。如果偶极磁场 $B_d(t)$ 因为欧姆耗散或霍尔漂移而衰减，那么 C_3 就会随时间变化 [52,53]。对于高制动指数脉冲星 PSR J1640-4631，其磁场衰减率约为 $\dot{B}_d \sim -10^8 \text{ G yr}^{-1}$ ，对应的衰减时标约为 10^5 年，这为磁场衰减模型提供了直接的观测证据 [54]。中子星壳层的电导率和磁化参数决定了磁场衰减的效率 [30]。

3. 质量四极 (ϵ_B) 引力波辐射 ($k = 5$): 通常假定椭球率 ϵ_B 是常数，或者在一个小参数范围内扫描取值 [44,45]。

4. r模（电流四极）引力波辐射 ($k = 7$): 这是本工作的重点。r 模的无量纲饱和振幅 α 是关键参数。理论研究表明，非线性流体效应（三模耦合，即一个模式与另外两个模式共振交换能量）会把 α 限制在 $\alpha_{\text{crit}} \sim \mathcal{O}(10^{-2})$ 以内 [19]；高温下的体粘滞饱和机制也给出 $\alpha \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ 的典型范围 [55,56]。在饱和和平台近似下，可以取 $\alpha(t) \simeq \alpha_{\text{sat}} = \text{const}$ ，这样 C_7 就近似为常系数。具体来说，对于 GRB 111209A 的 X 射线余辉，Lin et al. [57] 曾使用 $\dot{\Omega} = -\beta \Omega^3 - \gamma_r \Omega^7$ 进行拟合，其中 γ_r 对应 r 模的贡献，这为我们提供了 $k=3$ 与 $k=7$ 相互竞争的直接观测实例。

此外，还有一类无法写成单一 Ω^k 形式的贡献，比如磁场衰减引起的有效角动量损失，我们将它单独处理为 $\dot{\Omega}_{\text{decay}}$ 。于是，完整的自转减慢方程为

$$\dot{\Omega} = -C_1(t) \Omega^1 - C_3(t) \Omega^3 - C_5 \Omega^5 - C_7 \Omega^7 + \dot{\Omega}_{\text{decay}} \quad (3)$$

值得指出的是，式(2)和(3)中各通道的特征指数 $k = 1, 3, 5, 7$ 是在忽略中子星结构随自转频率演化的近似

下得到的。Basu, Char & Nandi [58] 系统推导了快速旋转下中子星结构响应（转动惯量、半径、引力质量等的频率依赖）对磁偶极、质量四极、r 模三类通道制动指数的修正，指出当自转频率较高时， n_{EM} 、 n_{GW}^Q 、 n_{GW}^R 将分别偏离标准的 3、5、7，且偏离幅度受物态方程与重子质量的双重不确定性影响。对于本文研究的磁星样本（自转周期 $P \sim 2-12$ s，对应频率 $f \sim 0.08-0.5$ Hz），结构修正较小，采用名义指数 $k = 1, 3, 5, 7$ 作为一阶近似框架是合理的；快速旋转修正对约束边界的定量影响将留待后续工作讨论。

各通道的力矩系数表达式汇总于表 1。上述各通道的制动指数 $k = 1, 3, 5, 7$ 是在忽略中子星结构随自

表 1: 各通道力矩系数 C_i 的表达式与典型取值范围。

通道	k_i	C_i 表达式	说明
粒子星风	1	$C_1 = \frac{\dot{M} R^2}{I}$	$\dot{M}$ 为质量损失率
磁偶极辐射	3	$C_3 = \frac{B_d^2 R^6}{4I c^3} (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \chi)$	B_d 为偶极场， χ 为倾角
质量四极 GW	5	$C_5 = \frac{2GI\epsilon_B^2}{5c^5} \sin^2 \chi (1 + 15 \sin^2 \chi)$	ϵ_B 为椭球度
r 模 GW	7	$C_7 = \frac{2GI}{5c^5} \frac{4}{3} Q \alpha^2$	α 为 r 模饱和振幅

注：r 模的 α 并不是真正的常数。非线性饱和机制（三模耦合 [19]；高温体粘滞 [55]）将其限定在 $\alpha \sim 10^{-2}-10^{-1}$ 量级的工作窗口；当 $\alpha \lesssim 10^{-4}$ 时，r 模自转减慢时标将超过典型磁星年龄，此时可设 $f_7 \simeq 0$ 。第 3 章的边界结果将以 α 为自由参数给出允许区。

转频率演化的近似下得到的。Basu, Char & Nandi [58] 系统推导了快速旋转下中子星结构响应（转动惯量、半径、引力质量等的频率依赖）对磁偶极、质量四极、r 模三类通道制动指数的修正，指出当自转频率较高时， n_{EM} 、 n_{GW}^Q 、 n_{GW}^R 将分别偏离标准的 3、5、7，且偏离幅度受物态方程与重子质量的双重不确定性影响；该项工作还表明，在饱和振幅 $\alpha \sim 10^{-4} - 10^{-1}$ 范围内，r 模振荡可主导毫秒脉冲星的自转减慢，并进一步探讨了毫秒磁星情形下的制动指数。本文及以下推导采用名义指数 $k = 1, 3, 5, 7$ 作为一阶近似框架，所得 $\bar{f}_7$ 上下界应理解为该近似下的结果；快速旋转修正对约束边界的定量影响将留待后续工作结合具体物态方程讨论。

2.3 力矩系数的时间演化

在多通道自转减慢方程 (3) 中，力矩系数 $C_i(t)$ 一般不是常数，它们随时间的变化反映了磁星内部和磁层的物理过程。下面分别讨论各通道系数的主要时间依赖来源及其典型时标。

磁偶极辐射系数 C_3 正比于偶极磁场强度 B_d 的平方：

$$C_3(t) = \frac{B_d^2(t) R^6}{4Ic^3} (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \chi), \quad (4)$$

其中 χ 是磁轴与自转轴的夹角。 $B_d(t)$ 的衰减可以通过欧姆耗散和霍尔漂移来实现 [52,59–61]。对于磁星，初始表面磁场可达 $10^{14}–10^{15}$ 高斯，其衰减时标约为 $10^4–10^6$ 年，与磁星的典型年龄相当。在简单的指数衰减模型中，

$$B_d(t) = B_{d,0} \exp(-t/\tau_B), \quad (5)$$

τ_B 是磁场衰减时标。更精细的模型还考虑了霍尔漂移的作用：它本身不直接耗散磁场，但会把大尺度磁场的能量转移到小尺度，小尺度磁场更容易被耗散，从而加快了偶极磁场的整体衰减 [53]。此外，壳层电导率的高低也直接影响衰减的快慢 [30]。因此， $C_3(t)$ 通常随时间单调下降，但在某些阶段，霍尔效应可能引发磁场结构的突发性重组（称为“霍尔扭结”），使偶极分量暂时回升，导致 $C_3(t)$ 短暂增强。

粒子星风的力矩系数 C_1 与质量损失率 $\dot{M}$ 成正比：

$$C_1(t) = \frac{\dot{M}(t) R^2}{I}, \quad (6)$$

$\dot{M}$ 强烈依赖于磁层中的粒子产生机制。在磁星早期，剧烈的磁活动（如巨型耀发）可能导致星风短暂增强，使得 C_1 在短时间内大幅上升。随着磁能的释放， $\dot{M}$ 逐渐回落到准稳态水平。此外，磁层倾角 χ 的变化也会影响星风效率 [25,38,39]。总的来说， C_1 的演化比较复杂，难以用单一的解析形式来描述，但通常认为它的变化时标短于自转减慢时标，因此在长时间尺度上可以近似取它的时间平均值。

对于质量四极引力波（ $k=5$ ），椭球率 ϵ_B 主要由磁应力维持，如果磁场衰减， ϵ_B 也会随之减小，但通常假定 ϵ_B 在磁星寿命内近似恒定 [44,45]。因此 C_5 可以视为常数。

r 模引力波（ $k=7$ ）的系数 C_7 正比于无量纲饱和振幅 α 的平方：

$$C_7(t) = \frac{2GI}{5c^5} \frac{4}{3} Q \alpha^2(t), \quad (7)$$

其中 Q 是 r 模的几何因子（约 0.016）。 α 的演化受非线性流体力学效应的制约。三模耦合理论指出，当 α 超过临界值 $\alpha_{\text{crit}} \sim \mathcal{O}(10^{-2})$ 时，能量会迅速转移给其他模式，从而阻止振幅进一步增长 [19]。另一方面，高温下的体粘滞也能有效阻尼 r 模，将 α 限制在 $10^{-2}–10^{-1}$ 量级 [55,56]。在饱和平台近似下，可以取 $\alpha(t) \simeq \alpha_{\text{sat}} = \text{const}$ ，这样 C_7 就近似为常系数。但当温度降到临界值以下时，r 模可能会再次增长，导致 C_7 发生跳跃式变化。不过，对于磁星这样强磁化的中子星，磁场对 r 模的抑制效应也可能使 α 保持在极低的水平（ $\alpha \lesssim 10^{-4}$ ），这时 r 模通道可以忽略不计。

综上所述，各通道的力矩系数都存在不同程度的时间依赖性。严格求解自转减慢方程需要考虑这些演化过程，但这会使问题变得非常复杂。在本工作中，我们采用如下简化策略：

- 对于 C_3 ，考虑磁场衰减的影响，但将其归入非幂律项 $\dot{\Omega}_{\text{decay}}$ 中单独处理；
- 对于 C_1 、 C_5 和 C_7 ，在零级近似下视为常数，它们的时间变化作为高阶修正暂不考虑；
- 在后续推导平均制动指数与平均扭矩分数的关系时，我们采用时间平均的 $\bar{C}_i$ ，从而将问题简化为常数情形。

这一简化虽然丢失了一部分细节，但足以揭示多通道竞争的基本图像，并为第 3 章中对 r 模扭矩分数的约束提供可行的理论基础。

2.4 瞬时制动指数的多通道加权平均形式

从总扭矩式 (3) 出发，定义瞬时制动指数

$$n(t) \equiv \frac{\Omega \ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2}, \quad \dot{\Omega} = - \sum_i C_i(t) \Omega^{k_i} + \dot{\Omega}_{\text{decay}}, \quad (8)$$

其中指标集 $\{i\} = \{1, 3, 5, 7\}$ 对应四个幂律通道， $\dot{\Omega}_{\text{decay}}$ 是非幂律余项。

对幂律部分求导并代入 $\dot{\Omega}$ 自身，得到精确表达式：

$$\begin{aligned} \ddot{\Omega} &= - \sum_i \left(\dot{C}_i \Omega^{k_i} + C_i k_i \Omega^{k_i-1} \dot{\Omega} \right) + \ddot{\Omega}_{\text{decay}} \\ &= - \sum_i \dot{C}_i \Omega^{k_i} + \sum_{i,j} k_i C_i C_j \Omega^{k_i+k_j-1} + \ddot{\Omega}'_{\text{decay}}. \end{aligned} \quad (9)$$

