

退化扫描条件下白光干涉测量的统一 Cramér–Rao 下界分析：加性噪声与机械振动的联合建模 *

陈禹岚¹⁾²⁾ 刘安琪¹⁾ 何佳祺¹⁾²⁾ 张文喜^{1)2)†}

1) (中国科学院空天信息创新研究院, 北京 100049)

2) (中国科学院大学光电学院, 北京 100049)

白光扫描干涉仪 (White-Light Scanning Interferometry, WLSI) 是纳米计量领域的核心工具, 广泛应用于半导体先进封装、增材制造等场景。然而, 实际测量过程中同时存在的探测器加性噪声与机械振动扰动, 使得系统精度的理论评估面临严峻挑战。现有 Cramér–Rao 下界 (CRLB) 研究通常仅针对加性噪声单独建模, 尚未将加性噪声与机械振动噪声纳入同一统一框架加以系统分析。本文针对退化扫描条件, 建立了同时包含探测器加性圆对称复高斯噪声与相关机械振动扰动的统一复观测模型, 并在该模型下系统推导包络峰值位置 z_M 与绝对相位 φ_0 的 CRLB。在纯加性噪声条件下, 证明了 z_M 与 φ_0 在 Fisher 意义下的参数正交性。针对相关机械振动, 引入 Hybrid Cramér–Rao Bound 框架, 利用 Schur 补与 Woodbury 恒等式给出含等效残余振动协方差矩阵 $\mathbf{T}$ 的闭式表达, 揭示振动对两参数边缘下界的抬升效应及其潜在统计耦合。进一步分析了相对形貌测量中的公共振动抵消机制, 并针对常数漂移与窄带单频振动两类典型工况给出频率敏感度的解析表达式。所得理论结果可直接用于白光干涉系统的误差预算、参数优化与抗振设计。

关键词: 白光扫描干涉仪; Cramér–Rao 下界; 机械振动; Hybrid Fisher 信息

PACS: 07.60.Ly, 06.20.Dk, 02.50.Tt, 42.25.Hz

1 引言

白光扫描干涉仪, 又称相干扫描干涉仪 (Coherent Scanning Interferometry, CSI), 是现代精密计量领域应用最为广泛的三维表面形貌测量技术之一^[1,2]。其核心原理是利用宽带光源的短相干长度, 通过逐

† 通信作者. E-mail: zhangwenxi@aoe.ac.cn

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: (2022YFF0706300)).

步扫描参考臂，在每个像素处定位干涉信号包络的峰值位置，从而重建被测表面的三维形貌。与单色干涉术（Phase Shift Interferometry, PSI）相比，白光干涉技术无需解决 2π 相位模糊问题，测量范围可扩展至数百微米乃至毫米量级，同时保持亚纳米级的纵向分辨率^[3,4]。正是凭借这一兼顾大量程与高精度的独特优势，白光干涉技术在过去数十年间持续向高端应用场景渗透：在半导体先进封装领域，其被用于混合键合界面的纳米级形貌检测，评估 Cu/介质界面的凹陷与台阶高度^[5]；在增材制造中，其可对激光粉末床熔融成形工件的倾斜表面进行三维形貌与面积粗糙度参数的在线检测^[6]；在薄膜与界面研究中，其可同步获取液体薄膜的三维轮廓与 DLC、薄石墨层等材料的局部反射谱^[7,8]。这些应用场景对测量不确定度提出了日益严苛的指标，推动了白光干涉测量精度理论分析的深入发展。

然而，实际测量系统的精度受到多类噪声源的共同制约。在探测器层面，散粒噪声和读出噪声构成加性噪声的主要来源，其统计特性通常可近似为圆对称复高斯分布；在系统层面，低频地基振动、扫描机构自激振动与声学扰动均会随机调制实际扫描位置，使干涉包络峰值位置与绝对相位同时受到扰动，成为制约绝对测量精度的关键瓶颈^[9]。上述噪声源在实际测量中并非孤立存在，而是同时作用于同一观测信号，因此有必要在统一的理论框架下对其精度影响进行系统评估。

从统计估计理论的角度，Cramér–Rao 下界（Cramér–Rao Lower Bound, CRLB）给出了任意无偏估计量方差的理论极限，是评估测量系统极限精度的基本工具^[10,11]。将 CRLB 应用于白光干涉参数估计的系统性研究已取得若干重要进展。Lehmann 等人从频域角度分析了白光干涉信号的不确定度传播与分辨率极限^[12]；Pavliček 等人研究了包络峰值定位算法的统计性能与理论精度极限^[13–15]；这些工作共同构成了白光干涉 CRLB 研究的重要基础，表明针对加性噪声的精度下界分析已具备相对系统的理论体系。

尽管如此，现有研究在机械振动噪声的建模深度上仍存在明显局限。现有 CRLB 研究大多仅针对加性噪声单独建模，对机械振动的分析通常停留于定性描述或基于特定补偿算法的实验验证层面^[16,17]，尚未将加性噪声与机械振动扰动纳入统一的 Fisher 信息框架进行系统推导。这一空白意味着，在同时存在加性噪声与机械振动的实际测量条件下，白光干涉系统的理论精度极限究竟如何，两类噪声源之间是否存在相互作用，以及相对形貌测量能在多大程度上抑制公共振动误差，目前均缺乏严格的理论依据。

有鉴于此，本文针对退化扫描条件下的白光干涉测量，建立同时包含曝光积分运动模糊、探测器加性噪声与机械振动扰动的统一复观测模型，并在此框架下系统推导包络峰值位置 z_M 与绝对相位 φ_0 的理论精度下界。本文其余内容组织如下：第 2 节建立退化扫描信号的统一复观测模型；第 3 节分析纯加性噪声下的参数正交性；第 4 节引入 Hybrid Fisher 信息模型处理相关振动；第 5 节讨论相对形貌测量中的公共

振动抵消机制及典型工况；第 6 节给出结论与展望。

2 退化扫描信号的统一复观测模型

在实际扫描白光干涉测量中，观测信号不仅受到探测器加性噪声的影响，还会受到曝光积分、扫描运动模糊以及机械振动等因素的共同扰动。设相机采样步长为 Δz ，扫描速度为 v ，曝光时间为 T ，中心波长为 λ_0 。在曝光时间内，目标或扫描机构的持续运动会引起干涉条纹对比度下降。对于载波频率 $2v/\lambda_0$ 的干涉条纹，该积分效应可由衰减系数

$$\eta = \text{sinc}\left(\frac{2vT}{\lambda_0}\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{2vT}{\lambda_0}\right)}{\pi \frac{2vT}{\lambda_0}} \quad (1)$$

