

增强型 pQCD 模型中的 u-d 夸克物质与引力彩虹下的 u-d 夸克星 *

崔磊 ¹⁾ 陈怀民 ²⁾ 陆振烟 ³⁾ 夏铖君 ⁴⁾ 徐建峰 ^{1)†}

1) (宿迁学院数理学院, 宿迁 223800)

2) (武夷学院机电工程学院, 武夷山 354300)

3) (湖南科技大学物理与电子科学学院, 湘潭 411201)

4) (扬州大学物理科学与技术学院, 引力与宇宙学研究中心, 扬州 225009)

研究表明普通夸克物质 (u-d quark matter, u-d QM) 有可能是强相互作用的基态, 而强相互作用的基本理论是量子色动力学 (Quantum chromodynamics, QCD). 利用增强型微扰 QCD 模型 (Enhanced perturbative QCD model, EpQCD) 兼具 QCD 渐近自由和热力学自洽性的特点, 本文详细研究了 u-d QM 的性质以及普通夸克星 (u-d quark star, u-d QS) 在引力彩虹理论框架下的星体结构. 计算结果表明, 虽然合适的模型参数范围较小, 但 u-d QM 仍有可能绝对稳定, 并且其对应的跑动耦合常数 α 更快地趋于零, 从而导致 u-d QM 的状态方程变硬, 使得状态方程可以在传统广义相对论下支持 $2.34 M_{\odot}$ 的 u-d QS. 而引力彩虹理论可以在保证 u-d QS 稳定性的情况下支持其具有更大的星体质量, 这可以解释当前及未来可能观测到的超大质量脉冲星.

关键词: 夸克物质, 夸克星, 状态方程, 引力彩虹

PACS: 02.10.Yn, 33.15.Vb, 98.52.Cf, 78.47.dc

* 国家自然科学基金 (批准号: 12005005, 12275234, 12205093), 宿迁学院人才引进科研启动基金 (批准号: Xiao2022XRC061), 宿迁学院学科交叉融合创新项目 (2025XKTD02), 福建省自然科学基金 (批准号: 2024J01319) 和福建省中青年教师教育科研项目 (批准号: JAT231123) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xujf@squ.edu.cn (通信作者)

1 引言

夸克物质 (Quark matter, QM) 是由退禁闭的夸克在强相互作用主导下形成的新形态物质, 做为量子色动力学 (Quantum chromodynamics, QCD) 在极端温度和密度条件下的研究对象, 其稳定性判定与状态方程计算^[1-4] 不仅是检验强相互作用基本理论的重要途径, 更与致密星的内部结构^[5-7]、演化规律^[8,9] 以及引力波探测^[10-13] 等紧密相关. 目前对 QM 的研究已成为中高能核物理与天体物理交叉领域的前沿课题.

1984 年 Witten 提出由数量近似相等的 u、d、s 夸克构成的奇异夸克物质 (Strange quark matter, SQM) 可能是强相互作用的真正基态^[14], 从此推动了人们对 SQM 的大量研究^[15-20]. 此后数十年, 相关研究多聚焦于 SQM, 而由 u、d 两味夸克构成的普通 QM 或 u-d QM 则长期不被重视, 这其中的原因很大一部分是因为人们尚未在当前世界和实验中发现稳定存在的 u-d QM. 根据现代核物理的知识, QM 的存在需要满足基本的稳定性条件, 即不论是 SQM 还是 u-d QM, 在满足电中性条件、重子数守恒条件和 β 平衡条件下, 其平均重子能量的最小值要小于 930 MeV (930 MeV 是 ^{56}Fe 原子核的平均重子能量). 直至近期 Holdom 等学者的研究指出, 在重子数 $A \gtrsim 300$ 时 u-d QM 也可能稳定存在^[21], 这一结论刷新了人们的认知, 一方面为研究 u-d QM 的性质^[22-25] 和 u-d 夸克星 (Quark star, QS) 结构提供了理论依据^[26,27], 另一方面也推动了 QM 研究的唯象模型的进一步发展和优化^[25,28].

因为 QCD 在相对密度较低时, 特别是与致密星内部密度相关时夸克禁闭效应起重要作用, 所以通过直接求解 QCD 来得到 QM 的状态方程还有困难. 而格点 QCD 在有限化学势下的计算仍无法进行, 因此研究 QM 的性质主要依赖各类唯象模型, 常见的有 NJL 模型^[29,30]、准粒子模型^[31,32]、夸克集团模型^[19,33]、等效质量模型^[34-36] 等. 在当前的工作中, 我们将使用增强型微扰 QCD (Enhanced perturbative QCD, EpQCD) 模型研究 u-d QM 的稳定窗口和状态方程的特点. 传统微扰 QCD (Perturbative QCD, pQCD) 因为包含跑动耦合常数 α , 能精确计算极高密度或高温环境下夸克和胶子的相互作用, 符合 QCD 渐近自由的特点. 然而在密度相对较低的情况下, 由于夸克禁闭效应, 如果将 pQCD 截断到 α 的某一幂次而直接用来计算 QM 的状态方程会出现热力学不自洽、计算误差过大等问题. 为了克服此问题, 我们基于热力学自洽性要求出发, 于 2015 年发展了 EpQCD^[18,37]. 通过针对性的选择重整化减除点的具体形式, 使得 EpQCD 既可以克服传统 pQCD 使用不当导致的热力学自洽性问题, 也可以自洽地描述中低密度区的 QM. 换句话说, EpQCD 既保留了 QCD 渐近自由的特点, 也将夸克之间的禁闭作用作为一个整体考虑到了模型之中.