将 (9) 代入 n 的定义，得到

$$n(t) = \frac{\sum_{i,j} k_i C_i C_j \Omega^{k_i+k_j-1} - \sum_i \dot{C}_i \Omega^{k_i+1} + \Omega(\ddot{\Omega}'_{\text{decay}} - \dot{\Omega}_{\text{decay}} \cdot \frac{\ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}})}{\left(\sum_i C_i \Omega^{k_i} \right)^2 + 2 \left(\sum_i C_i \Omega^{k_i} \right) \dot{\Omega}_{\text{decay}} + (\dot{\Omega}_{\text{decay}})^2}. \quad (10)$$

在实际应用中，我们采用以下两个近似：

- (A) 慢变系数近似：r 模振幅 α 和星风效率 η_{wind} 的变化时标远大于自转减慢时标，因此 $\dot{C}_i \simeq 0$ 。但对于磁场衰减显著的源， $\dot{C}_3/C_3 \simeq 2\dot{B}_d/B_d$ 可能不可忽略，这时需要保留 $\dot{C}_i$ 项作为修正（参见§2.3）。
- (B) 非幂律项为次主导：在年轻磁星中， $\dot{\Omega}_{\text{decay}}$ 相对于幂律部分较小，可以先忽略再以扰动方式处理。

在这两个近似下，式 (10) 简化为

$$n(t) \approx \frac{\sum_i k_i C_i(t) \Omega^{k_i}}{\sum_i C_i(t) \Omega^{k_i}} \equiv \sum_i k_i f_i(t), \quad f_i(t) \equiv \frac{C_i(t) \Omega^{k_i}}{\sum_j C_j(t) \Omega^{k_j}} \quad (11)$$

方程 (11) 有清晰的物理意义：当各通道的力矩系数 C_i 随时间变化足够缓慢时，瞬时制动指数近似等于各通道特征指数 k_i 以它们各自的瞬时力矩分数 $f_i(t)$ 为权重的加权平均。其中 $f_i(t)$ 衡量了第 i 个通道在当前时刻对总自转减慢的贡献比例。

与以往工作不同的是，此前对磁星制动指数的多通道分析通常依赖于具体的参数拟合（比如假设特定的磁倾角演化规律或磁场衰减时标），而本文直接从加权平均形式出发，把问题转化成一个线性约束问题。这种方法的好处是不依赖模型细节，只需要知道各通道的特征指数 k_i 就可以建立 $\langle n \rangle$ 与平均扭矩分数 $\bar{f}_i$ 之间的解析关系。据我们所知，将加权平均形式与超新星遗迹年龄反推的等效平均制动指数结合起来约束 r 模扭矩分数，此前还没有在文献中出现过，这也是本工作的主要创新点。

然而，(11) 给出的是瞬时制动指数，而对于磁星，我们能够得到的并不是瞬时值，而是由超新星遗迹年龄反推的等效平均制动指数 $\langle n \rangle$ 。因此，我们需要建立 $\langle n \rangle$ 与各通道平均扭矩分数 $\bar{f}_i$ 之间的联系。在忽略力矩系数时间变化的零级近似下，平均制动指数与平均扭矩分数满足

$$\langle n \rangle \approx \sum_i k_i \bar{f}_i, \quad \bar{f}_i \equiv \frac{\int C_i(t) \Omega^{k_i} dt}{\sum_j \int C_j(t) \Omega^{k_j} dt}. \quad (12)$$

特别地，对于我们的四通道模型 ($k_1 = 1, k_3 = 3, k_5 = 5, k_7 = 7$)，将各特征指数代入式 (12) 并展开求和，得到

$$\langle n \rangle \approx 1 \cdot \bar{f}_1 + 3 \cdot \bar{f}_3 + 5 \cdot \bar{f}_5 + 7 \cdot \bar{f}_7. \quad (13)$$

同时，归一化条件 $\sum_i \bar{f}_i = 1$ 保证了各通道贡献之和为总扭矩。为了突出各通道相对于磁偶极辐射 ($k = 3$) 的偏离，我们从式 (13) 两边同时减去 3 倍的归一化条件：

$$\langle n \rangle - 3 \approx (1 - 3)\bar{f}_1 + (3 - 3)\bar{f}_3 + (5 - 3)\bar{f}_5 + (7 - 3)\bar{f}_7, \quad (14)$$

化简即得

$$\langle n \rangle - 3 \approx -2\bar{f}_1 + 2\bar{f}_5 + 4\bar{f}_7, \quad \bar{f}_1 + \bar{f}_3 + \bar{f}_5 + \bar{f}_7 = 1, \quad \bar{f}_i \geq 0. \quad (15)$$

式 (17) 具有清晰的物理含义：以磁偶极辐射 ($k = 3$) 为基准，粒子星风 ($k = 1$) 使 $\langle n \rangle$ 降低 $2\bar{f}_1$ ，质量四极引力波 ($k = 5$) 使 $\langle n \rangle$ 升高 $2\bar{f}_5$ ，而 r 模引力波 ($k = 7$) 使 $\langle n \rangle$ 升高 $4\bar{f}_7$ 。这是一个线性约束条

件，它将 $\langle n \rangle$ 的观测值与各通道的贡献份额联系起来。基于这个关系，我们将在下一章中，利用 Gao et al. [35] 给出的 8 颗磁星的 $\langle n \rangle$ 观测值，对 r 模扭矩分数 $\bar{f}_r$ 的上下界进行系统约束。

需要注意的是，本工作将 r 模贡献视为 CFS 不稳定（一种导致 r 模振幅增长的不稳定性）被触发后，在饱和平台近似下的长期平均扭矩份额。如果磁星环境中的 r 模主要是瞬态被动激发的，而不是持续饱和和自转减慢，那么它的时间平均力矩分数可能会更小。本章给出的上界应理解为允许范围的保守上限，并不强制 r 模必须占据显著的扭矩份额。

3 从平均制动指数到 r 模扭矩分数界限

3.1 平均制动指数与平均扭矩分数的关系

在第 2.4 节中，我们推导了瞬时制动指数 $n(t)$ 的加权平均形式（式 (11)）。对于磁星，瞬时制动指数 $n(t)$ 无法直接测量，其根本原因不仅在于自转计时噪声和爆发活动的干扰，更在于磁星高度不规则的自转行为。

首先，磁星频发 glitch 与反 glitch，会在自转频率 ν 及其一阶导数 $\dot{\nu}$ 上叠加短时标突变。以频繁 glitch 的 PSR J0537–6910 为例：Ho et al. (2022) 利用中子星内部成分探测器（NICER）对 PSR J0537–6910 进行了 4.5 年的监测，共探测到 15 次 glitch [62]，平均 glitch 率约 3.5 yr^{-1} ；其长期有效制动指数 $n = \nu\ddot{\nu}/\dot{\nu}^2 = -1.234 \pm 0.009$ ，表现为负指数，而两次 glitch 间的瞬时制动指数 n_{ig} 在 glitch 后约 100 天逐渐趋近 $\lesssim 7$ ，其主导项来自星体内部超流扭矩而非外转矩本身 [62]。Gügercinoglu et al. (2026) 进一步对这颗“big glitcher”的系统分析表明，频繁 glitch 恢复使得任何单次 $\dot{\nu}$ 测量都不足以代表长期演化，必须用恢复函数重构 [63]。

其次，磁层不稳定性引入准随机的计时漂移，且磁星活跃期与非活跃期的力矩成分可能存在系统性差异（如磁倾角的演化会改变磁偶极与星风的功率分配 [37]），单一时刻的瞬时值不足以代表整个演化阶段。Jodrell Bank 对 35 颗大 glitch 脉冲星（ $\Delta\nu/\nu \geq 10^{-6}$ ）的贝叶斯恢复分析表明，glitch 永久偏移量 $\Delta\dot{\nu}_p$ 与 interglitch $|\dot{\nu}|$ 呈强相关，且对年轻脉冲星（ $\lesssim 10^4 \text{ yr}$ ）外转矩（如磁偶极辐射）可能主导观测到的 $\dot{\nu}$ ，使其呈现 $n \sim 3$ [71]。这意味着对磁星而言，interglitch 的 $n_{\text{ig}} > 3$ 恰恰说明内部扭矩主导自转演化，而外转矩（星风、磁偶极、引力波）的份额需通过平均方法反推。

此外， $\langle n \rangle$ 自身由超新星遗迹年龄反推，其误差直接受 t_{SNR} 不确定度传播影响，这也是 $\langle n \rangle$ 不如瞬时 $n(t)$ 精确的另一面。综上，实际可观测的是由 SNR 年龄反推的等效平均制动指数 $\langle n \rangle$ ，它反映自转减

慢历史的整体效应，而非瞬时行为。普通脉冲星射电发射本身亦呈现出周期性模式变换^[64]、亮脉冲^[65]、子脉冲漂移^[66]、消零及间歇发射^[68,69]等复杂变化，进一步凸显了利用超新星遗迹年龄反推等效平均制动指数 $\langle n \rangle$ 的必要性。

在忽略力矩系数缓慢演化（ $\dot{C}_i \approx 0$ ）的零级近似下——磁星演化早期 $t \ll \tau_B$ （ τ_B 为磁场衰减时标），自转减慢时标（ $\sim 10^3 - 10^4$ yr）远短于磁场衰减时标（ $\sim 10^5$ yr）——平均制动指数退化为平均扭矩分数的加权和（参见式 (12) 和 (13)）：

$$\langle n \rangle \approx \sum_i k_i \bar{f}_i, \quad \bar{f}_i = \frac{\langle C_i \Omega^{k_i} \rangle}{\langle \sum_j C_j \Omega^{k_j} \rangle}, \quad (16)$$

其中指标集 $\{i\} = \{1, 3, 5, 7\}$ 分别对应星风、磁偶极辐射、质量四极引力波和 r 模引力波四个制动通道。式 (16) 构成将电磁观测转化为引力波约束的基础。

3.2 线性规划（LP）问题表述：从 $\langle n \rangle$ 到 $\bar{f}_7$ 的约束

式 (16) 与归一化条件 $\sum_i \bar{f}_i = 1$ 、非负性 $\bar{f}_i \geq 0$ 共同构成一个四维单纯形上的线性规划问题：在给定的 $\langle n \rangle$ 下，求 $\bar{f}_7$ 的极值。由于目标函数和全部约束均为线性，根据线性规划基本定理，极值必出现在单纯形的边界（顶点）上，可解析求解，无需数值优化器。

还需引入物理可容许性条件：粒子星风、磁偶极辐射和磁致形变（质量四极）三个通道始终存在，故设最小份额下限： $\bar{f}_1 \geq \delta$, $\bar{f}_3 \geq \varepsilon$, $\bar{f}_5 \geq \gamma$, γ 表示质量四极扭矩份额下限。约束条件为：