描述。该系数可并入交流项幅值中，用于统一刻画运动模糊对有效信号强度的削弱。

令第 k 个采样位置为

$$z_k = k\Delta z, \quad (2)$$

机械振动引起的扫描方向位移为 ζ_k 。与仅将振动视为相位扰动的模型不同，本文将 ζ_k 作为实际扫描位置的随机扰动，因此它会同时改变干涉包络的位置和载波相位。去除直流分量后，解析信号观测模型写为

$$y_k = A(z_k + \zeta_k - z_M) \exp[j(K(z_k + \zeta_k) + \varphi_0)] + n_k, \quad (3)$$

其中

$$K = \frac{4\pi}{\lambda_0}, \quad (4)$$

z_M 为包络峰值位置， φ_0 为全局绝对相位， n_k 为圆对称复高斯加性噪声。高斯包络幅度定义为

$$A(u) = \eta I_A \exp\left[-\left(\frac{u}{l_c}\right)^2\right], \quad (5)$$

其中 I_A 为未衰减的交流幅度， l_c 为相干长度，用于表征白光干涉包络在扫描方向上的有效宽度。对于中心波长为 λ_0 、光谱宽度为 $\Delta\lambda$ 的宽带光源，相干长度通常与 $\lambda_0^2/\Delta\lambda$ 成正比；若光源光谱近似为高斯分布，则具体比例系数取决于谱宽定义方式以及相干长度的约定。本文采用式 (5) 中的高斯包络形式，因此 l_c 在后续推导中作为包络宽度参数进入 Fisher 信息矩阵。

为了直观说明式 (3) 中包络、载波周期以及包络峰值位置之间的关系，图 1 给出了典型白光干涉曲线示意图，用于辅助理解后续推导中的 z_M 、 l_c 、 λ_0 及条纹周期等物理量。

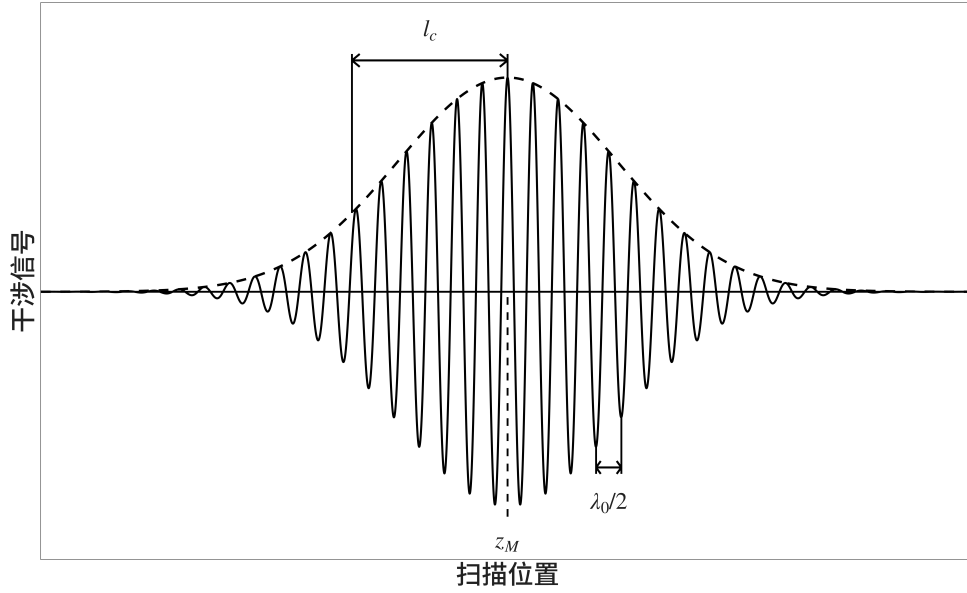


图 1 白光干涉曲线及主要参数示意图

Fig. 1. White-light interferogram and its main parameters.

振动向量记为

$$\zeta = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{N-1}]^T, \quad (6)$$

其统计特性由协方差矩阵

$$\Sigma_\zeta = E[\zeta \zeta^T] \quad (7)$$

刻画。若振动是平稳随机过程，则有

$$[\Sigma_\zeta]_{ij} = R_\zeta(t_i - t_j), \quad (8)$$

其中 $R_\zeta(\tau)$ 为振动位移的自相关函数。对应的等效相位扰动为

$$\theta = K\zeta, \quad \Sigma_\theta = K^2 \Sigma_\zeta. \quad (9)$$

需要强调的是，式 (3) 描述的是扫描方向上的机械位移扰动。只有在这种模型下，振动才会同时影响包络定位和相位估计。若某些误差源只表现为读出相位噪声，而不引起实际扫描位置变化，则其只应进入相位协方差项，而不应产生后文中的包络-振动耦合项。

图 2 展示了退化扫描信号中的误差传播路径。图中从理想扫描位置出发，依次引入机械振动引起的自变量扰动、物理前向模型中的非线性响应、探测器加性噪声以及统计推断中的似然函数，最终得到由 Fisher 信息矩阵决定的 Cramér-Rao 下界。

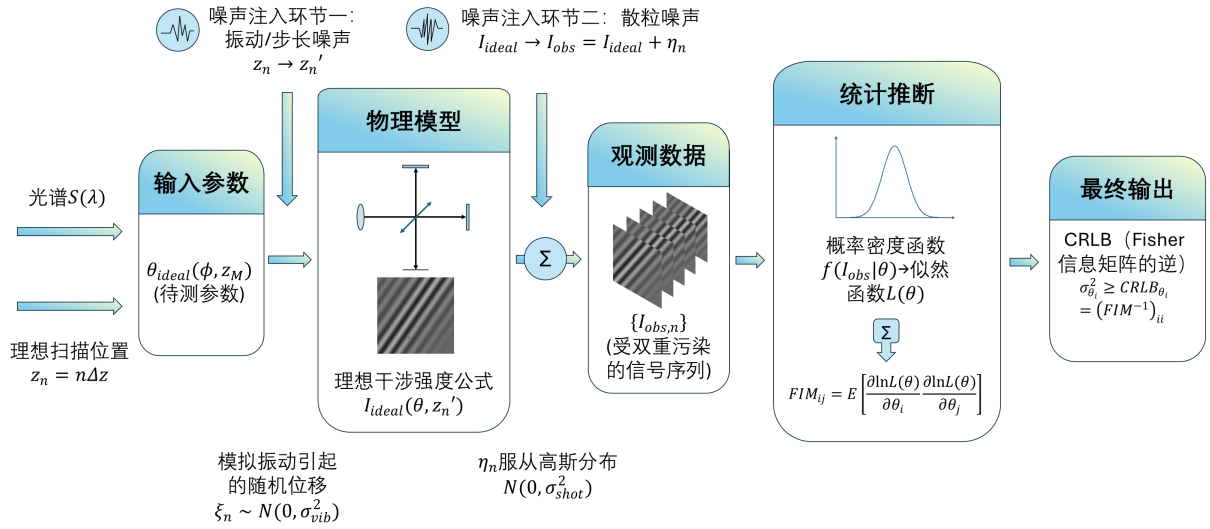


图 2 退化扫描信号中的误差传播路径示意图

Fig. 2. Error propagation path in degraded scanning interferometric signals.