早在脉冲星被发现之前，人们就根据核物理的基本知识预言了巨大原子核存在的可能性，即中子星。脉冲星的发现恰恰证明人类核物理学的巨大成功，也使人们认定脉冲星的本质就是由中子物质构成的致密星。脉冲星作为中子星的典型观测形态，其质量上限是检验致密物质状态方程的重要参数。虽然部分传统核物质模型可以支持 $2 M_{\odot}$ (太阳质量, $M_{\odot}$) 以上中子星，但这类模型往往难以同时满足中子星半径、潮汐形变等多观测约束。近年来的高精度观测不断刷新着脉冲星的质量记录，例如，PSR J1614-2230 质量的测量结果为 $1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$ [38]; PSR J0348+0432 质量的测量结果为 $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ [39]，其为精确探测的大质量脉冲星之一；而 PSR J0740+6620 的测量结果显示其质量高达 $2.14^{+0.20}_{-0.18} M_{\odot}$ [40] (更新的数据为 $2.08 \pm 0.07 M_{\odot}$ [41])；另外，在 LIGO/Virgo 合作组测得的 GW190814 引力波事件中，伴随天体的质量可以达到 $2.50\text{--}2.67 M_{\odot}$ (90% 的置信度) [13]，这可能是目前探测到的质量最大的致密星体之一。如此大的质量为解释其物质构成提出了挑战，因此在当前工作中我们将在 EpQCD 模型中计算 u-d 夸克物质状态方程，并结合引力彩虹理论来尝试理解超大质量致密星的观测结果。

引力彩虹理论作为量子引力领域的重要理论框架，该理论是由 Magueijo 和 Smolin 在 2004 年提出的 [42]，这一理论将非线性狭义相对论 (Nonlinear special relativity) 中的平直时空背景拓展到了弯曲的时空背景。在这一弯曲的时空背景中，度规将会是能量依赖的。换句话说，在这一理论中，时空背景的结构将会受到粒子能量的影响，不同能量的粒子所感受到的时空是不一样的，这一思想在其他理论中也被提及 [43–45]。与传统广义相对论相比，引力彩虹理论能通过调整彩虹函数参数实现对致密星内部的引力作用的合理修正，从而有望支撑更大质量的致密星。另一方面，也可以加深人们对量子引力的理解。

本文结构如下：在第 2 部分，我们首先给出 u-d QM 的 EpQCD 模型的理论框架，更详细的内容可以参考文献 [18,37]，接着我们简单介绍引力彩虹理论，给出计算相关的若干公式。在第 3 部分，我们给出数值计算结果和相应的讨论。最后，在第 4 部分给出本文的简单总结。

2 理论框架介绍

2.1 增强型 pQCD 模型简介

微扰 QCD 模型 [46–48] 在极高密度或温度下已获得极大成功，但是如果将其直接应用到密度相对较低的情况，由于夸克禁闭效应则会导致计算误差过大或热力学不自洽问题。基于以上原因，在 2015 年我们从热力学自洽性的要求出发，发展了微扰 QCD 模型，并将其称为增强型微扰 QCD 模型。在这里，我们给出此模型的基本框架，细节可以参考文献 [18,37]。

首先, 增强型 pQCD 模型中系统热力学势密度可以写为

$$\Omega = \Omega_{\text{pt}} + \Omega_e + \Omega', \quad (1)$$

其中 Ω_{pt} 是夸克物质热力学势密度在 pQCD 模型中的微扰展开式, Ω_e 是电子 e 的热力学势密度, Ω' 是为了保证系统在密度相对较低时热力学自洽性引入的一部分.

系统的热力学势密度的第一部分 Ω_{pt} 在精确到跑动耦合常数 α 的一次幂时, 其表达式是 [47]

$$\Omega_{\text{pt}} = -\frac{1}{4\pi^2}(\mu_u^4 + \mu_d^4)(1 - 2\alpha), \quad (2)$$

其中 μ_u, μ_d 分别是 u 夸克和 d 夸克的化学势; α 为跑动耦合常数, 它的跑动行取决于重整化群方程 [49,50]. 在只考虑领头阶的情况下, α 与重整化减除点 u 的关系是

$$\alpha = \frac{1}{\beta_0 \ln(u/\Lambda_{\text{QCD}})}, \quad (3)$$

其中, β_0 是常数, 在当前问题下其值为 $\beta_0 = 29/6$; Λ_{QCD} 是 QCD 标度参数, 在下一部分的计算中其值将取为 $\Lambda_{\text{QCD}} = 147 \text{ MeV}$ [50]; 重整化减除点 u 依赖于系统的能标, 可以将其取为依赖于粒子化学势的函数, 即 $u = u(\mu_u, \mu_d)$ [47,51]. 这里需要指出, 为了满足热力学自洽性的要求, u 与粒子化学势的函数关系式不能随便给定. 在之前的研究中, 我们给出了一个满足热力学自洽性要求的 u 与粒子化学势之间的简单关系式,

$$u = C \sqrt[4]{\frac{\mu_u^4 + \mu_d^4}{2}}, \quad (4)$$

其中, C 为模型参数.

第二部分是电子 e 的热力学势密度, Ω_e , 其表达式是

$$\Omega_e = -\frac{\mu_e^4}{12\pi^2}. \quad (5)$$

第三部分 Ω' 的具体形式是

$$\Omega' = \int_{\mu_0}^{\mu} [P(\mu'_u, \mu'_d) d\mu'_u + Q(\mu'_u, \mu'_d) d\mu'_d] + B_0 \quad (6)$$

其中, P, Q 的表达式分别为

$$P(\mu'_u, \mu'_d) = \frac{\mu_u'^3}{2\beta_0\pi^2} \ln^{-2} \left(\frac{u}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)$$

和

$$Q(\mu'_u, \mu'_d) = \frac{\mu_d'^3}{2\beta_0\pi^2} \ln^{-2} \left(\frac{u}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)$$