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 + \bar{f}_3 + \bar{f}_5 + \bar{f}_7 &= 1, \\ 1 \cdot \bar{f}_1 + 3 \cdot \bar{f}_3 + 5 \cdot \bar{f}_5 + 7 \cdot \bar{f}_7 &= \langle n \rangle, \\ \bar{f}_1 &\geq \delta, \quad \bar{f}_3 \geq \varepsilon, \quad \bar{f}_5 \geq \gamma, \quad \bar{f}_7 \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

3.3 LP 解析解：r 模扭矩分数的上下界

下界 $\bar{f}_{7,\min}$ ：为使 $\bar{f}_7$ 最小，应让非 r 模通道尽可能多地分担 $\langle n \rangle$ 的权重。由于 $k=5$ 指数最高，最优策略是令 $\bar{f}_1 = \bar{f}_3 = 0$, $\bar{f}_5 = 1 - \bar{f}_7$ ，代入式 (16) 得：

$$\langle n \rangle = 5(1 - \bar{f}_7) + 7\bar{f}_7 \implies \bar{f}_7 = \frac{\langle n \rangle - 5}{2}. \quad (18)$$

考虑非负性，第一下界为：

$$\bar{f}_{7,\min}^{(1)} = \max\left(0, \frac{\langle n \rangle - 5}{2}\right). \quad (19)$$

若磁致形变极小 ($\epsilon_B < 10^{-6}$), $k = 5$ 通道被抑制, 则次优策略为令 $\bar{f}_1 = \bar{f}_5 = 0$, $\bar{f}_3 = 1 - \bar{f}_7$, 得:

$$\bar{f}_{7,\min}^{(2)} = \max\left(0, \frac{\langle n \rangle - 3}{4}\right). \quad (20)$$

保守下界取 $\bar{f}_{7,\min} = \max(\bar{f}_{7,\min}^{(1)}, \bar{f}_{7,\min}^{(2)})$ 。

上界 $\bar{f}_{7,\max}$: 为使 $\bar{f}_7$ 最大, 应取非 r 模通道的下限: $\bar{f}_1 = \delta$, $\bar{f}_3 = \varepsilon$, $\bar{f}_5 = \gamma$ 。代入式 (16) 得:

$$\langle n \rangle = \delta + 3\varepsilon + 5\gamma + 7\bar{f}_{7,\max}, \quad (21)$$

解得:

$$\bar{f}_{7,\max} = \frac{\langle n \rangle - (\delta + 3\varepsilon + 5\gamma)}{7}. \quad (22)$$

若分子为负, 则 $\bar{f}_{7,\max} = 0$ 。

作为基准情景, 取 $\delta = \varepsilon = \gamma = 0.02$ (对应归一化上限 $1 - 0.06 = 0.94$)。该取值基于保守估计: 磁偶极贡献至少 2% (典型磁星自旋减速主要由磁偶极辐射驱动 [51]); 星风贡献至少 2% (宁静期粒子星风质量损失率不为零 [39]); 磁致形变贡献至少 2% (典型 $\epsilon_B \sim 10^{-5}$ 时 $\gamma \gtrsim 0.02$ [44])。未来观测可进一步约束这些参数, 更新界限。

3.4 各制动通道的多波段观测验证

上述 LP 框架将 $\langle n \rangle$ 分解为四个通道的贡献, 但 $\bar{f}_i$ 本身并非直接可观测量。为检验 LP 结果的合理性, 本节借助多波段观测对各通道的独立约束进行交叉验证。

- **粒子星风 ($k = 1$):** 星风功率可通过脉冲星风云 (PWN) 的非热能谱与形态、以及费米/GBM 对磁星巨耀发和未触发短暴的系统性搜寻加以约束。Trigg et al. (2025) 对 GRB 231115A (定位于 M82 星暴星系的候选河外磁星巨耀发) 的费米/GBM 分析揭示了快速谱演化和光度—硬度相关性, 为星风驱动的相对论性外流提供了证据 [72]。此外, GRB 230307A 中探测到的 909 Hz 准周期振荡被解读为新生毫秒磁星的“心跳”信号, 为星风+磁偶极联合制动提供了时域证据 [73]。宁静期星风下限 δ 亦可经由长期计时提取 (参见第 3.3 节取 $\delta = 0.02$ 的合理性)。
- **磁偶极辐射 ($k = 3$):** 表面偶极场可由 $P\dot{P}$ 推断, 而 X 射线成像偏振探测器 (IXPE) 近三年对磁星的 X 射线偏振测量为磁层几何与星风/偶极相对贡献提供了新探针。Turolla et al. (2023) 对 SGR 1806–20 的 IXPE+XMM-Newton 联合观测发现, 该源处于历史最低稳态流量 (比常值低约 3 倍),

全波段 2–8 keV 偏振仅 5.7%（低于 MDP_{99} ），但 4–5 keV 窄能段内 $\text{PD} = 31.6\% \pm 10.5\%$ 、 $\text{PA} \approx -18^\circ$ ，支持冷凝表面热辐射经磁层共振康普顿散射（RCS）再处理的图景^[74]。尤其值得关注的是，本文讨论的 $\langle n \rangle \gg 7$ 的两颗源——1E 2259+586 和 1E 1841–045——恰为 IXPE 近年重点观测对象：Heyl et al. (2024) 对 1E 2259+586 的 IXPE+NICER+XMM 联合分析测得相位积分 $\text{PD} = 5.6\% \pm 1.4\%$ ，而除次级峰（Little Peak）外其余相位偏振度均 $\gtrsim 20\%$ ，在主极小（Big Dip）处最强，偏振角符合旋转矢量模型（RVM）并在 Big Dip 与其余相位间发生模式切换，从而证实该源表面磁场 $> 10^{15}$ G^[75]；Rigoselli et al. (2025) 对 1E 1841–045 的 IXPE 观测则发现爆发期偏振度高达 55% 以上^[76]。这些 IXPE 偏振数据可直接用于检验“磁场衰减主导”的解读：1E 2259+586 的由自转减慢推断的偶极磁场仅 $\sim 6 \times 10^{13}$ G，但偏振证实其表面存在小尺度 $10^{14} - 10^{15}$ G 强场结构，说明低场磁星的真实磁场可能被低估，其高 $\langle n \rangle$ 未必全由外转矩解释。

- **质量四极引力波（ $k = 5$ ）**：磁致形变产生的连续引力波频率为 2ν ，是 LIGO-Virgo-KAGRA O4a 已知脉冲星定向搜索的目标^[77]。O4a 全天长时标暂现波搜索也将磁星非轴对称形变列为源类之一，灵敏度较 O3 提升约 30%^[77]。目前对磁星形变上限已可约束 $\epsilon_B \lesssim 10^{-4}$ 量级，未来第三代探测器（爱因斯坦望远镜、宇宙探险家）将进一步提高灵敏度。
- **r 模引力波（ $k = 7$ ）**：r 模不稳定性信号频率约 $4\nu/3$ ，同属 LIGO-Virgo-KAGRA 连续波管道覆盖范围^[77]。对超新星遗迹内年轻中子星的 r 模引力波上限已被用于限制振幅 α ；此外 r 模加热可能导致磁星热辐射异常增强，X 射线热谱可间接约束^[20]。

综合多波段观测，可对 LP 输出的 $\bar{f}_7$ 区间做交叉检验：若某源 $\bar{f}_{7,\text{max}}$ 较高（如 SGR 0501+4516 得 0.89），但引力波定向搜索未探测到对应信号，则说明 r 模未达饱和，实际 $\bar{f}_7$ 应取下限附近；反之若 $\bar{f}_{7,\text{min}} > 0$ （如同一源得 0.65）而 IXPE/费米均未显示磁偶极或星风可独力解释 $\langle n \rangle$ ，则 r 模参与的必要性较强。五百米口径球面射电望远镜（FAST）等大型射电望远镜对长周期脉冲星的观测揭示了消零与亮脉冲并存的辐射多样性^[67]，而 Xin et al.^[70] 发展的相控阵馈源技术为更高灵敏度的单脉冲统计提供了技术储备。

3.5 LP 结果汇总：八颗磁星样本的 $\bar{f}_7$ 区间

基于 Gao et al.^[35] 的 8 颗磁星 $\langle n \rangle$ 观测值（表 3），取 $\delta = \varepsilon = \gamma = 0.02$ ，得 LP 解析解（表 2）。注意：对于 $\langle n \rangle > 7$ 的源（1E 1841–045 和 1E 2259+586），四通道 LP 框架不适用——因为四个幂律通道的加权平均不可能超过 $k = 7$ 。这些源的异常高 $\langle n \rangle$ 来源于磁场衰减（非幂律效应），而非 r 模引力波辐射。

因此在这些源中， r 模的扭矩分数 $\bar{f}_7$ 应视为 0，其自转减慢主要由磁场衰减主导。近年来，类似的分析方法已被应用于其他中子星群体^[37,78]，并考虑了更复杂的力矩成分（如吸积、磁层演化），但本文聚焦于磁星这一特定子类。

表 2 八颗与SNR成协磁星的等效平均制动指数 $\langle n \rangle$ 及其导出的 r 模扭矩分数 $\bar{f}_7$ 上下界（取 $\delta = \varepsilon = \gamma = 0.02$ ）

Table 2. Sample of eight magnetars with associated SNRs: mean braking indices $\langle n \rangle$ and derived bounds on the r -mode torque fraction $\bar{f}_7$ (with $\delta = \varepsilon = \gamma = 0.02$)

源名	关联SNR	$\langle n \rangle$	$\bar{f}_{7,\min}$	$\bar{f}_{7,\max}$
1E 1841–045	Kes 73	13 ± 4	—	—
SGR 0526–66	N49	2.40 ± 0.04	0	0.26
SGR 1627–41	G337.0–0.1	1.87 ± 0.18	0	0.18
SGR 0501+4516	HB9	6.3 ± 1.7	0.65	0.89
PSR J1622–4950	G333.9+0.1	> 2.35	0	$> 0.29^a$
1E 2259+586	CTB 109	32 ± 10	—	—
CXOU J1714–3810	CTB 37B	2.1 ± 0.9	0	0.21
Swift J1834.9–0846	W41	1.08 ± 0.04	0	0.03