3 纯加性噪声下的参数正交性

首先考虑无机械振动的理想情形，即

$$\zeta = 0. \quad (10)$$

此时观测均值为

$$\mu_k = A_k(z_M) \exp[j(Kz_k + \varphi_0)], \quad (11)$$

其中

$$A_k(z_M) = A(z_k - z_M). \quad (12)$$

在圆对称复高斯加性噪声下，实参数 Fisher 信息矩阵的元素可写为

$$J_{ij} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial a_i} \right)^* \frac{\partial \mu_k}{\partial a_j} \right\}, \quad (13)$$

其中 σ_n^2 的具体系数取决于复噪声方差的约定；本文后续公式均采用同一约定。

对 z_M 和 φ_0 求偏导，可得

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial z_M} = \frac{\partial A_k}{\partial z_M} \exp[j(Kz_k + \varphi_0)], \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial \varphi_0} = j A_k \exp[j(Kz_k + \varphi_0)]. \quad (15)$$

前者对应复平面中的径向幅度扰动，后者对应切向相位扰动。二者在 Fisher 内积下正交，因此

$$\begin{aligned} J_{z_M, \varphi_0} &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial A_k}{\partial z_M} e^{j(Kz_k + \varphi_0)} \right)^* j A_k e^{j(Kz_k + \varphi_0)} \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ j A_k \frac{\partial A_k}{\partial z_M} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

因此，在纯加性圆对称复高斯噪声且 z_M 与 φ_0 被视为独立待估参数的条件下，包络峰值位置与绝对相位在 Fisher 意义下相互正交。这一定理并不依赖于幅度噪声和相位噪声的近似分解，而是直接来自复高斯观测模型中径向扰动与切向扰动的正交性。

定义包络敏感度和相位敏感度为

$$w_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \left(\frac{\partial A_k}{\partial z_M} \right)^2, \quad W = \sum_{k=0}^{N-1} w_k, \quad (17)$$

$$s_k = \frac{A_k^2}{\sigma_n^2}, \quad S_0 = \sum_{k=0}^{N-1} s_k. \quad (18)$$

则无振动条件下的理想 CRLB 为

$$\operatorname{CRLB}_0(z_M) = \frac{1}{J_{z_M, z_M}} = \frac{1}{W}, \quad \operatorname{CRLB}_0(\varphi_0) = \frac{1}{J_{\varphi_0, \varphi_0}} = \frac{1}{S_0}. \quad (19)$$

在高斯包络且采样足够密集时，离散求和可近似为连续积分，从而得到与经典白光干涉测量不确定度理论一致的闭式表达。在本文采用的噪声方差约定下，可写为

$$\operatorname{CRLB}_0(z_M) = \frac{2\sigma_n^2 \Delta z}{I_A^2 \eta^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} l_c, \quad (20)$$

$$\operatorname{CRLB}_0(\varphi_0) = \frac{2\sigma_n^2 \Delta z}{I_A^2 \eta^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{l_c}. \quad (21)$$

上述结果说明，绝对相位的估计下界与光源相干长度 l_c 成反比，因为 l_c 越大，干涉信号中可利用的有效条纹数目越多，相位估计的精度随之提升。与之相反，包络中心定位的估计方差与 l_c 成正比，因为相干长度越大，干涉包络的形态越趋于平坦，系统对包络峰值位置的敏感度随之降低，从而导致定位误差增大。上述理论推导结果与经典的 Fleischer 等人的理论高度吻合，进一步验证了所建立分析框架的正确性^[13–15]。

4 相关振动下的 Hybrid Fisher 信息模型

引入机械振动后， ζ 既不是固定的系统参数，也不是逐点独立的白噪声，而是具有已知二阶统计特性的随机干扰过程。因此，本文采用 Hybrid Cramér–Rao Bound 框架^[18]：目标参数 (z_M, φ_0) 被视为确定未知量，振动向量 ζ 被视为具有协方差 Σ_ζ 的随机扰动。

在 $\zeta = \mathbf{0}$ 附近线性化式 (3)，可得全参数向量

$$\Theta = [z_M, \varphi_0, \zeta^T]^T \quad (22)$$

对应的 Hybrid Fisher 信息矩阵：

$$\mathbf{J}_{\text{hyb}} = \begin{pmatrix} W & 0 & | & -\mathbf{w}^T \\ 0 & S_0 & | & K\mathbf{s}^T \\ - & - & - & - \\ -\mathbf{w} & K\mathbf{s} & | & \mathbf{D} + \Sigma_\zeta^{-1} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{w}) + K^2 \text{diag}(\mathbf{s}). \quad (24)$$

式 (23) 的物理含义十分明确： $\mathbf{w}$ 描述振动位移通过包络形状扰动影响 z_M 估计的强度， $K\mathbf{s}$ 描述振动位移通过载波相位扰动影响 φ_0 估计的强度，而 Σ_ζ^{-1} 则是振动先验提供的正则化信息。

将振动自由度边缘化，可由 Schur 补得到目标参数的降维信息矩阵

$$\mathbf{J}_{\text{red}} = \mathbf{J}_0 - \mathbf{C} (\mathbf{D} + \Sigma_\zeta^{-1})^{-1} \mathbf{C}^T, \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\mathbf{w}^T \\ K\mathbf{s}^T \end{pmatrix}. \quad (26)$$

进一步利用 Woodbury 恒等式，可将 CRLB 矩阵写为

$$\mathbf{CRLB} = \mathbf{J}_0^{-1} + \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{C}^T \mathbf{J}_0^{-1}, \quad (27)$$

其中

$$\mathbf{T} = (\Sigma_\zeta^{-1} + \mathbf{P})^{-1}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_w + K^2 \mathbf{P}_s, \quad (28)$$

并有

$$\mathbf{P}_w = \text{diag}(\mathbf{w}) - \frac{1}{W} \mathbf{w} \mathbf{w}^T, \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_s = \text{diag}(\mathbf{s}) - \frac{1}{S_0} \mathbf{s} \mathbf{s}^T. \quad (30)$$

矩阵 $\mathbf{P}_w$ 与 $\mathbf{P}_s$ 均满足

$$\mathbf{P}_w \mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_s \mathbf{1} = \mathbf{0}. \quad (31)$$

这说明仅依靠观测数据，系统无法区分全局常数漂移与目标参数本身的整体偏移。常数振动模式只能由先验协方差约束，而无法被数据完全辨识。

当 Σ_ζ 非奇异时，式 (28) 可等价写为

$$\mathbf{T} = \Sigma_\zeta (\mathbf{I} + \mathbf{P}\Sigma_\zeta)^{-1}. \quad (32)$$