B_0 是常数，其物理意义可以理解为真空能量密度，在当前模型中我们把它当做另一个模型参数。

由式 (1) 及基本的热力学关系式 $n_i = -d\Omega/d\mu_i$ ($i=u,d,e$)，可以得到各粒子的粒子数密度。对于夸克，其粒子数密度表达式是

$$n_q = \frac{\mu_q^3}{\pi^2}(1 - 2\alpha), \quad (7)$$

其中， q 代表 u 或者 d 夸克；对于电子 e ，其粒子数密度表达式是

$$n_e = \frac{\mu_e^3}{3\pi^2}. \quad (8)$$

为了得到系统的状态方程，根据公式 (7) 和 (8) 求解以下方程组：

1. β -平衡方程：

$$\mu_u + \mu_e = \mu_d, \quad (9)$$

2. 电荷守恒方程：

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - n_e = 0, \quad (10)$$

3. 重子数守恒方程：

$$n_b = \frac{1}{3}(n_u + n_d), \quad (11)$$

可以得到各粒子的化学势 μ_i 与粒子数密度 n_i ，再根据

$$E = \Omega + \sum_i \mu_i n_i \quad (12)$$

和

$$P = -\Omega \quad (13)$$

即可得到系统的能量密度与压强，即状态方程 $P = P(E)$ 。

2.2 引力彩虹理论简介

在引力彩虹理论中，时空背景的结构将会受到粒子能量的影响，不同能量的粒子所感受到的时空是不一样的，即传统的粒子色散关系将修正为

$$E^2 \Xi(x)^2 - p^2 \Sigma(x)^2 = m^2, \quad (14)$$

其中， $\Xi(x)$ 与 $\Sigma(x)$ 称为彩虹函数，其变量 x 是一个无量纲的量。 x 定义为粒子总能量 E 与普朗克能量 E_p 的比值 $x = E/E_p$ ，其中 $E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^3}{G}}$ 是普朗克能量。彩虹函数将在粒子的能量非常高时变得重要，而

在能量较低时可以忽略，即满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Xi(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Sigma(x) = 1. \quad (15)$$

彩虹函数 $\Xi(x)$ 与 $\Sigma(x)$ 可以取不同的函数表达式. 表达式的形式非常重要^[52,53], 因为这将会影响时空结构的量子引力修正. 在后面的数值计算过程中, 我们将令 $\Xi(x) = 1$, 而将 $\Sigma(x)$ 的值视为可调常数参数, 取值区间为 0.8–1.2^[54–56], 这是在彩虹理论框架下做定性探索的一种简化处理. 需要说明, 在完整引力彩虹理论中 $\Xi(x)$ 和 $\Sigma(x)$ 本质上是探测粒子能量的函数, 源于能量依赖的色散关系与彩虹度规构造. 在这里将二者简化为与能量无关的常数, 不再保留引力彩虹固有的能量依赖效应, 此时模型等效于对引力作用强度引入常数修正. 标准广义相对论对应参数取值为 $\Xi(x) = \Sigma(x) = 1$. 应当强调, 该简化方案主要用于定性研究引力有效修正如何改变致密星平衡结构, 若要严格实现引力彩虹的物理内涵, 则必须采用能量相关的函数形式, 相关更自洽的定量分析留作后续工作.

在这样的背景下, 考虑球对称的夸克星, 此时修改后的度规给出的线元可以写为

$$ds^2 = -\frac{e^{2\Phi(r)}}{\Xi^2(x)} dt^2 + \frac{e^{2\lambda(r)}}{\Sigma^2(x)} dr^2 + \frac{r^2}{\Sigma^2(x)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (16)$$

其中包含了彩虹函数 $\Xi(x)$ 和 $\Sigma(x)$. 对于球对称、非旋转的夸克星, 修改后的 TOV 方程为^[52]

$$\frac{dP}{dr} = -(E + P) \frac{M_{\text{eff}}(r, x) \Sigma^2(x) + 4\pi r^3 P(r)}{r[r - 2M_{\text{eff}}(r, x)] \Sigma^2(x)}, \quad (17)$$

其中

$$M_{\text{eff}} = \int_0^r \frac{4\pi r'^2 E}{\Sigma^2(x)} dr' \equiv \frac{m(r)}{\Sigma^2(x)}. \quad (18)$$

在求解以上修改后的 TOV 方程时, 需要结合具体的物质状态方程, 并使用如下边界条件:

$$m(0) = 0, \quad P(0) = P_c, \quad E(0) = E_c, \quad (19)$$

其中 P_c 和 E_c 分别为星体中心处的压强与能量密度.

3 数值计算结果与讨论

使用唯象模型研究 QM 的性质及 QS 的结构, 其中关键的一点是确定模型参数. 我们将根据目前核物理的相关知识及假设来约束模型参数, 给出模型的参数窗口. 首先, 根据文献^[21]的结论, 如果 u-d QM 可以稳定存在, 则在重子数较大时 ($A \gtrsim 300$) 我们有 u-d QM 的平均重子能量应小于 930 MeV; 其次, 现代核物理研究表明饱和核密度 $\rho_c = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, 因此我们假设在 u-d QM 的密度小于 ρ_c 时, 将会相变为普

通核物质. 根据以上说明, 我们在 EpQCD 模型中计算了 u-d QM 的状态方程, 得到了如图 1 所示的模型参数窗口, 即稳定窗口.

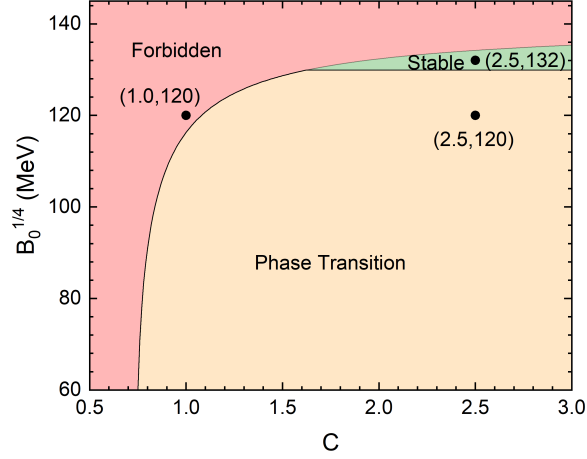


图 1 增强型 pQCD 模型下 u-d 夸克物质的稳定窗口

Fig. 1. Stability window of u-d quark matter within the enhanced perturbative QCD model.