注释： $\bar{f}_{7,\min}$ 和 $\bar{f}_{7,\max}$ 分别为 r 模扭矩分数的最小/最大可能值。 $\langle n \rangle \leq 5$ 时 $\bar{f}_{7,\min} = 0$ ，意味着 r 模并非必需； $\langle n \rangle > 5$ 时 $\bar{f}_{7,\min} > 0$ 表明 r 模必须贡献一定份额。 $\bar{f}_{7,\max}$ 受归一化条件与 $\delta, \varepsilon, \gamma$ 共同限制，表中 $\bar{f}_{7,\max}$ 上限取为 $1 - \delta - \varepsilon - \gamma = 0.94$ ；表中数值由式 (19)–(22) 计算。对于 1E 1841–045 和 1E 2259+586，其 $\langle n \rangle$ 远超 7，表明等效指数由磁场衰减主导，LP 问题在该框架下不适用， $\bar{f}_7$ 物理上应 ≈ 0 ，故表中对应位置记为“—”。后者（1E 2259+586）的 IXPE 偏振证实其表面存在小尺度 10^{15} G 强场结构，说明高 $\langle n \rangle$ 部分源于被低估的真实磁场。 a 取 $\langle n \rangle_{\min} = 2.35$ 得 $\bar{f}_{7,\max} > 0.29$ 。

3.6 参数敏感性分析：最小贡献参数的影响

式 (22) 中 $\delta, \varepsilon, \gamma$ 的取值影响 $\bar{f}_{7,\max}$ 。图 1 展示了三种情景下 $\bar{f}_{7,\max}$ 随 $\langle n \rangle$ 的变化关系：保守下限（ $\delta = 0.01, \gamma = 0.01$ ）、基准（ $\delta = \varepsilon = \gamma = 0.02$ ）、激进下限（ $\delta = \varepsilon = 0.1$ ）。灰色区域表示各参数在

表 3 八颗与SNR成协磁星的基本参数与等效平均制动指数 $\langle n \rangle$ (数据源自 Gao et al. 2016)

Table 3. Sample of eight magnetars with associated SNRs: spin parameters, SNR ages, and mean braking indices (data from Gao et al. 2016)

源名	关联SNR	P (s)	$\dot{P}$ ($10^{-11} \text{ s s}^{-1}$)	t_{SNR} (kyr)	$\langle n \rangle$
1E 1841–045	Kes 73	11.7890(1)	4.092(15)	0.75 ± 0.25	13 ± 4
SGR 0526–66	N49	8.0544(2)	3.8(1)	4.8 (fixed)	2.40 ± 0.04
SGR 1627–41	G337.0–0.1	2.594578(6)	1.9(4)	5.0 (fixed)	1.87 ± 0.18
SGR 0501+4516	HB9	5.7620970(1)	0.594(2)	$5.85^{+1.85}_{-4.0}$	6.3 ± 1.7
PSR J1622–4950	G333.9+0.1	4.3261(1)	1.7(1)	< 6.0	$> 2.35^a$
1E 2259+586	CTB 109	6.9790427(1)	0.04837(6)	15 ± 5	32 ± 10
CXOU J1714–3810	CTB 37B	3.82535(4)	6.40(5)	1.75 ± 1.4	2.1 ± 0.9
Swift J1834.9–0846	W41	2.482302(1)	0.796(12)	130 ± 70	1.08 ± 0.04

^aPSR J1622–4950 的 $\langle n \rangle$ 为下极限 (因 t_{SNR} 仅为上限 $< 6.0 \text{ kyr}$)，正文中凡涉及数值计算可取保守下限 $\langle n \rangle_{\text{min}} = 2.35$ 。

$\langle n \rangle$ 由 $\langle n \rangle \simeq 1 + P/(\dot{P} t_{\text{SNR}})$ 给出，数据与误差直接取自 Gao et al. (2016) 的 Table 2 & Table 4； $\langle n \rangle$ 误差由 t_{SNR} 误差传播得到。

[0.01, 0.15] 独立变化时的波动范围。

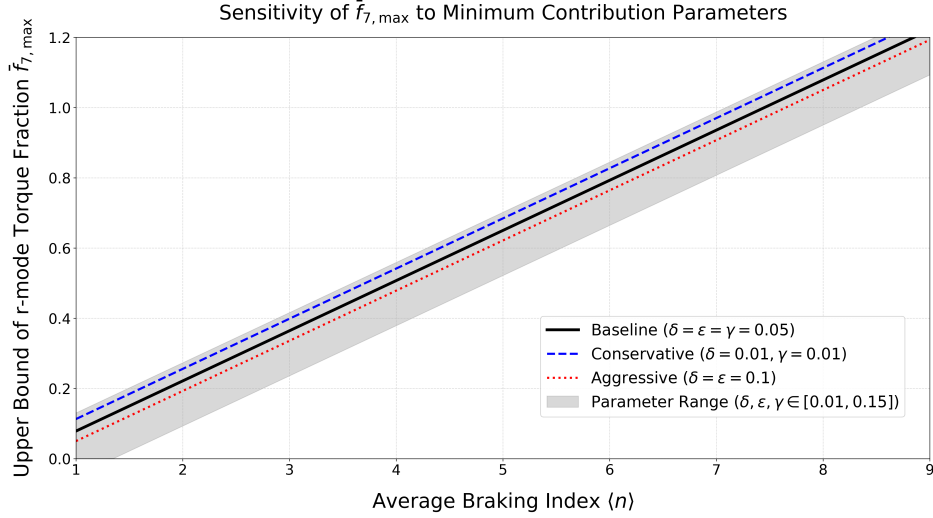


图 1 最小贡献参数对 $\bar{f}_{7,\max}$ 的敏感性。黑色实线：基准情景 ($\delta = \varepsilon = \gamma = 0.02$)；蓝色虚线：保守下限 ($\delta = 0.01, \gamma = 0.01$)；红色点线：激进下限 ($\delta = \varepsilon = 0.1$)。灰色阴影： $\delta, \varepsilon, \gamma$ 在 $[0.01, 0.15]$ 独立变化时的波动范围。

Fig. 1. Sensitivity of $\bar{f}_{7,\max}$ to the minimum contribution parameters. Black solid: baseline ($\delta = \varepsilon = \gamma = 0.02$); blue dashed: conservative lower bound ($\delta = 0.01, \gamma = 0.01$); red dotted: aggressive lower bound ($\delta = \varepsilon = 0.1$). Gray shaded: fluctuation range when $\delta, \varepsilon, \gamma$ vary independently within $[0.01, 0.15]$.

可见， $\bar{f}_{7,\max}$ 的数值范围 (10^{-1} 至 1) 保持相对稳定，高 $\langle n \rangle$ 源需要 r 模贡献、低 $\langle n \rangle$ 源排除强 r 模贡献的结论是参数稳健的。由图 1 灰色区域可见，参数不确定性引入的相对误差约 20%–30%，故 $\bar{f}_{7,\max}$ 应视为估计值而非精确值。

3.7 特殊情况讨论

对于 $\langle n \rangle > 7$ 的源 (1E 1841–045 和 1E 2259+586)，四通道 LP 框架不适用。其异常高的 $\langle n \rangle$ 主要源于磁场衰减，而非 r 模引力波。因此，这些源的 $\bar{f}_7$ 物理上应视为 0。在应用本框架前，应先扣除磁场衰减修正。

值得注意的是，1E 2259+586 的 IXPE 偏振观测为这一解读提供了独立佐证：该源自转减速推得的偶极场仅 $\sim 6 \times 10^{13}$ G，但 Heyl et al. (2024) 的偏振分析证实其表面存在小尺度 $10^{14} - 10^{15}$ G 的强场结构（质子回旋共振散射特征）^[75]，说明低场磁星的真实磁场可能被低估。这一发现提示，部分高 $\langle n \rangle$ 磁星的等效指数未必全由外转矩（含 r 模）解释，磁场衰减与未计入的小尺度强场结构可能共同贡献。这进

一步支持了将此类源排除在四通道 LP 框架之外的处理。

4 引力波应变与可探测性

基于第 3 节建立的扭矩分数界限，我们可以进一步估算磁星可能产生的引力波应变。对磁星而言，引力波辐射主要源于两类偏离球对称的机制：(i) 由内部磁场压力造成的固定形变（磁致椭率 ϵ_B ），主要辐射质量四极引力波；(ii) 转动流体中激发的 r 模（罗斯贝模），主要辐射电流四极引力波。下面依次给出这两类辐射的特征应变、参数取值依据，以及如何利用扭矩分数 $\bar{f}_7$ 反推 r 模振幅，最后讨论其可探测性。

4.1 磁致椭率 ϵ_B 与质量四极应变 h_0^{quad}

中子星内部的磁场（特别是环绕磁轴的分量 B_t ）会改变星体内部的受力情况，使得等密度面发生椭圆形偏差，用 $\epsilon_B = (I_{xx} - I_{yy})/I$ 表示 [79,80]。理论计算给出的典型大小为

$$|\epsilon_B| \sim 10^{-7} - 10^{-5} \left(\frac{B}{10^{14} - 10^{15} \text{ G}} \right)^2, \quad (23)$$

正负号分别表示扁椭球（南瓜状）或长椭球（橄榄状），具体取决于磁场位形（环向场主导时为负）[79]。

对于以频率 $\nu = \Omega/(2\pi)$ 旋转的中子星，引力波频率为 $f_{\text{GW}} = 2\nu$ 。根据 Thorne (1980) 的四极公式，其平均特征应变幅为 [79,81]：

$$h_0^{\text{quad}} = \frac{16\pi^2 G}{c^4} \frac{I |\epsilon_B| f_{\text{GW}}^2}{d} \sin^2 \theta. \quad (24)$$

为保守估计，取倾角因子 $\sin^2 \theta \sim 1$ （最有利探测方向）。关于中子星半径，本文采用 $R = 12 \text{ km}$ ，理由如下：对于典型质量 $M = 1.4 M_\odot$ ，多种物态方程（APR、BSk21、SLy4）给出的半径均在 $11.5 - 13.0 \text{ km}$ 范围内， $R = 12 \text{ km}$ 是该范围的中间值，也是引力波文献中最常用的取值之一。若改用 $R = 10 \text{ km}$ （对应极硬的物态），转动惯量 I 将缩小约 30%，应变 h_0^{quad} 会相应降低约 30%，但这不影响本文的定性结论——磁星引力波仍远低于探测器灵敏度。其他参数： $I = 1.3 \times 10^{45} \text{ g cm}^2$ ， $M = 1.4 M_\odot$ ， $d = 10 \text{ kpc}$ ， $|\epsilon_B| = 10^{-6}$ （中等磁致形变）。对应应变大小约为 $h_0^{\text{quad}} \simeq 7.1 \times 10^{-27} (|\epsilon_B|/10^{-6}) (P/1 \text{ s})^{-2} (d/10 \text{ kpc})^{-1}$ 。对于典型磁星 $P \sim 2 - 12 \text{ s}$ ，有 $f_{\text{GW}} \sim 0.17 - 1 \text{ Hz}$ ，因此 $h_0^{\text{quad}} \sim 10^{-26} - 10^{-24}$ 量级，落在低频亚赫兹波段，远低于当前地面探测器的灵敏度。