若 Σ_ζ 为低秩或奇异矩阵，例如常数漂移或单频振动工况，则不能直接使用普通逆。此时可采用正则化极限定义：

$$\mathbf{T} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \Sigma_{\zeta, \epsilon} (\mathbf{I} + \mathbf{P}\Sigma_{\zeta, \epsilon})^{-1}, \quad \Sigma_{\zeta, \epsilon} = \Sigma_\zeta + \epsilon \mathbf{I}. \quad (33)$$

这样可以避免对奇异协方差矩阵直接求逆。

由式 (27) 可得完整的二维 CRLB 矩阵：

$$\mathbf{CRLB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{W} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{W^2} \mathbf{w}^T \mathbf{T} \mathbf{w} & -\frac{K}{W S_0} \mathbf{w}^T \mathbf{T} \mathbf{s} \\ -\frac{K}{W S_0} \mathbf{s}^T \mathbf{T} \mathbf{w} & \frac{K^2}{S_0^2} \mathbf{s}^T \mathbf{T} \mathbf{s} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

因此，相关振动存在时， z_M 与 φ_0 一般会通过公共振动过程产生间接耦合。只有在

$$\mathbf{w}^T \mathbf{T} \mathbf{s} = 0 \quad (35)$$

的特殊情况下，二者的边缘 CRLB 矩阵才重新对角化。这意味着纯加性噪声下的参数正交性并不等价于复杂振动工况下的完全解耦。

从式 (34) 的对角元素可得到两个边缘下界：

$$\text{CRLB}(z_M) = \frac{1}{W} + \frac{1}{W^2} \mathbf{w}^T \mathbf{T} \mathbf{w}, \quad (36)$$

$$\text{CRLB}(\varphi_0) = \frac{1}{S_0} + \frac{K^2}{S_0^2} \mathbf{s}^T \mathbf{T} \mathbf{s}. \quad (37)$$

其中第一项是纯加性噪声下的理想极限，第二项是相关振动引起的额外误差惩罚。

为展示本文理论下界模型对关键系统参数的响应规律，本节基于式 (21)、式 (36) 和式 (37) 对 CRLB / Hybrid CRLB 进行数值可视化。在该数值分析中，振动噪声首先取为白噪声模型，即不同采样点处的扫描位移扰动相互独立，其强度由振动位移标准差 σ_p 表征。除横轴所扫描的信噪比、光谱宽度、采样步长或振动水平外，其余系统参数保持为同一组基准值。

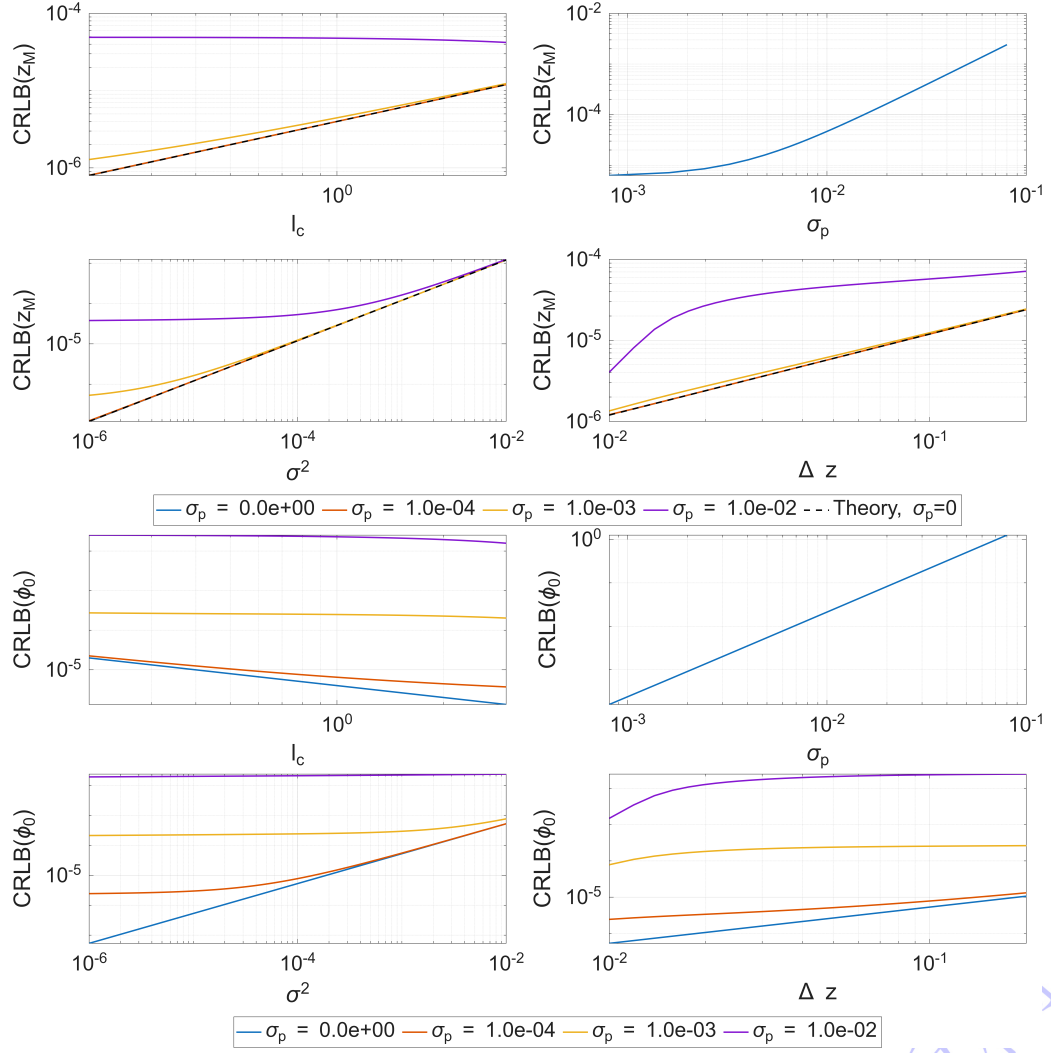


图 3 理论测量下界随关键系统参数变化的曲线

Fig. 3. Theoretical lower bounds as functions of key system parameters.