图 1 中红色区域中的参数值给出的 u-d QM 的平均重子能量的最小值大于 930 MeV, 因此将其标记为禁止区 (Forbidden), 表示此区域的参数值是不合理的. 图中黄色区域中的参数值给出的 u-d QM 的平均重子能量的最小值小于 930 MeV, 但是与最小平均重子能量所对应的密度小于饱和核密度 ρ_c , 因此将其标记为相变区 (Phase Transition), 这意味着根据此区域参数计算出的 u-d QM 可能会在平均重子能量较低时相变为普通核物质, 这对应着致密星为混杂星的情况 [57], 即星体内部由 QM 构成, 表面则由普通核物质构成. 绿色区域中的参数给出的 u-d QM 同时满足最小平均重子能量小于 930 MeV 和对应重子数密度大于 ρ_c , 因此被标记为稳定区 (Stable). 禁止区与相变区和稳定区的分界线给出了平均重子能量等于 930 MeV 的参数值, 而相变区与稳定区的边界线给出了平均重子能量最小时重子数密度等于 ρ_c 时的参数值. 因为目前还不能从理论上计算出模型参数的具体数值, 所以在忽略模型参数取值范围的情况来说, 根据图中各区域的面积可以看出, 稳定区的面积要比禁止区和相变区的面积小的多, 这反应出形成稳定的 u-d 夸克物质的概率比较小. 为了具体计算 u-d QM 的状态方程和 u-d QS 的结构等性质, 我们在各区域依次取一组典型参数值, 在图中用黑色实心点表示, 具体取值在括号中给出.

图 2 展示了在三组典型参数值下平均重子能量随重子数密度的变化曲线. 图中实线, 虚线和点线分别给出了稳定区, 相变区和禁止区内 u-d QM 平均重子能量的变化曲线图, 圆圈标记出了压强零点, 星号对应于最低平均重子能量, 红色虚线对应于平均重子能量等于 930 MeV, 绿色虚线为重子数密度等于 ρ_c . 从

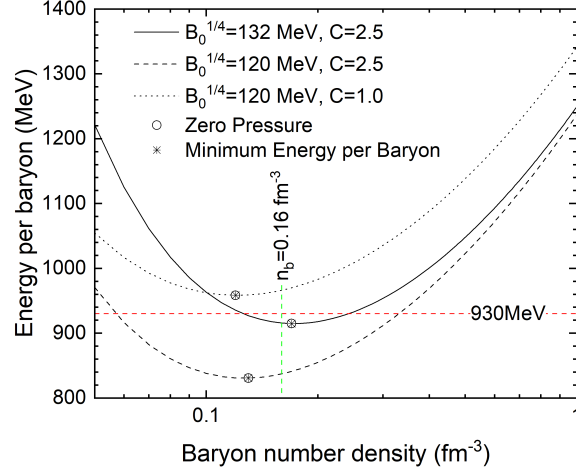


图 2 平均重子能量随密度的变化曲线

Fig. 2. Averaged energy per baryon as functions of baryon number density with different model parameters.

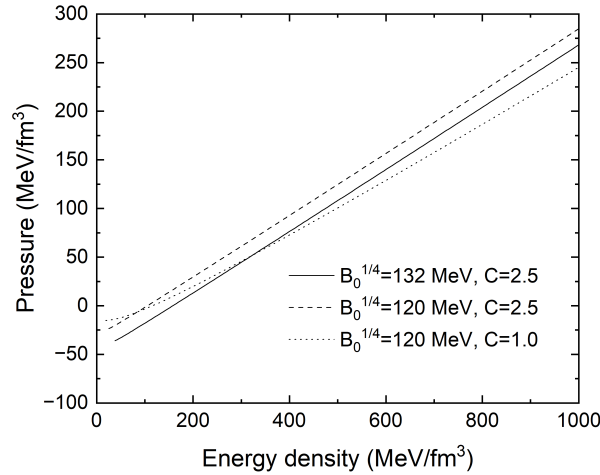


图 3 不同典型参数下状态方程曲线

Fig. 3. Equation of state as functions of baryon number density with different model parameters.

图中可以看出，稳定区内 u-d 夸克物质的平均重子能量的最小值低于 930 MeV；相变区内虽然平均重子能量的最小值低于 930 MeV，但是其对应的重子数密度小于 ρ_c ；很明显，禁止区内平均重子能量的最小值大于 930 MeV. 除此之外，可以看出能量最小值与零压点对应于同一密度，这反映出 EpQCD 模型的热力学自洽性 [37].

图 3 给出了不同区域内典型参数下 u-d QM 的状态方程. 从图中可以看出在相同能量密度下，虚线的压强更高（状态方程更硬），通过进一步对比这两组参数值，可以得到以下结论：1) 保持参数 B_0 的值不

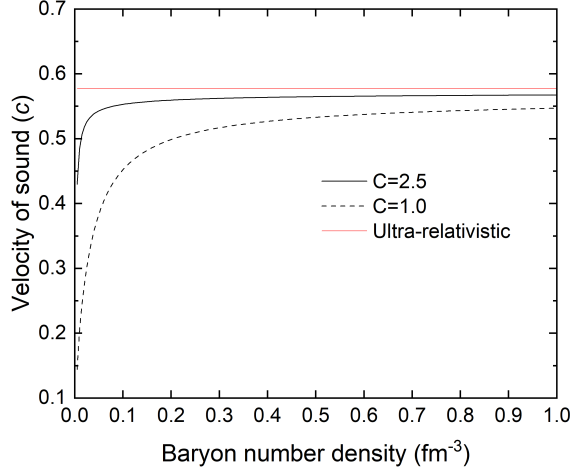


图 4 不同典型模型参数下 u-d 夸克物质内声速随重子数密度的变化曲线

Fig. 4. Curves of sound velocity as functions of baryon number density with different model parameters. 变, 增大参数 C 的值可以使状态方程变硬; 2) 实线的斜率大于点线, 即 u-d QM 的状态方程更硬, 因此理论上可以给出质量和半径更大 u-d QS; 3) 对比实线和虚线可以发现它们的斜率相同, 即虽然参数 B_0 不影响 $P = P(E)$ 的斜率, 但是会影响状态方程的软硬, 因为虽然实线和虚线有同样的斜率, 但是对应于同一能量密度, 虚线的压强更大, 因此状态方程也更硬, 这一结论与 MIT 袋模型的结果一致. B_0 对状态方程软硬的影响也可以从其物理含义理解, 因为 B_0 表示真空能量密度, 其主要作用是提供一负压, B_0 的减小导致粒子间结合的更紧密, 因此更小的 B_0 值会导致更硬的夸克物质状态方程. 图 3 中的部分结论可以通过图 4 声速随重子数密度变化的图像进一步理解. 从图 4 可以看出, 声速的变化只依赖于参数 C , 并且 C 越大, 声速越大, 且更快地趋向极端相对论的情况 (图中用红色实线给出, 其值为 $\sqrt{3}/3$), 这表明 u-d QM 的状态方程越硬.