值得注意的是，上述分析基于典型的孤立磁星（ $M \approx 1.4 M_\odot$ ）。如果磁星由双中子星并合产生，质量可达 $M_{\text{mg}} \approx 2.47 M_\odot$ ，其半径和转动惯量强烈依赖于物态方程（EOS）[49]。对于这类大质量磁星，若

初始自转接近开普勒极限，引力波频率可从几百赫兹延伸至几千赫兹，但会在临界频率 v_{coll} 处因物态方程决定的塌缩而突然截止（例如 BSk21 给出 $v_{\text{coll}} \approx 2453 \text{ Hz}$ ）^[49]。该截止特征在观测中会红移至约 100–350 Hz，可作为区分物态方程的标志^[48]。

4.2 r 模（电流四极）应变 $h_0^{\text{r-mode}}$

r 模是由科里奥利力维持的全局振荡模式，在牛顿近似下，图案频率为 $\omega_r \simeq \frac{4}{3}\Omega$ ，主要引力辐射来自随时间变化的电流四极矩。应变幅沿用 Owen et al.^[18] 的标准形式。为了便于读者跟踪推导，我们从四极矩公式出发逐步展开。引力波应变的一般表达式为：

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 d} \ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{\text{TT}}, \quad (25)$$

其中 $\mathcal{I}_{ij}$ 是质量四极矩，TT 表示横迹无迹投影。对于 r 模，有效质量四极矩来自电流四极诱导的速度场，其 $l = m = 2$ 分量可写作：

$$\mathcal{I}_{22}^{(\text{eff})} = \alpha I R^2 \tilde{Q}^{1/2} e^{-i\omega t}, \quad (26)$$

其中 $\tilde{Q} = \tilde{J}^2 / \tilde{I}$ 是归一化结构因子， $\tilde{I} = I / (MR^2)$ ， $\tilde{J} = \int_0^R \rho r^6 dr / (MR^4)$ 。代入应变公式并取振幅，得到：

$$h_0^{\text{r-mode}} = \sqrt{\frac{5G}{2c^3}} \frac{I |\alpha| \Omega^3}{d} \mathcal{F}(\theta, \phi), \quad (27)$$

其中 $\mathcal{F}$ 为取向投影因子（ $\mathcal{F} \sim \mathcal{O}(1)$ ），下文取最有利情况 $\mathcal{F} \simeq 1$ 。r 模能否在磁星中达到可观的引力波扭矩，完全由饱和振幅 $|\alpha|$ 的上限决定。早期文献曾乐观地取 $\alpha \sim \mathcal{O}(1)$ ，但此后大量工作表明非线性流体力学效应会将其严格压低：Lin & Suen^[19] 证明当 α 趋近 $\sim 10^{-2}$ 时，共振三模耦合会将能量快速转移到次级模式，形成饱和平台，实际上限约为 $\alpha \lesssim 10^{-2}$ ；Alford, Mahmoodifar & Schwenzer^[55] 在纳入高温体粘滞给出饱和窗口 $\alpha_{\text{sat}} \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ ，且对微观参数不敏感；与此同时，Zhu, Fan & Zhu^[47] 从宇宙随机引力波背景角度反推：若典型 α 真达到 10^{-2} 量级，则背景能量密度峰值应在 $\sim 10^{-8}$ 附近，但 aLIGO 与 ET 均未见到此类信号，实际约束低至少四个量级（ $\Omega_{\text{GW}} \lesssim 10^{-12}$ ），意味着物理上合理的 α 很可能远小于 10^{-2} ，甚至更接近 $10^{-4} - 10^{-5}$ 的工作区间。综合上述多重约束，本文数值示例中以保守代表值 $\alpha \sim 10^{-5}$ 为基准，并允许 $\alpha \in [10^{-6}, 10^{-2}]$ 扫描。

对于稳态、周期性的源，引力波光度可由四极辐射公式给出（Thorne 1980；亦见 Owen et al.^[18,81]）：

$$L_{\text{GW}}^{\text{r-mode}} = \frac{G}{c^5} \left\langle |\ddot{\mathcal{I}}_{ij}^{(\text{eff})}|^2 \right\rangle, \quad (28)$$

其中, $\mathcal{I}_{ij}^{(\text{eff})}$ 为 r 模激发的 $l = m = 2$ 辐射分量。代入标准 r 模速度场 $\delta \mathbf{v} \propto \alpha \Omega R (r/R)^l \dots$, 可得有效四极矩尺度为 $\mathcal{I}^{(\text{eff})} \sim \alpha I R^2$ 。因此, 引力波光度正比于

$$L_{\text{GW}}^{\text{r-mode}} \propto \frac{G}{c^5} I^2 \alpha^2 \Omega^8, \quad (29)$$

其中隐含了与物态方程 (EOS) 及内部结构相关的积分因子。对 $(l, m) = (2, 2)$ r 模完成角向积分后, 得到紧凑且广泛使用的最终形式:

$$L_{\text{GW}}^{\text{r-mode}} = \frac{2G}{5c^5} I^2 \alpha^2 \Omega^8 \left(\frac{4}{3}\right)^2 \tilde{\mathcal{Q}}, \quad \tilde{\mathcal{Q}} \equiv \frac{\tilde{J}^2}{\tilde{I}} \sim 0.1, \quad (30)$$

这里 $\tilde{I} \equiv I/(MR^2)$ 和 $\tilde{J} \equiv \int_0^R \rho r^6 dr / (MR^4)$ 是归一化结构因子, 前置因子 $(4/3)^2$ 来源于球谐函数 Y_{22} 的角向积分。式 (30) 即 Owen et al. [18] 引用的标准结果。

该引力波功率通过自转能量损失率 $\dot{E}_{\text{rot}} = I\Omega|\dot{\Omega}|$ 与 r 模在自转减慢中所占份额相关联:

$$L_{\text{GW}}^{\text{r-mode}} = \bar{f}_7 I\Omega|\dot{\Omega}|, \quad \bar{f}_7 \in [0, 1], \quad (31)$$

因此 $\bar{f}_7$ 直接度量了瞬时制动功率中有多少比例由 r 模引力波通道带走。

此外, 即使 CFS 不稳定性未被触发, r 模也可通过吸积流的随机撞击被激发。Dong & Melatos [46] 的最新计算表明, 在吸积毫秒脉冲星中, 这种机制产生的均方根应变约为 $h_{\text{rms}} \sim 10^{-35} (\nu_s/10 \text{ Hz})^2$, 远低于当前探测器的灵敏度, 因此不影响本文对 CFS 驱动通道的结论。

4.3 用扭矩分数 $\bar{f}_7$ 反推 r 模饱和振幅 α

由式 (29) 和 (30) 的等价关系, 可以直接解出

$$\alpha = \left[\frac{\bar{f}_7 I\Omega|\dot{\Omega}| 5c^5}{2GI^2\Omega^8 \left(\frac{4}{3}\right)^2 \tilde{\mathcal{Q}}} \right]^{1/2} = \left[\frac{5c^5}{2GI} \frac{\bar{f}_7 |\dot{\Omega}|}{\Omega^7 \left(\frac{4}{3}\right)^2 \tilde{\mathcal{Q}}} \right]^{1/2}. \quad (32)$$

反过来, 一旦知道了 α , 应变也可以通过式 (28) 估算。对我们所使用的数据, 磁星的自转减慢率 $|\dot{\Omega}| \sim 10^{-12} - 10^{-10} \text{ rad s}^{-2}$, 如果 $\bar{f}_7$ 接近其上界 (大约 0.1 到 1), 式 (31) 给出的 α 通常落在 10^{-6} 到 10^{-4} 之间, 这与 r 模饱和振幅的理论窗口是一致的。但是否真的能达到饱和, 还取决于微观耗散过程 (如体粘滞、剪切粘滞、超流摩擦) 以及磁层耦合的效率 [18]。饱和幅的上限也受到非线性三波耦合 [19] 和体粘滞窗口 [55] 的约束。

4.4 可探测性：信噪比与应变对比

在信号匹配技术的框架下，对于一个已知频率和相位变化规律的引力波源，其信噪比可以用以下常用近似公式计算

$$\text{SNR} \simeq \frac{h_0 \sqrt{T_{\text{obs}}}}{\sqrt{S_n(f_{\text{GW}})}}, \quad (33)$$

其中 $S_n^{1/2}(f)$ 是探测器的噪声幅度谱密度， T_{obs} 是观测时间， h_0 是引力波应变幅。

由于磁星的自转周期较长，其引力波频率 $f_{\text{GW}} = 2/P$ 大多在亚赫兹到几赫兹之间。在这个频段，地面探测器（如 aLIGO、aVirgo、KAGRA）受到地震噪声和重力梯度噪声的严重限制，灵敏度很差。因此，有意义的可探测性讨论需要转向以下几种方案：(i) 下一代地面或地下低温探测器（如爱因斯坦望远镜 ET、宇宙探索者 CE），它们在几赫兹以上的低频端有一定灵敏度；(ii) 太空探测器（如 LISA 的低频段，大约 0.1 到 1 赫兹），可以对磁星引力波给出上限约束；(iii) 脉冲星计时阵，虽然不直接适用于单个正弦波信号，但可以通过统计方法对引力波背景的总强度给出限制。

除了单个磁星的探测，宇宙中所有磁星的累计贡献还可能形成一个在各个方向上均匀分布的随机引力波背景。Yan et al. [48] 最近基于三种典型的磁星形成机制（ $\alpha-\Omega$ 发电机、对流发电机、磁通守恒）计算了新生的磁星产生的随机引力波背景，发现即使在最乐观的情况下，其对爱因斯坦望远镜的信噪比也只有 0.37（ $\alpha-\Omega$ 发电机模型）或更低，远低于通常的探测阈值 2.56。这表明磁星随机引力波背景的探测前景并不乐观，与本文对单个磁星可探测性的不乐观结论是一致的。

还有一种相关但不同的情况，是由 GRB X 射线余辉平台所暗示的新生毫秒磁星（初始自转周期大约 1 到 2 毫秒）。这类磁星的引力波辐射可以由椭球度/形变通道主导，并与平台的电磁信号形成多信使关联 [83]。这类源的主频在几百赫兹，距离上限大约在百兆秒差距量级，与本文关注的稳态磁星（自转周期 2 到 12 秒，引力波频率 0.2 到 1 赫兹）不在同一个频段和探测语境中。

4.5 两类引力波应变随频率的变化关系

前面两节分别介绍了磁星可能发出的两类引力波：一类是由磁致形变（椭球度）产生的质量四极引力波，另一类是由 r 模振荡产生的电流四极引力波。下面我们来看这两类引力波的应变大小如何随频率变化，以及它们与探测器灵敏度的对比。

计算中采用的参数取值如下（这些是典型的中子星参数，取自式 (27)）：转动惯量 $I = 1.3 \times 10^{45} \text{ g cm}^2$ ，距离 $d = 10 \text{ kpc}$ （约 3.3 万光年），磁致形变取中等大小 $|\epsilon_B| = 10^{-6}$ （用于质量四极通道），r 模振幅取