由图 3 可见，当 $\sigma_p = 0$ 时，Hybrid CRLB 退化为纯加性噪声条件下的普通 CRLB，其数值结果与式 (21) 给出的解析幂律关系一致。随着振动噪声水平 σ_p 增大， z_M 与 φ_0 的理论下界均相对于纯加性噪声情形出现抬升，表明扫描方向的随机振动会降低两类参数估计的理论可达精度。同时，两类参数对振动扰动的敏感性并不相同：在当前参数设置下，振动噪声对绝对相位 φ_0 下界的影响更为显著，而对包络峰值位置 z_M 下界的影响相对较弱。这一现象与式 (36) 和式 (37) 中振动惩罚项的结构一致。

为了从工程角度说明不同误差源的主导关系，可根据式 (36) 和式 (37) 绘制噪声主导区划图，如图 4 所示。图中横轴可取探测器加性噪声水平、散粒噪声水平或等效信噪比，纵轴可取步长噪声或振动位移标准差。当加性噪声项 $1/W$ 或 $1/S_0$ 占主导时，系统处于探测噪声主导区域；当振动惩罚项占主导时，系统处于步长噪声或振动噪声主导区域。

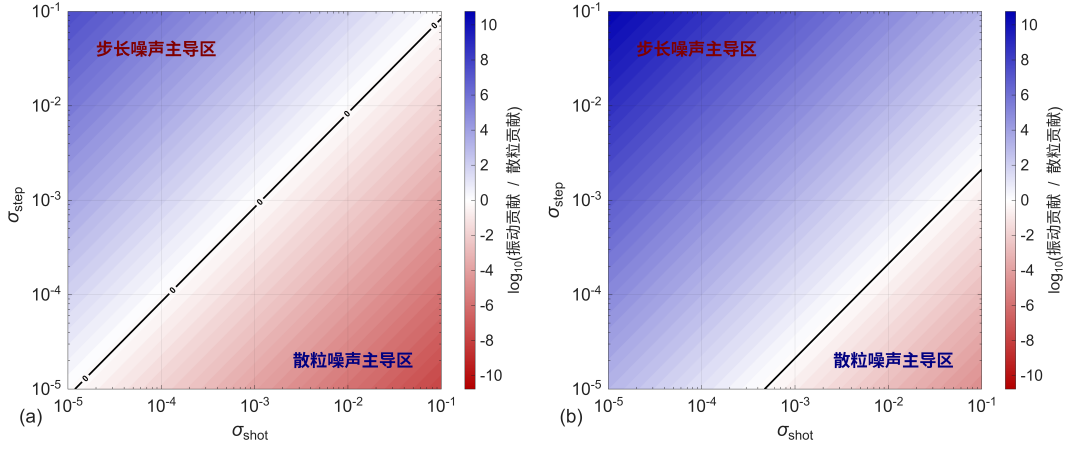


图 4 探测噪声与步长噪声的主导区域划分。

(a) $CRLB(z_M)$ (b) $CRLB(\varphi_0)$

Fig. 4. Region map of detector-noise-dominated and step-noise-dominated regimes.

(a) $CRLB(z_M)$ (b) $CRLB(\varphi_0)$

5 相对形貌测量中的公共振动抵消

上文给出的 CRLB 描述的是单个像素点绝对位置的估计精度。然而，表面形貌测量真正关心的是像素之间的相对高度差。对于两个像素 A 和 B，其包络峰值位置估计量分别记为 z_A 和 z_B ，相对高度估计量为

$$\Delta z_M = z_A - z_B. \quad (38)$$

由于两个像素在同一次扫描过程中受到同一机械振动背景的影响， z_A 与 z_B 的估计误差一般不是相互独立的，而是通过公共振动过程产生统计相关性。

以包络峰值定位为例，单像素绝对方差可写为

$$\text{Var}(z_A) = \frac{1}{W} + \frac{1}{W^2} \mathbf{w}_A^T \mathbf{T} \mathbf{w}_A, \quad (39)$$

$$\text{Var}(z_B) = \frac{1}{W} + \frac{1}{W^2} \mathbf{w}_B^T \mathbf{T} \mathbf{w}_B. \quad (40)$$

其中 $\mathbf{w}_A$ 和 $\mathbf{w}_B$ 分别表示两个像素的包络敏感度向量， $\mathbf{T}$ 为经过数据约束后的等效残余振动协方差矩阵：

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Sigma}_\zeta (\mathbf{I} + \mathbf{P} \mathbf{\Sigma}_\zeta)^{-1}. \quad (41)$$

两像素之间的互协方差为

$$\text{Cov}(z_A, z_B) = \frac{1}{W^2} \mathbf{w}_A^T \mathbf{T} \mathbf{w}_B. \quad (42)$$

这一互协方差项具有明确的物理含义：它度量了两个像素对同一段残余振动历史的共同响应。若某一振动分量被两个像素以相同方式感知，则该振动分量会同时推高或降低 z_A 与 z_B ，从而在二者之间产生正相关误差。正是这种正相关性，使得差分测量能够抑制公共振动模式。

根据方差传播公式，相对高度的理论下界为

$$\begin{aligned} \text{CRLB}(\Delta z_M) &= \text{Var}(z_A - z_B) \\ &= \text{Var}(z_A) + \text{Var}(z_B) - 2\text{Cov}(z_A, z_B). \end{aligned} \quad (43)$$

将上述三式代入，可得

$$\begin{aligned} \text{CRLB}(\Delta z_M) &= \frac{2}{W} + \frac{1}{W^2} (\mathbf{w}_A^T \mathbf{T} \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_B^T \mathbf{T} \mathbf{w}_B - 2\mathbf{w}_A^T \mathbf{T} \mathbf{w}_B) \\ &= \frac{2}{W} + \frac{1}{W^2} (\mathbf{w}_A - \mathbf{w}_B)^T \mathbf{T} (\mathbf{w}_A - \mathbf{w}_B). \end{aligned} \quad (44)$$

式 (44) 表明，振动对相对形貌测量的影响并不取决于单个像素对振动的绝对敏感度，而取决于两个像素振动敏感度之间的差异。当 $\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_B$ 时，两像素完全共同感知同一振动模式，该公共振动分量在差分运算中被严格抵消。因此，相对形貌测量天然地抑制公共低频漂移，而主要受两个像素响应差异所对应的非公共振动分量影响。

类似地，对于相位估计，有

$$\begin{aligned} \text{CRLB}(\Delta \varphi_0) &= \text{Var}(\varphi_A - \varphi_B) \\ &= \frac{2}{S_0} + \frac{K^2}{S_0^2} (\mathbf{s}_A - \mathbf{s}_B)^T \mathbf{T} (\mathbf{s}_A - \mathbf{s}_B). \end{aligned} \quad (45)$$

需要说明的是，若进一步构造一个同时估计两个像素参数和公共振动过程的联合最优估计问题，则两个像素的观测数据都会对公共振动提供约束。在这种严格联合 Hybrid CRLB 情形下，式 (44) 和式 (45) 中的 $\mathbf{T}$ 应替换为由联合信息矩阵得到的等效残余协方差 $\mathbf{T}_{AB}$ 。因此，使用统一的 $\mathbf{T}$ 可以直观描述给定残余振动背景下的误差传播，而 $\mathbf{T}_{AB}$ 则对应更严格的联合估计下界。二者反映的问题层次不同：前者突出公共振动抵消的物理机制，后者则适用于评价多像素联合估计器所能达到的最优性能。

5.1 典型振动工况一：常数漂移

当振动频率远低于扫描带宽时，可将整个扫描过程中的机械扰动近似为一个随机常数漂移：

$$\Sigma_\zeta = \sigma_v^2 \mathbf{1}\mathbf{1}^T. \quad (46)$$

由于

$$\mathbf{P}\mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad (47)$$

有

$$\mathbf{P}\Sigma_{\zeta} = \sigma_v^2(\mathbf{P}\mathbf{1})\mathbf{1}^T = \mathbf{0}. \quad (48)$$