图 5 的左纵轴和右纵轴分别展示了跑动耦合常数 α 和粒子化学势随重子数密度的变化曲线. 从图中可以看出, 较大的参数 C 可以使得跑动耦合常数更小, 且更快地趋于零, 从而使得微扰相互作用减小. 这可以解释为什么较大的参数 C 值可以给出更硬的 u-d QM 状态方程: 由于微扰相互作用是一种吸引力, 微扰相互作用的减小可以导致夸克之间吸引力的减小, 从而可以使得 u-d 夸克物质的状态方程变硬. 从图 5 右纵轴可以看出, 随着重子数密度的增大, 各粒子化学势也变大, 且 d 夸克化学势 μ_d 大于 u 夸克化学势 μ_u , 这可以从弱平衡条件 $\mu_u + \mu_e = \mu_d$ 看出. 另外, 更小的 C 值给出的各粒子的化学势更大.

图 6 给出了引力彩虹理论下 u-d QS 质量随半径的变化关系, 曲线上的黑色实心点表示最大质量. 在具体的计算过程中我们将彩虹函数 Σ 当做模型参数, 令其值依次取 0.8, 0.9, 1.0, 1.1 和 1.2, 计算结果分别

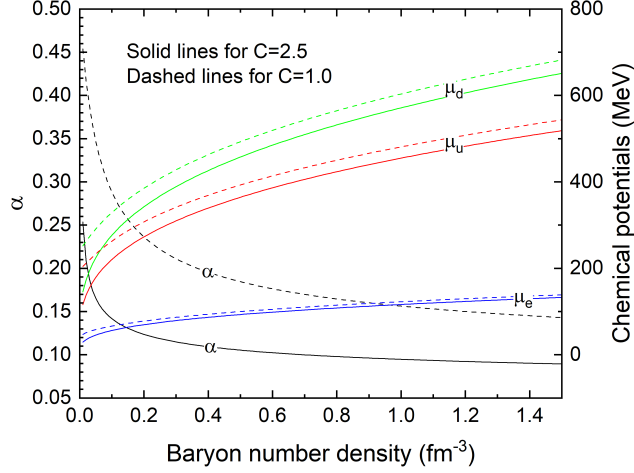


图 5 跑动耦合常数与粒子化学势随密度的变化曲线

Fig. 5. The running coupling constant and particle chemical potentials as functions of baryon number density.

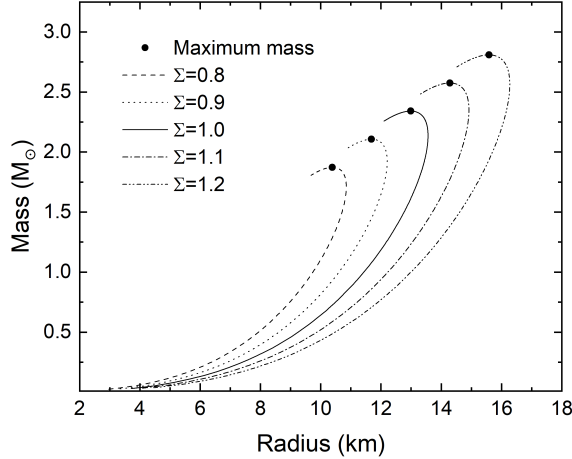


图 6 u-d 夸克星质量随半径的变化关系，其中黑色实心点表示最大质量

Fig. 6. Mass-radius relations for u-d quark star, in which the black solid dots indicate the maximum mass. 用虚线、点线、实线、点划线和双点划线表示. 需要指出的是，在计算此质量-半径关系的图像时，我们只考虑了参数组 $(C, B_0^{1/4}/\text{MeV}) = (2.5, 132)$ ，因为只有在此参数组下 u-d QM 是处于稳定区，从而可以在理论上形成稳定的 QS，并且因为采用了常数化处理的彩虹函数，在这里我们直接给出了修正后的 TOV 方程的计算结果来展示可观测质量和半径的变化. 若采用完整能量依赖的彩虹函数， $\Sigma(x)$ 随星体内部位置改变，那么此时应需要单独绘制可观测质量曲线. 从图中可以看出，即便是 $\Sigma = 1$ 时，也就是在传统广义相

对论理论下, u-d QS 的质量也超过了 $2 M_{\odot}$, 达到了 $2.34 M_{\odot}$. 这表明 EpQCD 模型可以解释目前天文观测中发现的大质量脉冲星^[38-41]. 另外, 可以发现 u-d QS 的质量和半径随着 Σ 值的增大而增大. 这是因为, 一方面 Σ 增大提高了每重子数对应的能量密度, 因而使得同样重子数情况下的引力质量变大; 另一方面, Σ 增大也会使得同样的重子数对应的压强提高, 且二者提高的倍数相同. 总而言之, Σ 增大导致的引力向内坍缩效应与压强向外支撑效应会随 Σ 同步等比例缩放、相互抵消, 因此最大质量对应的紧致度 M/R 保持恒定, 这可以由下面图 7 的结果看出. 实际上, 这类似于在中子星多方物态 $P = K\rho^{\Gamma}$ 中调整比例系数 K , 其结果是同步放大星体总质量与半径, 不会改变星体疏密程度. 这表明, 如果在天文观测中发现超大质量脉冲星且传统理论较难解释时, 则在一定程度上支持引力彩虹理论的合理性.