保守估计 $\alpha = 10^{-5}$ （用于 r 模通道），取向因子取最有利于探测的情况 $\sin^2\theta \simeq 1$ 、 $\mathcal{F} \simeq 1$ 。频率范围取 $f_{\text{GW}} = 2\nu \in [1, 10^3] \text{ Hz}$ （对数采样），其中磁星的实际频率范围只有 $f_{\text{GW}} \sim 0.17\text{--}1 \text{ Hz}$ （对应自转周期 $P \sim 2\text{--}12 \text{ 秒}$ ），更高的频率只是为了展示两类引力波的变化规律：质量四极应变与频率的平方成正比（ $h_0^{\text{quad}} \propto f^2$ ），r 模应变与频率的立方成正比（ $h_0^{\text{r-mode}} \propto f^3$ ），以及它们如何与探测器的灵敏度曲线相交。

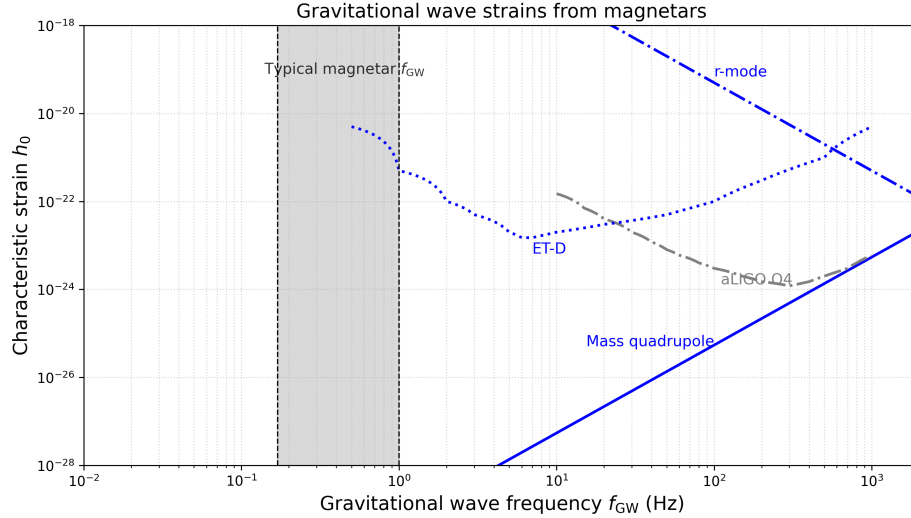


图 2 磁星两类引力波的特征应变随频率的变化关系。实蓝线：质量四极（磁致形变），由式 (24) 计算， $|\epsilon_B| = 10^{-6}$ ；红虚线：r 模，由式 (28) 计算， $\alpha = 10^{-5}$ 。灰粗点划线：aLIGO O4 近似噪声幅度谱密度参考线（仅对 $f \gtrsim 50 \text{ Hz}$ 有效）；紫细点线：ET-D 低频端推测的灵敏度参考线（约 6 Hz）。两条黑色短竖线标记典型磁星的频率范围 $f_{\text{GW}} \simeq 0.17\text{--}1 \text{ Hz}$ 。

Fig. 2. Characteristic strains of the two gravitational-wave emission channels from magnetars as functions of frequency. The solid blue line represents the mass-quadrupole strain due to magnetically induced deformation ($|\epsilon_B| = 10^{-6}$), calculated from Eq. (24). The red dashed line represents the r-mode strain ($\alpha = 10^{-5}$), calculated from Eq. (28). The thick gray dotted line shows the approximate noise amplitude spectral density of aLIGO O4 (only valid for $f \gtrsim 50 \text{ Hz}$). The thin purple dotted line shows the projected sensitivity of the Einstein Telescope (ET-D) at low frequencies. The two vertical black ticks mark the typical magnetar frequency range ($f_{\text{GW}} \simeq 0.17\text{--}1 \text{ Hz}$).

从图 2 中可以直观地解读出三个关键的物理推论。第一，探测难度极大。在磁星真实的低频段（ $f_{\text{GW}} < 1 \text{ Hz}$ ，由两条黑色短竖线标记），无论是质量四极（蓝实线）还是 r 模（红虚线）产生的引力波应变，数值均小于 10^{-25} 。这一数值远低于当前地面探测器（灰粗点划线，aLIGO O4）的最佳灵敏度，甚至也

低于下一代爱因斯坦望远镜（ET-D，紫细点线）在低频端的推测灵敏度（约 $2-3 \times 10^{-26}$ ）。这从图形上直接印证了我们在本节开篇的判断：对于稳态磁星，直接探测其连续引力波信号的前景极为黯淡。第二，频率依赖性的显著差异。图中清晰地展示了两种辐射机制不同的斜率：质量四极应变随频率平方增加（ $h_0^{\text{quad}} \propto f^2$ ），而 r 模应变随频率立方增加（ $h_0^{\text{r-mode}} \propto f^3$ ）。这种差异导致在高频段（例如 $f > 100 \text{ Hz}$ ）r 模的应变幅度会显著高于质量四极辐射。如果在未来的观测中意外发现了来自磁星的引力波信号，这一斜率特征可作为区分辐射机制（是固态形变还是流体振荡）的重要指纹。第三，理论外推的局限性。图中高于 100 Hz 的部分仅用于展示物理规律的变化趋势。实际上，磁星在如此高的频率下不可能维持稳态旋转；剧烈的引力辐射会迅速带走角动量，导致频率快速漂移，简单的稳态估算不再适用。这也提醒我们，图中的高频部分主要用于理论对比，而非实际的观测预测。

如果某颗磁星曾经经历过刚形成时的高温快速旋转阶段（初始自转周期 $P_{\text{birth}} \sim 1-5$ 毫秒，对应引力波频率 $f_{\text{GW}} \sim 400-2000 \text{ Hz}$ ），那么根据式 (24) 和 (28) 的变化规律，应变可以达到 $h_0 \sim 10^{-23}-10^{-21}$ 。但在这种情况下，磁致形变 ϵ_B 、r 模振幅 α 和自转减慢率 $|\dot{\Omega}|$ 之间的相互影响会使简单的稳态估算失效，需要使用更复杂的随时间变化的模型。对于这类快速旋转的新生磁星，其引力波辐射还受到物态方程（EOS）决定的塌缩频率限制：当大质量磁星自转减慢至某一临界频率时，离心力不足以抗衡引力，星体坍缩为黑洞，引力波辐射随之终止。该临界频率由 EOS 唯一决定，不同物态方程模型给出的塌缩频率存在显著差异，例如 BSk21 给出固有频率约 2453 Hz （红移至约 $100-350 \text{ Hz}$ ），而 CDDM2 给出约 868 Hz （红移至约 124 Hz ）^[49]。在伽马射线暴（GRB）X射线余辉观测中，具有随后衰减斜率陡于 t^{-3} 的“内平台”（internal plateau）结构，被解释为磁星坍缩为黑洞的直接观测证据^[82]，该转折时刻即对应塌缩时标 t_{coll} 。对于本文研究的稳态磁星样本（自转周期 $2-12 \text{ s}$ ，引力波频率 $0.17-1 \text{ Hz}$ ），其频率远低于上述塌缩频率范围，故该截止效应不影响本文主结论；但在未来研究新生大质量磁星时需予以特别考虑。

5 总结与展望

5.1 主要结论

本文围绕磁星多通道自转减慢模型与引力波辐射约束，完成了三项相互衔接的工作。

首先，我们修正了利用超新星遗迹年龄反推等效平均制动指数 $\langle n \rangle$ 的计算框架。通过明确引入磁场衰减的修正项 Δn_B 并给出近似计算公式，我们强调了在使用扭矩分数界限公式前扣除该修正的必要性，以避免将磁场衰减效应错误归因于 r 模贡献。这一步骤虽不涉及新的物理原理，但对于确保后续分析结果

（特别是 $\bar{f}_7$ 的定量估计）的可靠性至关重要。

其次，我们建立了从 $\langle n \rangle$ 到 r 模扭矩分数 $\bar{f}_7$ 的上下界约束框架。利用四个通道的特征指数 $\{1, 3, 5, 7\}$ 和总扭矩分数为 1 的约束，推导出了 $\bar{f}_7$ 的明确解析表达式，并引入最小贡献参数 δ, ϵ, γ 以保证物理合理性。该框架的优势在于无需预设 r 模饱和振幅的具体值，可直接应用于现有磁星样本。结合非线性三模耦合、高温体粘滞饱和以及随机引力波背景观测的多重约束，我们进一步确认了推算出的 $\bar{f}_7$ 上界在实际中将更为收紧。

第三，我们量化了磁致形变与 r 模两类引力波通道的应变，并建立了通过 $\bar{f}_7$ 反推 r 模振幅的方法。计算结果表明，典型磁星的自转周期使其引力波频率位于亚赫兹波段，远低于当前及下一代地面探测器的灵敏范围。因此，本文将分析定位为：“虽难以直接探测，但探测上限可提供强物理约束”。通过将参数空间与应变上限结合，可将 α 或 ϵ_B 的取值范围压缩至纯理论估计之下。

第四，针对随机引力波背景的累积上限，我们给出具体的操作路径。设磁星宇宙学形成率为 $\mathcal{R}_{\text{mag}}(z)$ （单位： $\text{Mpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$ ），单颗磁星的应变谱为 $h_c(f; \bar{f}_7, \alpha, \tau_{\text{mode}})$ （详见第4.3节），则随机引力波背景的能量密度谱可由宇宙学积分给出 [85]：

$$\Omega_{\text{GW}}(f) = \frac{2\pi^2 f^3}{3H_0^3} \int_0^\infty dz \frac{\mathcal{R}_{\text{mag}}(z) h_c^2(f(1+z))}{E(z)}, \quad E(z) = \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}, \quad (34)$$

其中 $H_0 = 67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\Omega_m = 0.315$, $\Omega_\Lambda = 0.685$ 。随后，在三个特征频段进行对比以联合约束参数：

- nHz 频段 (10^{-9} – 10^{-7} Hz)：与 NANOGrav 15-yr 随机背景证据 [84] 进行比较；
- mHz 频段 (10^{-4} – 10^{-1} Hz)：与 LISA 预期灵敏度曲线比较；
- 0.1–1 kHz 频段：与 LVK O4a 各向同性随机背景上限 [86] ($\Omega_{\text{ref}}(25 \text{ Hz}) \leq 2.0 \times 10^{-9}$ 对 $\alpha = 2/3$ 幂律模型) 及爱因斯坦望远镜 (ET) 预期灵敏度比较。

通过上述多频段联合拟合，即可对 $\bar{f}_7$ 与 α 施加定量约束。该路径将单颗磁星的应变谱沿宇宙学体积分（式 (34)），将“累积上限”转化为可操作的数值计算，为未来多频段引力波观测（脉冲星计时阵、空间探测器、地面探测器）与电磁观测的协同分析提供了具体框架。本研究构建了一个连接电磁观测与引力波物理的通用框架。