因此有效振动协方差退化为

$$\mathbf{T} = \Sigma_{\zeta} = \sigma_v^2 \mathbf{1}\mathbf{1}^T. \quad (49)$$

这表明常数漂移完全落入数据约束矩阵的零空间，无法由单次扫描数据自身辨识。

代入式 (34)，可得单像素绝对估计的 CRLB 矩阵

$$\mathbf{CRLB}_{\text{drift}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{W} + \sigma_v^2 & -K\sigma_v^2 \\ -K\sigma_v^2 & \frac{1}{S_0} + K^2\sigma_v^2 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

因此，

$$\text{CRLB}(z_M) = \frac{1}{W} + \sigma_v^2, \quad (51)$$

$$\text{CRLB}(\varphi_0) = \frac{1}{S_0} + K^2\sigma_v^2. \quad (52)$$

常数漂移直接作为不可约误差底限叠加到绝对高度估计中，同时以 $K^2\sigma_v^2$ 的形式叠加到绝对相位估计中。

此外，式 (50) 中非零的非对角项 $-K\sigma_v^2$ 表明，在公共漂移存在时，绝对高度与绝对相位估计并非完全解耦。

对于相对形貌，由于常数漂移在两个像素中表现为公共误差，其在差分测量中严格抵消。因此

$$\text{CRLB}(\Delta z_M) = \frac{2}{W}, \quad (53)$$

$$\text{CRLB}(\Delta \varphi_0) = \frac{2}{S_0}. \quad (54)$$

这说明常数漂移对单像素绝对测量有害，但对理想同步条件下的相对形貌测量不产生额外误差。

5.2 典型振动工况二：窄带单频振动

进一步考虑窄带单频振动。设振动频率为 f_v ，等效功率为 σ_e^2 。在随机初相位模型下，振动协方差可写为秩二形式

$$\Sigma_{\zeta} = \sigma_e^2 (\mathbf{v}_c \mathbf{v}_c^T + \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s^T) = \sigma_e^2 \mathbf{V} \mathbf{V}^T, \quad (55)$$

其中

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s] \quad (56)$$

由余弦基向量和正弦基向量组成。利用低秩矩阵恒等式，式 (28) 可化为二维子空间中的求逆：

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V}^T, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\sigma_e^2}\mathbf{I} + \mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}. \quad (57)$$

这说明单频振动只在 $\mathbf{v}_c$ 与 $\mathbf{v}_s$ 张成的二维子空间中贡献误差，原本 N 维的求逆问题被精确降维为 2×2 矩阵求逆。

在高斯包络和密集采样近似下，引入两个频域特征量：

$$G(f_v) = \exp\left[-\left(\frac{\pi f_v l_c}{v}\right)^2\right], \quad (58)$$

$$F(f_v) = 1 - \left(\frac{\pi f_v l_c}{v}\right)^2. \quad (59)$$

其中 $G(f_v)$ 描述振动频率与高斯包络功率谱之间的重叠程度，而 $F(f_v)$ 描述包络定位敏感度在该频率处的归一化响应。

选取包络峰值时刻作为相位原点时，有

$$\mathbf{s}^T\mathbf{V} = [S_0\sqrt{G}, 0], \quad (60)$$

$$\mathbf{w}^T\mathbf{V} = [WF\sqrt{G}, 0]. \quad (61)$$

若 $\mathbf{M}$ 在该基下近似对角，记

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_c & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad (62)$$

其中

$$m_c = \frac{1}{\sigma_e^2} + [\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}]_{cc}, \quad m_s = \frac{1}{\sigma_e^2} + [\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}]_{ss}. \quad (63)$$

在光干涉系统中，通常有 $K^2\mathbf{P}_s \gg \mathbf{P}_w$ ，因此可进一步近似为

$$m_c \approx \frac{1}{\sigma_e^2} + K^2 \frac{S_0}{2} (1 - G)^2, \quad (64)$$

$$m_s \approx \frac{1}{\sigma_e^2} + K^2 \frac{S_0}{2} (1 - G^2). \quad (65)$$

需要注意的是， m_c 与 m_s 一般并不相等。因此，不能在所有情况下都将单频振动的差分误差简单写成一个 $\sin^2(\pi f_v \Delta h / v)$ 因子乘以单一分母；该简化只在 $m_c \approx m_s$ 或进行各向同性近似时成立。

对于单像素绝对测量，由式 (34) 可得

$$\text{CRLB}(z_M) = \frac{1}{W} + \frac{F(f_v)^2 G(f_v)}{m_c}, \quad (66)$$

$$\text{CRLB}(\varphi_0) = \frac{1}{S_0} + \frac{K^2 G(f_v)}{m_c}, \quad (67)$$

$$\text{Cov}(z_M, \varphi_0) = -\frac{KF(f_v)G(f_v)}{m_c}. \quad (68)$$

式 (66) 表明，包络定位的振动惩罚同时受 F^2 、 G 和数据约束强度 m_c 调制。当

$$f_v^* = \frac{v}{\pi l_c} \quad (69)$$

时，有 $F(f_v^*) = 0$ 。在理想高斯包络和密集采样近似下，该频率处的包络定位振动惩罚为零。但这一“免疫频率”依赖于模型假设；若实际包络偏离高斯形状，或 $\mathbf{P}_w$ 贡献不可忽略，该零点可能发生偏移或不再严格为零。

与包络定位不同，相位估计中不含 $F(f_v)$ 因子。因此，相位估计不存在对应的包络免疫频率。当 $f_v \rightarrow 0$ 时， $G \rightarrow 1$ ，式 (67) 退化为

$$\text{CRLB}(\varphi_0) \rightarrow \frac{1}{S_0} + K^2 \sigma_e^2, \quad (70)$$

与常数漂移工况一致。当 f_v 足够高时， $G \rightarrow 0$ ，振动惩罚项趋于零，绝对相位 CRLB 退化回理想值 $1/S_0$ 。

对于相对形貌，令

$$\alpha = 2\pi f_v \tau = 2\pi f_v \frac{\Delta h}{v}. \quad (71)$$

由于两个像素的敏感度向量在单频子空间中的投影相差相位 α ，有

$$(\mathbf{w}_A - \mathbf{w}_B)^T \mathbf{V} = WF\sqrt{G}[1 - \cos \alpha, -\sin \alpha], \quad (72)$$

$$(\mathbf{s}_A - \mathbf{s}_B)^T \mathbf{V} = S_0\sqrt{G}[1 - \cos \alpha, -\sin \alpha]. \quad (73)$$