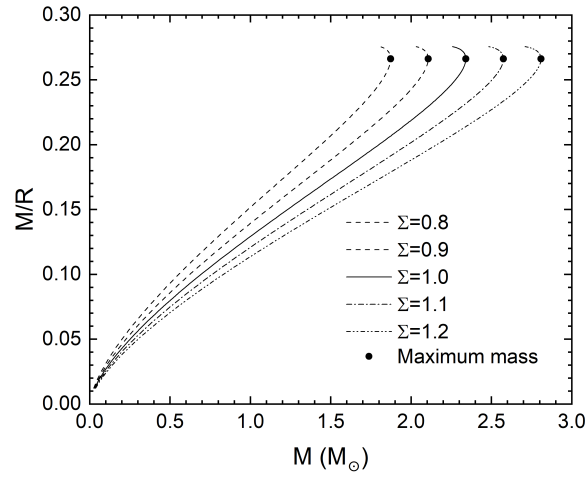


图 7 u-d 夸克星的致密度随星体质量的变化关系曲线, 其中黑色实心点表示最大质量

Fig. 7. Compactness curves of u-d quark star as functions of star mass, in which the black solid dots indicate the maximum mass.

图 7 给出了不同彩虹函数值下 u-d QS 的致密度随星体质量的变化曲线, 其中每条曲线上的黑色实心点表示最大星体质量. 从图中可以看出随着星体质量的增大, u-d QS 的致密度也随之增大. 但是与图 6 中的质量-半径关系不同, u-d QS 的致密度 M/R 的最大值不随彩虹函数 Σ 值的改变而改变, 致密度的最大值均为 0.266. 需要指出的是这一具体数值依赖于模型参数的选择, 即依赖于夸克物质的状态方程, 不同的模型参数下这一具体数值不同. 但在固定的模型参数下, Σ 值的改变不会影响质量最大的星体的致密度. 这一固定值有着重要的意义, 这意味着在引力彩虹理论下, u-d QS 可以在最大质量越来越大时可以保持结构的完整性而不会因引力增大而坍缩. 另外, Buchdahl 极限值 ($C = M/R < 4/9$) 规定任何稳定的、球对称星体的致密度不应超过 0.444^[58], 而此处得到的最大致密度为 0.266 没有超过 Buchdahl 极限

值. 需要说明, 经典 Buchdahl 极限值基于未修正的爱因斯坦引力方程, 该数值并不是引力彩虹理论必须严格遵守的硬性约束, 此处仅作为保守辅助稳定参照标准.

4 结论

在本研究中, 我们基于 EpQCD 模型, 系统计算了 u-d QM 的稳定窗口、状态方程、声速等, 并结合引力彩虹理论, 对 u-d QS 的结构性质进行了研究.

首先, 计算结果表明在 EpQCD 模型中, u-d QM 的稳定窗口可以分成禁止区, 相变区, 以及稳定区. 通过取稳定区内的模型参数值, 可以得到稳定存在的 u-d QM. 需要指出的是, 与禁止区和相变区的面积相比, 稳定区的面积要小的多, 这可以理解为 u-d QM 的产生条件或许较为苛刻, 也可以在一定程度上解释为何目前尚未发现稳定存在的 u-d QM.

其次, EpQCD 模型具有良好的热力学自洽性, 同时模型参数对 u-d QM 的状态方程具有显著的调控作用: 增大参数 C 可以减小微扰相互作用 (吸引作用), 使状态方程变硬; 而减小真空能量密度参数 B_0 可以让夸克结合的更紧密, 同样会使状态方程变硬. 另外, 声速的变化仅依赖参数 C , C 越大声速越大, 更易趋向极端相对论极限的情况, 且较大的 C 值会使得跑动耦合常数更小且更快趋于零, 这导致 EpQCD 具有更强的处理较低密度状态的 u-d QM 的能力.

最后, 我们在引力彩虹理论框架下计算了 u-d QS 的质量-半径关系以及星体的致密度. 结果表明, 在彩虹函数 $\Sigma = 1.0$ 时, 即在传统广义相对论下, u-d QS 的质量也可以达到 $2.34 M_\odot$, 这可以解释目前天文观测中发现的大质量脉冲星. 另外, Σ 做为反映夸克星内部引力作用强弱的关键参数, 当 Σ 值增大时, 夸克星的质量和半径随之增大, 这一结果为天文观测中超大质量脉冲星的解释提供了新的理论视角, 也在一定程度上印证了引力彩虹理论的合理性. 除此之外, QS 的最大致密度不随 Σ 值的改变而变化, 同时低于 Buchdahl 极限, 这表明在引力彩虹理论下, u-d QS 可在质量持续增大的过程中保持结构完整, 不会因引力增强发生坍缩, 揭示了引力彩虹理论在理解稳定的超大质量致密星方面具有较大意义, 也为量子引力修正下致密星物理研究提供了新的思路.

参考文献

- [1] Bai Y, Chen T K 2026 *Eur. Phys. J. C* **86** 147
- [2] Bai Y, Chen T K 2025 *arXiv*: **2502.20241**