5.2 未来展望

未来的推进方向可以从以下五个具体、可落地的路径展开，每个方向均有近期观测任务或数据处理管道可对接：

1. 利用 **IXPE** 偏振观测约束磁层几何与风/偶极扭矩分数。IXPE 对 1E 2259+586 和 1E 1841-045 的相位分辨偏振已揭示 RVM 模式切换与质子回旋共振散射证据 [75,76]，对 SGR 1806-20 则给出 4-5 keV 窄带 PD $\approx 31.6\%$ [74]。将这些偏振数据与 RVM 拟合结合，可独立估算磁倾角 χ 和磁层等离子体分布，从而约束粒子星风与磁偶极的相对贡献（即 δ 与 ε 的观测下限）。随着 IXPE 对更多磁星的观测积累， δ, ε 的不确定度有望从当前 ~ 0.02 降至 ~ 0.005 ，显著收紧 $\bar{f}_{7,\max}$ 的灰色带（图 1）。
2. 利用 **LVK O4a/O5** 定向连续波搜索上限约束 α 。当前 LVK 对已知脉冲星的连续波定向搜索已覆盖约 200 颗转动供能脉冲星，磁星子类正在纳入 O4a 管道 [77]。若某颗磁星（如 SGR 0501+4516， $\bar{f}_{7,\min} = 0.65$ ）在 O4a 中未被探测到，则可将其 LP 上界 $\bar{f}_{7,\max}$ 与应变上限 h_0^{mode} 结合，通过式 (32) 反推 α 的双重约束（电磁 $\bar{f}_7$ + 引力波非探测）。这一做法的优势在于： α 不再纯靠理论饱和窗口，而是有观测两端的夹逼。
3. 利用 **NICER** 高精度 X 射线计时监测 glitch 恢复，分离内/外扭矩。如第 3.1 节所述，频繁 glitch 使瞬时 $\dot{\nu}$ 难以反映长期演化。Ho et al. [62] 对 PSR J0537-6910 的 NICER 4.5 年监测测得 15 次 glitch，Liu et al. [71] 对 35 颗大 glitch 脉冲星的贝叶斯恢复表明 $\Delta\dot{\nu}_p$ 与 interglitch $|\dot{\nu}|$ 强相关。将此管道移植到磁星（1E 2259+586、SGR 0501+4516 已有 NICER 归档），可重建 glitch 恢复曲线，分离超流内转矩与外转矩（磁偶极+星风+引力波），使 $\bar{f}_i$ 从“平均”走向“准瞬时”。
4. 多频段随机引力波背景联合约束（ μHz - kHz ）。磁星 r 模随机背景的主峰在 $f \sim 0.1-1 \text{ kHz}$ （对应磁星自转），但寿命若延长至 $\gtrsim 10^5 \text{ yr}$ ，nHz 尾巴可延伸至 PTA 频段。具体流程：(i) 给定磁星宇宙学形成率 $\mathcal{R}_{\text{mag}}(z)$ 与单颗谱 $h_c(f; \bar{f}_7, \alpha, \tau_{\text{mode}})$ ；(ii) 卷积 redshift 得 $\Omega_{\text{GW}}(f)$ ；(iii) nHz 端与 NANOGrav 15-yr 上限 [84] 比较；(iv) 0.1-1 kHz 主峰段与 LVK O4a 随机背景上限及 ET 预期比较，联合约束 $\bar{f}_7$ 与 α 。Yan et al. [48] 已给出三种磁星形成机制下的 ET SNR 上限（ $\lesssim 0.37$ ），可作基准。需注意磁星 r 模寿命通常仅 10^3-10^4 yr ，故主权重在 LIGO/ET 段，PTA 为辅证。
5. 双中子星并合大质量磁星的塌缩截止频率——EOS 模板库。如第 4 节所述，并合产物若为大质

量磁星 ($M \sim 2.5 M_{\odot}$), 引力波辐射会在 EOS 决定的 v_{coll} 处突然截止 (BSk21 给 ≈ 2453 Hz, 红移至观测 $\sim 100-350$ Hz) [48,49]。结合短伽马暴余辉平台 (如 GRB 170817A 候选磁星、GRB 231115A/M82), 可为 ET 和 CE 设计针对性模板库。这一方向与多信使天文直接衔接, 一旦探测到截止特征, 可独立限制致密物质 EOS, 与 NICER 的 $M-R$ 约束形成交叉。

综上, 即便单个磁星在亚赫兹频段难以被直接探测, 通过融合电磁观测 (IXPE 偏振、NICER 计时、费米/GBM 星风示踪) 与引力波非探测/随机背景上限 (LVK O4a/O5、ET、PTA), 仍可构建可靠的物理推理链, 将 r 模饱和振幅 α 与磁致椭率 ϵ_B 的取值压缩至纯理论估计以下。上述五个方向均有明确的观测/管道对接, 预计在未来 5-10 年内可取得实质性进展。

致谢

感谢国家重点研发计划 (2022YFC2205202)、新疆维吾尔自治区重大科技专项 (2022A03013-1)、国家自然科学基金 (编号: 12573052) 资助的课题、山西省高等学校科技创新项目 (2021L483)。

参考文献

- [1] Gold T 1968 *Nature* **218** 731.
- [2] Hewish A, Bell S J, Pilkington J D H, Scott P F, Collins R A 1968 *Nature* **217** 709.
- [3] Wen Z G, Chen J L, Hao L F, Yan W M, Wang H G, Li J, Yuan J P, Lee K J, Wang N, Yuen R 2020 *Astrophys. J.* **900** 168.
- [4] Wen Z G, Yan W M, Yuan J P, Wang H G, Chen J L, Mijit M, Yuen R, Wang N, Tu Z Y, Dang S J 2020 *Astrophys. J.* **904** 72.
- [5] Wang Z, Wen Z G, Yuan J P, Wang N, Han W, Wang H G, Chen J L 2025 *Astrophys. J.* 987 43.
- [6] Wang Z, Wen Z G, Yuan J P, Wang N, Yan W M, Han W, Duan X F 2026 *Astrophys. J.* 1003 218.
- [7] Kouveliotou C, Dieters S, Strohmayer T, van Paradijs J, Fishman G J, Meegan C A, Hurley K, Kommers J, Smith I, Frail D, Murakami T 1998 *Nature* **393** 235.
- [8] Olausen S A, Kaspi V M 2014 *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **212** 6.

- [9] Chen J L, Wang H, Jia H Y, Ma Z W, Li Y H, Tan J 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 180401. (in Chinese)
[陈建玲, 王辉, 贾焕玉, 马紫微, 李永宏, 谭俊 2019 物理学报 **68** 180401]
- [10] Zhao S Y, Liu C Z, Huang X L, Wang Y B, Xu Y 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 222601. (in Chinese) [赵诗艺, 刘承志, 黄修林, 王夷博, 许妍 2021 物理学报 **70** 222601]
- [11] Dong A J, Gao Z F, Yang X F, Wang N, Liu C, Peng Q H 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 030502. (in Chinese) [董爱军, 高志福, 杨晓峰, 王娜, 刘畅, 彭秋和 2023 物理学报 **72** 030502]
- [12] Chu P C, Liu K, Wang J J, Wu P, Liu Y H, Liu H, Liu H M 2026 *Acta Phys. Sin.* **75** 070101. (in Chinese) [初鹏程, 刘可, 王姣姣, 吴澎, 刘玉珩, 刘鹤, 刘宏铭 2026 物理学报 **75** 070101]
- [13] Pacini F 1968 *Nature* **219** 145.
- [14] Ostriker J P, Gunn J E 1969 *Astrophys. J.* **157** 1395.
- [15] Contopoulos I, Spitkovsky A 2006 *Astrophys. J.* **643** 1139.
- [16] Ho W C G, Andersson N 2012 *Nat. Phys.* **8** 787.
- [17] Cheng Q, Zhang S N, Zheng X P, Fan X L 2019 *Phys. Rev. D.* **99**(8): 083011.
- [18] Owen B J, Lindblom L, Cutler C, Schutz B F, Vecchio A, Andersson N 1998 *Phys. Rev. D* **58** 084020.
- [19] Lin L M, Suen W M 2006 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **370** 1295.
- [20] Alford M G, Mahmoodifar S, Schwenzer K 2012 *Phys. Rev. D.* **85** 044051.
- [21] Annamalai D, Nandi R 2026 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **548** 696.
- [22] Xu R X, Qiao G J 2001 *Astrophys. J.* **561**(1) 85.
- [23] Zhang S N, Xie Y 2012 *Astrophys. J.* **761**(2) 102.
- [24] Kou F F, Tong H 2015 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **450**(2) 1990.
- [25] Tong H 2016 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **59**(1) 619501.
- [26] Ou Z W, Tong H, Kou F F, Ding G Q 2016 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **457**(4) 3922.
- [27] Chen W C, Li X D 2016 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **455**(1) 87.

- [28] Chen W C 2016 *Astron. Astrophys.* **593** 3.
- [29] Tong H, Kou F F 2017 *Astrophys. J.* **837**(2) 117.
- [30] Wang L J, Ge M Y, Wang J S, Weng S S, Tong H, Yan L L, Zhang S N, Dai Z G, Song L M 2020 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **494** 1865.
- [31] Ge M Y, Yuan J P, Lu F J, Tong H, Zhou S Q, Yan L L, Wang L J, Tuo Y L, Li X F, Song L M 2020 *Astrophys. J. Lett.* **900** L7.
- [32] Zhang C M, Cui X H, Li D, Wang D H, Wang S Q, Wang N, Zhang J W, Peng B, Zhu W W, Yang Y Y, Pan Y Y 2022 *Universe* **8** 628.
- [33] Hu F Y, Cheng Q, Zheng X P, Wang J Q, Yan Y L, Wang J Y, Luo T Y 2023 *Res. Astron. Astrophys.* **23** 055020.
- [34] Yan Y L, Cheng Q, Zheng X P 2024 *J. High Energy Astrophys.* **41** 13.
- [35] Gao Z F, Li X D, Wang N, Yuan J P, Wang P, Peng Q H, Du Y J 2016 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **456** 55.
- [36] Li B P, Gao Z F, Ma W Q, Zhang W F, Cheng Q 2026 *Astrophys. J.* **999** 262.
- [37] Li B-P, Gao Z-F, Ma W-Q, Cheng Q 2025 *Front. Astron. Space Sci.* **12** 1625459.
- [38] Li B P, Gao Z F 2023 *Astron. Nachr.* **344** e20220111.
- [39] Harding A K, Contopoulos I 1994 *Astrophys. J.* **430** 755.
- [40] Haskell B, Andersson N 2015 *Space Sci. Rev.* **191** 675.
- [41] Gusakov M E, Chugunov A I 2019 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **485** 210.
- [42] Rezzolla L 2001 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **327** 981.
- [43] Cuofano C, Drago A 2010 *Phys. Rev. D* **82** 043003.
- [44] Bonazzola S, Gourgoulhon E 1996 *Astron. Astrophys.* **312** 675.
- [45] Palomba C 2005 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **359** 1325.
- [46] Dong W, Melatos A 2025 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **537** 650.