代入式 (44) 和式 (45)，得到单频振动下的相对包络 CRLB：

$$\text{CRLB}(\Delta z_M) = \frac{2}{W} + F(f_v)^2 G(f_v) \left[\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{m_c} + \frac{\sin^2 \alpha}{m_s} \right], \quad (74)$$

以及相对相位 CRLB：

$$\text{CRLB}(\Delta \varphi_0) = \frac{2}{S_0} + K^2 G(f_v) \left[\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{m_c} + \frac{\sin^2 \alpha}{m_s} \right]. \quad (75)$$

若进一步采用 $m_c \approx m_s = m$ 的各向同性近似，则

$$(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right), \quad (76)$$

于是式 (74) 和式 (75) 分别化简为

$$\text{CRLB}(\Delta z_M) \approx \frac{2}{W} + \frac{4F(f_v)^2 G(f_v) \sin^2\left(\pi f_v \frac{\Delta h}{v}\right)}{\frac{1}{\sigma_e^2} + K^2 \frac{S_0}{2} (1-G)^2}, \quad (77)$$

$$\text{CRLB}(\Delta \phi_0) \approx \frac{2}{S_0} + \frac{4K^2 G(f_v) \sin^2\left(\pi f_v \frac{\Delta h}{v}\right)}{\frac{1}{\sigma_e^2} + K^2 \frac{S_0}{2} (1-G)^2}. \quad (78)$$

这两个简化式清晰展示了差分测量的高通滤波特性：当 $f_v \rightarrow 0$ 时， $\sin^2(\pi f_v \Delta h / v) \rightarrow 0$ ，低频公共振动被差分抵消；当 $G(f_v) \rightarrow 0$ 时，高频振动与包络有效频带重叠很小，其误差贡献同样趋于消失。因此，相对形貌测量最需要警惕的通常不是极低频或极高频振动，而是由 $G(f_v)$ 、 $F(f_v)$ 、 m_c, m_s 以及高度差调制因子共同决定的中频振动分量。

为进一步展示窄带单频振动模型下理论下界对振动频率的响应规律，本文基于式 (66)–式 (78) 绘制测量下界随振动频率变化的敏感曲线，如图 5 所示。

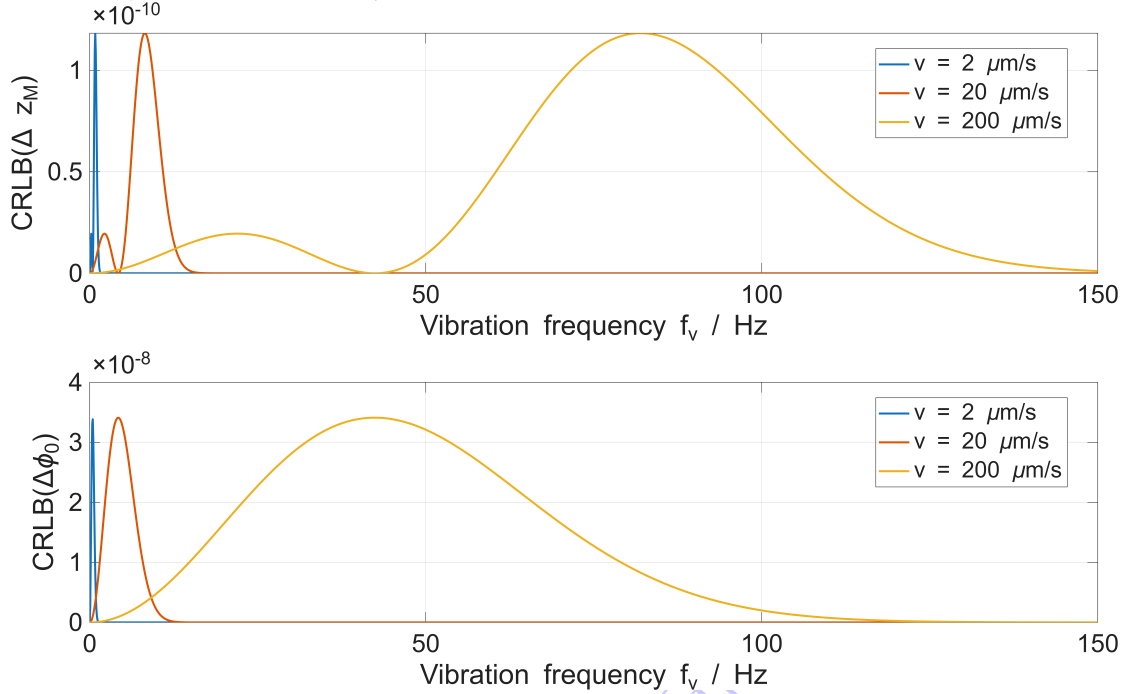


图 5 测量下界随振动频率变化的敏感曲线

Fig. 5. Sensitivity of theoretical lower bounds to vibration frequency.

图5中给出了扫描速度分别为 $2 \mu\text{m/s}$ 、 $20 \mu\text{m/s}$ 和 $200 \mu\text{m/s}$ 时系统对单频振动频率 f_v 的响应曲线。可以看出，随着扫描速度增大，响应曲线逐渐向高频区域展开，系统的敏感频带明显变宽；而在低速扫描时，响应主要集中于极低频附近，并随振动频率升高迅速衰减。此外，在相对测量情形下，低频处响应通常较弱，中频附近出现峰值，高频端再次衰减，表现出一定的带通特性。

上述现象主要来源于时间频率与扫描空间频率之间的映射关系。对于给定时间振动频率 f_v ，其在扫描坐标中的等效空间频率可近似写为 $\nu = f_v/v$ 。当扫描速度较小时，同一时间频率对应更高的空间频率，振动在相干长度范围内快速振荡，因而与白光干涉包络敏感函数的重叠较弱，系统响应迅速衰减；当扫描速度增大时，同一时间频率对应的等效空间频率降低，系统能够对更高的时间频率保持响应，因此响应带宽随速度增大而扩展。同时，相对测量中的差分效应会削弱近似公共的低频扰动，使主要误差贡献集中在某一中频范围内。

从图中响应曲线的面积来看，低速扫描似乎对应更小的振动影响，这与工程上“提高扫描速度有助于减小振动误差”的经验认识表面上并不一致。其原因在于，图中曲线描述的是系统对单位单频振动的响应，而实际振动误差还取决于该响应函数与真实振动功率谱的加权积分。若假设振动功率谱在频率上近似均匀，则较大的响应带宽确实可能导致高速扫描下的总响应增大；但实际精密测量系统中的振动通常并非白噪声，而是明显集中于低频区域。地面振动、结构漂移和热漂移等误差源往往具有低频增强特性，常可用 $1/f^\beta$ 型功率谱作定性描述，其中 $\beta > 0$ ，在漂移主导时甚至更大^[19-21]。