- [3] Liu J Y, Fan Z X, Wang L J, Xia C J, Xu R X 2023 *Acta Astron. Sin.* **64** 68
- [4] Chattopadhyay P K, Bhattacharjee D 2025 *arXiv*: **2501.12038**
- [5] Weber F 2005 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **54** 193
- [6] Zhang X L, Huang Y F, Zhou Z C 2024 *Front. Astron. Space Sci.* **11** 1409463
- [7] Yang Z, Zeng T, Yan Y, Yuan W L, Zhang C, Zhou E 2026 *Phys. Rev. D* **113** 023021
- [8] Chen H M, Xia C J, Peng G X 2026 *arXiv*: **2601.11106**
- [9] Zapata J, Sales T, Jaikumar P, Negreiros R 2022 *Astron. Astrophys.* **663** A19
- [10] LIGO Scientific and Virgo Collaboration, Abbott B P, et al 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 061102
- [11] LIGO Scientific and Virgo Collaboration, Abbott B P, et al 2017 *Astrophys. J.* **848** L12
- [12] LIGO Scientific and Virgo Collaboration, Abbott B P, et al 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 161101
- [13] LIGO Scientific and Virgo Collaboration, Abbott R, et al 2020 *Astrophys. J. Lett.* **896** L44
- [14] Witten E 1984 *Phys. Rev. D* **30** 272
- [15] Li C M, Zheng H R, Zuo S Y, Zhao Y P, Wang F, Huang Y F 2025 *Astrophys. J.* **980** 231
- [16] Song X Y 2025 *Phys. Rev. D* **111** 063018
- [17] Zhang C 2020 *Phys. Rev. D* **101** 043003
- [18] Xu J F, Peng G X, Liu F, Hou D F, Chen L W 2015 *Phys. Rev. D* **92** 025025
- [19] Xu R X 2003 *Astrophys. J.* **596** L59
- [20] Peng G X, Chiang H C, Zou B S, Ning P Z, Luo S J 2000 *Phys. Rev. C* **62** 025801
- [21] Holdom B, Ren J, Zhang C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 222001
- [22] Zhao T, Zheng W, Wang F, Li C M, Yan Y, Huang Y F, Zong H S 2019 *Phys. Rev. D* **100** 043018
- [23] Ren J, Zhang C 2020 *Phys. Rev. D* **102** 083003

- [24] Restrepo T E, Providência C, Pinto M B 2023 *Phys. Rev. D* **107** 114015
- [25] Xu J F, Cui L, Xia C J, Lu Z Y 2024 *Nucl. Phys. Rev.* **41** 325
- [26] Xu J F, Wang J T, Xia C J 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 162101
- [27] Wang S P, Lu Z Y, Ma Z J, Yang R Y, Xu J F, Fu X 2025 *Phys. Rev. D* **112** 094036
- [28] Wang L, Hu J, Xia C J, Xu J F, Peng G X, Xu R X 2021 *Galaxies* **9** 70
- [29] Klähn T, Fischer T 2015 *Astrophys. J.* **810** 134
- [30] Xia T, He L Y, Zhuang P F 2013 *Phys. Rev. D* **88** 056013
- [31] Wen X J, Feng Z Q, Li N, Peng G X 2009 *J. Phys. G* **36** 025011
- [32] Li B L, Cui Z F, Yu Z H, Yan Y, An S, Zong H S 2019 *Phys. Rev. D* **99** 043001
- [33] Zhang C, Gao Y, Xia C J, Xu R X 2023 *Phys. Rev. D* **108** 063002
- [34] Xia C J, Peng G X, Chen S W, Lu Z Y, Xu J F 2014 *Phys. Rev. D* **89** 105027
- [35] Chen S W, Gao L, Peng G X 2012 *Chin. Phys. C* **36** 947
- [36] Xu J F, Cui L, Lu Z Y, Xia C J, Peng G X 2023 *Nucl. Sci. Tech.* **34** 171
- [37] Xu J F, Peng G X, Lu Z Y, Cui S S 2015 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **58** 042001
- [38] Demorest P, Pennucci T, Ransom S M, Roberts M S E, Hessels J W T 2010 *Nature* **467** 1081
- [39] Antoniadis J, Freire P C C, Wex N, Tauris T M, Lynch R S, Kerkwijk M H V, Kramer M, Bassa C, Dhillon V S, Driebe T, Hessels J W T, Kaspi V M, Kondratiev V I, Langer N, Marsh T R, McLaughlin M A, Pennucci T T, Ransom S M, Stairs I H, Leeuwen J V, Verbiest P W, Whelan D G 2013 *Science* **340** 1233232
- [40] Cromartie H T, Fonseca E, Ransom S M, Demorest P B, Arzoumanian Z, Blumer H, Brook P R, DeCesar M E, Dolch T, Ellis J A, Ferdman R D, Ferrara E C, Garver-Daniels N, Gentile P A, Jones M L, Lam M T, Lorimer D R, Lynch R S, McLaughlin M A, Ng C, Nice D J, Pennucci T T, Spiewak R, Stairs I H, Stovall K, Swiggum J K, Zhu W W 2020 *Nat. Astron.* **4** 72

- [41] Fonseca E, Cromartie H T, Pennucci T T, Ray P S, Kirichenko A Y, Ransom S M, Demorest P B, Stairs I H, Arzoumanian Z, Guillemot L, Parthasarathy A, Kerr M, Cognard I, Baker P T, Blumer H, Brook P R, DeCesar M, Dolch T, Dong F A, Ferrara E C, Fiore W, Garver-Daniels N, Good D C, Jennings R, Jones M L, Kaspi V M, Lam M T, Lorimer D R, Luo J, McEwen A, McKee J W, McLaughlin M A, McMann N, Meyers B W, Naidu A, Ng C, Nice D J, Pol N, Radovan H A, Shapiro-Albert B, Tan C M, Tendulkar S P, Swiggum J K, Wahl H M, Zhu W W 2021 *Astrophys. J. Lett.* **915** L12
- [42] Magueijo J, Smolin L 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 1725–1736
- [43] Kostelecký V A, Samuel S 1989 *Phys. Rev. D* **39** 683
- [44] Gambini R, Pullin J 1999 *Phys. Rev. D* **59** 124021
- [45] Carroll S M, Harvey J A, Kostelecký V A, Lane C D, Okamoto T 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 141601
- [46] Haensel P, Zdunik J L, Schaefer R 1986 *Astron. Astrophys.* **160** 121
- [47] Freedman B A, McLerran L D 1977 *Phys. Rev. D* **16** 4
- [48] Fraga E S, Romatschke P 2005 *Phys. Rev. D* **71** 105014
- [49] Gell-Mann M, Low F E 1954 *Phys. Rev.* **95** 1300
- [50] Peng G X 2006 *Phys. Lett. B* **634** 413
- [51] Fraga E S, Pisarski R D, Schaffner-Bielich J 2002 *Nucl. Phys. A* **702** 217
- [52] Hendi S H, Bordbar G H, Panah B E, Panahiyan S 2016 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **09** 013
- [53] Tangphati T, Sakallı İ, Banerjee A, Pradhan A 2024 *Phys. Dark Universe* **46** 101610
- [54] Banerjee A, Dayanandan B, Rayimbaev J, Murodov S, Ibragimov I, Muminov S, Davletov I 2025 *Eur. Phys. J. C* **85** 1164
- [55] Banerjee A, Turimov B, Usanov S, Vapaev M, Turaev Y, Avezmuratova Z 2025 *arXiv*: 2510.17362