- [47] Zhu X J, Fan X L, Zhu Z H 2011 *Astrophys. J.* **729** 59.
- [48] Yan Y L, Cheng Q, Zheng X P, Yu X Y 2025 *Phys. Rev. D.* **112** 103014.
- [49] Cheng Q, Zhang S N, Zheng X P 2017 *Phys. Rev. D.* **95** 083003.
- [50] Punturo M, Lück H 2011 *Gen. Relativ. Gravit.* **43** 363.
- [51] Spitkovsky A 2006 *Astrophys. J.* **648** 51.
- [52] Goldreich P, Reisenegger A 1992 *Astrophys. J.* **395** 250.
- [53] Ho W C G, Lai D 2003 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **338** 233.
- [54] Gao Z F, Wang N, Shan H, Li X D, Wang W 2017 *Astrophys. J.*, **849** 19.
- [55] Alford M G, Mahmoodifar S, Schwenzer K 2012 *Phys. Rev. D.* **86** 024001.
- [56] Alford M G, Schwenzer K 2014 *Astrophys. J.* **795** 79.
- [57] Lin J, Lu R J, Lin D B, Wang X G 2020 *Astrophys. J.* **895** 46.
- [58] Basu A, Char P, Nandi R 2025 *Phys. Rev. D.* **112** 023020.
- [59] Wang Z, Wen Z G, Yuan J P, Wang N, Wang Z, Chen J L, Wang H G, Han W, Wang H, Duan X F, Lyu C B, Wang J P, Wu Z W 2024 *Astrophys. J.* **968** 109.
- [60] Sun G W, He D L, Ma W L, Zhu D J 2025 *Astron. Nachr.* **346** e70030.
- [61] Wen Z G, Chen J L, Yuan J P, Wang N, Yan W M, Han W, Wang Z, Duan X F, Jing L, He P C, Rusul A, Wang H, Lyu C B. 2026 *Astrophys. J.* **999** 135.
- [62] Ho W C G, Kuiper L, Espinoza C M, Guillot S, Ray P S, Smith D A, Bogdanov S, Antonopoulou D, Arzoumanian Z, Bejger M, Enoto T, Esposito P, Harding A K, Haskell B, Lewandowska N, Maitra C, Vasilopoulos G 2022 *Astrophys. J.* **939** 7.
- [63] Gügercinoğlu E, Akbal O, Ali Alpar M, Antonopoulou D, Espinoza C M 2026 *Astron. Astrophys.* **706** A216.
- [64] Yan W M, Manchester R N, Wang N, Wen Z G, Yuan J P, Lee K J, Chen J L 2020 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **491** 4634.

- [65] Wen Z G, Yuen R, Wang N, Tu Z Y, Yan Z, Yuan J P, Yan W M, Chen J L, Wang H G, Shen Z Q 2021 *Astrophys. J.* **918** 57.
- [66] Wen Z G, Yuan J P, Wang N, Li D, Chen J L, Wang P, Wu Q D, Yan W M, Yuen R, Wang Z. 2022 *Astrophys. J.* **929** 71.
- [67] Tedila H M, Yuen R, Wang N, Yuan J P, Wen Z G, Yan W M, Wang S Q, Dang S J, Li D, Wang P 2022 *Astrophys. J.* **929** 171.
- [68] Yuen R 2024 *Astron. Astrophys.* **683** A108.
- [69] Yuen R 2025 *Astron. Astrophys.* **697** A198.
- [70] Xin P, Wang N, Werthimer D, Duan X F, Li J, Ergesh T, Liu Q, Cai M H 2022 *Res. Astron. Astrophys.* **22** 045016.
- [71] Liu Y, Keith M J, Antonopoulou D, Weltevrede P, Shaw B, Stappers B W, Lyne A G, Mickaliger M B, Basu A 2024 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **532** 859.
- [72] Trigg A C, Stewart R, Van Kooten A, Burns E, Baring M G, Frederiks D D, Huppenkothen D, O'Connor B, Roberts O J, Wadiasingh Z, Younes G, Bhat N, Briggs M S, Busmann M, Goldstein A, Gruen D, Hu L, Kouveliotou C, Negro M, Palmese A, Riffeser A, Scotton L, Svinkin D S, Veres P, Zöller R 2025 *Astron. Astrophys.* **694** A323.
- [73] Chen R C, Yang J, Zhang B B, Wang C W, Tan W J, Xiong S L, Zhang B 2026 *Astrophys. J. Lett.* **1003** L42.
- [74] Turolla R, Taverna R, Israel G L, Muleri F, Zane S, et al. 2023 *Astrophys. J.* **954** 88.
- [75] Heyl J, Taverna R, Turolla R, Israel G L, Ng M, et al. 2024 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **527** 12219.
- [76] Rigoselli M, Taverna R, Mereghetti S, Turolla R, Israel G L, Zane S, Marra L, Muleri F, Borghese A, Coti Zelati F, De Grandis D, Imbrogno M, Kelly R M E, Esposito P, Rea N 2025 *Astrophys. J. Lett.* **985** L34.
- [77] Abac A G, Abouelfettouh I, Acernese F, Ackley K, Adamcewicz C, et al. 2026 *Phys. Rev. D* **113** 082004.

- [78] Gao Z, Sun S, Ma W, Shan H 2025 *Astron. Nachr.* **346** e70032.
- [79] Cutler C. 2002 *Phys. Rev. D*, **66** 084025.
- [80] Haskell B, Samuelsson L, Glampedakis K, Andersson N 2008 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **385** 531.
- [81] Thorne K S. 1980 *Rev. Mod. Phys.* **52** 299.
- [82] Zheng T C, Wei D M, Wang Y, Zhou H, Li L 2024 *Astrophys. J.* **964** 169.
- [83] Corsi A, Mészáros P. 2009 *Astrophys. J.* **702** 1171.
- [84] Agazie G, Anumalapudi A, Archibald A M, Arzoumanian Z, Baker P T, et al. 2023 *Astrophys. J. Lett.* **951** L8.
- [85] Phinney E S 2001 *arXiv astro-ph/0108028*.
- [86] Miritescu C-A, Martinez M, Pujolas O 2026 *Phys. Rev. D* **113** 063012.

录用稿件，非最终出版稿

Multi-channel Spin-down Model of Magnetars and Gravitational Wave Constraints: An Analysis Based on the Effective Average Braking Index*

LI Yonghong^{1) #} GAO Zhifu^{2) †} WANG Hui^{1) †}

1) (*Shanxi Intelligent Optoelectronic Sensing Application Technology Innovation Center, Yuncheng University, Yuncheng, Shanxi 044000, China*)

2) (*Xinjiang Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Urumqi, Xinjiang 830011, China*)

Abstract

Magnetars, isolated neutron stars with ultra-strong magnetic fields (10^{14} – 10^{15} G), exhibit complex spin-down behavior that cannot be described by canonical magnetic dipole braking ($n = 3$) due to strong timing noise and glitches, which prevent direct measurement of the instantaneous braking index. To circumvent this, we employ the equivalent average braking index $\langle n \rangle$ inferred from supernova remnant (SNR) ages for a sample of eight associated magnetars, yielding values ranging from ~ 1 to 42, indicating multiple competing energy-loss channels. We develop a purely kinematic, model-independent framework to translate these $\langle n \rangle$ values into quantitative constraints on the time-averaged torque fractions of four

* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2022YFC2205202), the Major Science and Technology Project of Xinjiang Uygur Autonomous Region (Grant No. 2022A03013-1), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12573052), and Scientific and Technological Innovation Programs of Higher Education Institutions in Shanxi (2021L483).

These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: zhifugao@xao.ac.cn; gjwang@my.swjtu.edu.cn

The First Author. E-mail: liyonghong02721227@163.com

channels: particle wind ($k = 1$), magnetic dipole ($k = 3$), mass quadrupole GW ($k = 5$), and r-mode current quadrupole GW ($k = 7$). The key advance is a weighted-average relation connecting $\langle n \rangle$ to the mean torque fractions $\bar{f}_i$: $\langle n \rangle - 3 = -2\bar{f}_1 + 2\bar{f}_5 + 4\bar{f}_7$, with the normalization $\sum \bar{f}_i = 1$. This allows us to analytically derive strict lower and upper bounds for the r-mode torque fraction $\bar{f}_7$. The lower bound, $\bar{f}_{7,\min} = \max(0, (\langle n \rangle - 5)/2)$, arises from assuming the highest non-r-mode exponent (mass quadrupole) dominates the competing channels, while the upper bound, $\bar{f}_{7,\max} = (\langle n \rangle - (\delta + 3\varepsilon + 5\gamma))/7$, incorporates physically motivated minimum contributions from other channels, where $\delta, \varepsilon, \gamma$ denote the minimal torque fractions for wind, dipole, and quadrupole, respectively. We also incorporate a correction for magnetic field decay, demonstrating that failing to subtract it would artificially inflate $\bar{f}_7$ for sources with $\langle n \rangle \gg 7$, where the linear programming framework becomes inapplicable. Applying the framework to the eight sources, we find that SGR 0501+4516 ($\langle n \rangle = 6.3$) requires a significant r-mode contribution ($\bar{f}_{7,\min} \gtrsim 0.65$), while low- $\langle n \rangle$ sources permit $\bar{f}_7 \simeq 0$, indicating r-modes are not mandatory. Concurrently, we estimate the GW strains from both channels using standard quadrupole formulae with fiducial parameters (ellipticity 10^{-6} , r-mode amplitude 10^{-5} , distance 10 kpc): typical magnetars produce strains $h_0 \sim 10^{-26}$ to 10^{-24} at sub-Hertz frequencies (0.17–1 Hz), far below the sensitivity of current (aLIGO) and near-future (Einstein Telescope) detectors, rendering direct detection unfeasible in the near term. Despite this, the derived upper limits on $\bar{f}_7$, combined with non-detection constraints from LVK O4a and multi-wavelength observations (e.g., IXPE polarimetry, NICER timing), can effectively compress the allowed parameter space for the r-mode saturation amplitude α and the magnetic ellipticity ϵ_B , narrowing them below pure theoretical estimates. This work provides a robust, observation-driven pathway to constrain magnetar GW emission without relying on direct detection, bridging electromagnetic astronomy and GW astrophysics and offering a practical tool applicable to existing and future magnetar samples in the multi-messenger era.

Keywords: magnetars, braking index, gravitational waves, r-mode, supernova remnants