- [56] Banerjee A, Karar I, Rayimbaev J, Ibragimov I, Murodov S, Muminov S, Jumaniyozov S 2025 *Chin. Phys. C* **49** 125106
- [57] Xu J F, Luo Y A, Li L, Peng G X 2017 *Int. J. Mod. Phys. E* **26** 1750034
- [58] Buchdahl H A 1959 *Phys. Rev.* **116** 1027

录用稿件，非最终出版稿

u-d Quark Matter in the Enhanced pQCD Model and u-d Quark Stars in Gravity's Rainbow*

CUI Lei¹⁾ CHEN Huaimin²⁾ LU Zhenyan³⁾ XIA Chengjun⁴⁾ XU
Jianfeng¹⁾†

1) (*School of Mathematics and Physics, Suqian University, Suqian 223800, China*)

2) (*School of Mechanical and Electrical Engineering, Wuyi University, Wuyishan 354300, China*)

3) (*School of Physics and Electronics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China*)

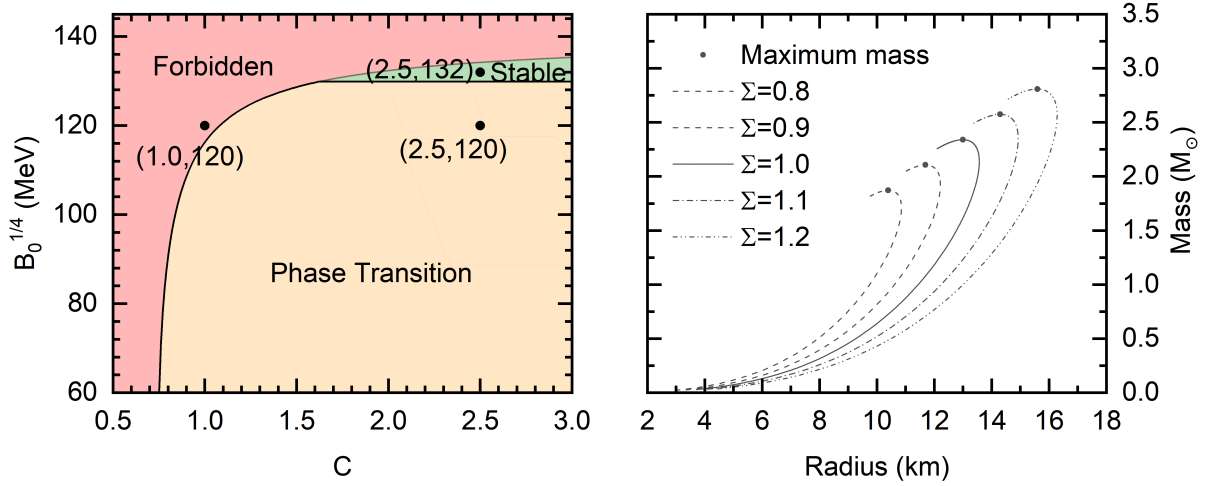
4) (*Center for Gravitation and cosmology, College of physical science and Technology, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China*)

Abstract

Recent studies have revealed that two-flavor u-d quark matter may serve as the true ground state of quantum chromodynamics (QCD). Meanwhile, a growing number of supermassive compact stars have been detected observationally, which brings severe challenges to explaining the internal matter composition of these compact objects. In this work, we systematically explore the parameter stability window of u-d quark matter within the enhanced perturbative QCD (EpQCD) model, and further investigate the structural properties of u-d quark stars under the framework of gravity's rainbow theory.

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12005005, 12275234, 12205093), the Scientific Research Start-up Fund of Talent Introduction of Suqian University (No. Xiao2022XRC061), The interdisciplinary Integration and Innovation Project of Suqian university (2025XKTD02), the Natural Science Foundation of Fujian (No. 2024J01319), and the Young and Middle-aged Teachers' Educational Research Project of Fujian (No. JAT231123).

† Corresponding author. E-mail: xujf@squ.edu.cn (通信作者)



By constructing a well-defined renormalization subtraction point, the EpQCD model successfully eliminates the thermodynamic inconsistency plaguing conventional perturbative QCD, and partially incorporates the global effect of quark confinement into the theoretical framework. As a quantum gravity candidate, gravity's rainbow theory can effectively modify gravitational interactions inside compact stars via tuning rainbow function parameters, which provides a feasible theoretical scheme to account for extremely massive compact stars.

The left panel illustrates the stability window of u-d quark matter, while the right panel displays the mass-radius relation of u-d quark stars derived from gravity's rainbow. The stability diagram indicates that the green stable parameter region is far narrower than the forbidden and phase-transition zones, yet absolute stable u-d quark matter is still theoretically achievable. Selecting representative parameters from the stable region, we compute the equilibrium structure of u-d quark stars and find that the maximum stellar mass rises monotonically with the rainbow function parameter Σ . Under the limit of standard general relativity ($\Xi = \Sigma = 1$), the maximum mass of a u-d quark star reaches $2.34 M_\odot$. Notably, when $\Sigma = 1.2$, the peak mass climbs to approximately $2.8 M_\odot$, consistent with the mass range of the compact companion in the GW190814 gravitational-wave event. Our results provide a novel perspective to interpret the intrinsic nature of ultra-massive compact stars, and advance our physical insights into the low-energy regime of quantum gravity.

Keywords: Quark matter, Quark star, Equation of state, Gravity's rainbow