因此，扫描速度增大虽然会使系统响应带宽扩展，但也会将主要敏感频带推向相对较高的频率区域，从而避开实际振动功率谱中能量最集中的低频部分。这说明图中结果并不否定工程经验，而是表明：在单位单频振动假设下，系统响应随速度增大而展宽；而在真实低频主导的振动环境中，快速扫描往往能够缩短测量时间，降低低频漂移和慢变扰动的累积影响，因此表现出更好的抗振能力。

6 结论

本文针对退化扫描条件下的白光扫描干涉测量，建立了同时包含探测器加性圆对称复高斯噪声与机械振动扰动的统一复观测模型，并在此框架下系统推导了包络峰值位置 z_M 与绝对相位 φ_0 的 Cramér-Rao 精度下界，填补了现有研究上加性噪声与振动噪声未能统一建模分析的空白。

在纯加性噪声条件下，本文证明了 z_M 与 φ_0 在 Fisher 意义下的参数正交性：包络幅度方向的扰动与切向相位扰动具有正交结构，二者在当前参数化下不存在 Fisher 信息耦合。然而，该正交性依赖于噪声模型的对称性与特定参数化方式，不能推广解释为一般退化扫描条件下两参数的完全解耦。

针对相关机械振动，本文引入 Hybrid Cramér-Rao Bound 框架，将目标参数 z_M 、 φ_0 视为确定未知量，将振动过程视为具有已知二阶统计特性的随机扰动。通过 Schur 补与 Woodbury 恒等式，得到了含等效残余振动协方差矩阵 $\mathbf{T}$ 的闭式 CRLB 表达式。理论分析表明，相关振动不仅整体抬升 z_M 与 φ_0 的边

缘估计下界，还会通过公共振动过程在二者之间引入统计耦合，因而在全维振动模型下两参数不能视为严格解耦。

在相对形貌测量分析中，本文揭示了公共振动抵消的理论条件：相对高度或相对相位的振动误差取决于两像素振动敏感度向量之差而非各自的绝对敏感度；当两像素对某一振动模式的响应完全相同时，该模式在差分测量中被严格抵消，这从理论层面解释了相对形貌测量比单点绝对测量更能抑制低频公共漂移的物理根源。

针对常数漂移与窄带单频振动两类典型工况，本文给出了具有频率分辨能力的解析精度下界表达式。对于常数漂移，单像素绝对测量存在不可约误差底限，理想同步差分测量可将其严格抵消；对于单频振动，振动影响由包络频谱重叠项 $G(f_v)$ 、包络定位响应项 $F(f_v)$ 、数据约束强度 m_c, m_s 以及高度差调制因子共同决定，表明对测量精度影响最大的往往是与系统有效频带和差分相位差相匹配的中频振动成分，而非极低频或极高频分量。

所得理论结果可直接应用于白光干涉系统的误差预算与工程设计：通过理论下界曲线分析信噪比、光谱宽度、相干长度、采样步长和扫描速度等参数的影响；通过噪声主导区划图判断系统当前的精度瓶颈；通过频率敏感度曲线识别需重点抑制的振动频段，为硬件选型与抗振结构设计提供定量依据。

需要指出的是，本文主要从单像素绝对测量与两像素差分传播角度分析振动影响，且部分闭式结果依赖于高斯包络、密集采样与窄带振动等假设。后续工作可沿以下方向进一步拓展：其一，构建包含全部像素参数与公共振动自由度的联合 Hybrid Fisher 信息矩阵，推导多像素联合估计下更严格的等效残余协方差界；其二，结合非高斯光源光谱、探测器非线性与扫描机构非平稳振动，建立更贴近实际系统的修正模型；其三，面向具体工程系统，进一步结合实验标定、振动谱测量与数值仿真，评估实际估计器误差与本文理论下界之间的间隔，从而推动本文框架在白光干涉系统误差预算、参数优化和抗振设计中的工程应用。

参考文献

- [1] de Groot P 2011 In *Optical Measurement of Surface Topography* (Springer), pp 187–208
- [2] de Groot P 2015 *Adv. Opt. Photon.* **7** 1
- [3] Conroy M, Armstrong J 2005 *J. Phys.: Conf. Ser.* **13** 458
- [4] Harasaki A, Schmit J, Wyant J C 2000 *Appl. Opt.* **39** 2107

- [5] Chu H H, Kim D H, Park J H, Kang S, Son J, Lee H, Yoo H, Kim S W, Kim S, Kim Y J 2025 *Appl. Surf. Sci.* **689** 162466
- [6] Nismath V H, Aydogan B, Jagers D, Chou K 2024 *Manuf. Lett.* **41** 920
- [7] Chatterjee S, Bhardwaj R 2023 *Sādhana* **48** 30
- [8] Meyer R, Stock F, Cordier C, Schiffler J, Montgomery P, Flury M, Antoni F 2025 *Opt. Laser Technol.* **184** 112444
- [9] Deck L 1996 *Appl. Opt.* **35** 6655
- [10] Kay S M 1993 *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory* (Englewood Cliffs: Prentice Hall)
- [11] Van Trees H L 2001 *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part III: Radar-Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise* (New York: John Wiley & Sons)
- [12] Lehmann P, Tereschenko S, Xie W 2016 *Surf. Topogr.: Metrol. Prop.* **4** 024004
- [13] Fleischer M, Windecker R, Tiziani H J 2001 *Appl. Opt.* **40** 2815
- [14] Pavlíček P, Soubusta J 2003 *Appl. Opt.* **42** 1809
- [15] Pavlíček P, Hýbl O 2012 *Appl. Opt.* **51** 465
- [16] Chen Y, Zhao S, Liu A, Zhang W, Hao Y 2025 *Opt. Lasers Eng.* **194** 109160
- [17] Duan M, Wang Y, Zong Y, Guo X, Lu Z, Li J 2025 *Opt. Lett.* **50** 4506
- [18] Richmond C D, Horowitz L L 2015 *IEEE Trans., Signal Process.* **63** 2263
- [19] Abbott B P, Abbott R, Adhikari R, Ajith P, Allen B, Allen G, Amin R S, Anderson S B, Anderson W G, Arain M A, et al. 2009 *Rep. Prog. Phys.* **72** 076901
- [20] Riley W J 2008 Handbook of frequency stability analysis. *Tech. Rep. NIST Special Publication 1065*, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg

- [21] Saulson P R 1994 *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors* (Singapore: World Scientific)

录用稿件，非最终出版稿

Unified Cramér–Rao Lower Bound Analysis for White-Light Scanning Interferometry Under Degraded Scanning Conditions: Joint Modeling of Additive Noise and Mechanical Vibration*

CHEN Yulan ¹⁾²⁾ LIU Anqi¹⁾ HE Jiaqi ¹⁾²⁾ ZHANG Wenxi^{1)†}

1) (*Aerospace Information Research Institute, Chinese Academy of Sciences, Beijing,
100094, China*)

2) (*School of Optoelectronics, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100049,
China*)

In this work, we develop a unified complex observation model for WLSI under degraded scanning conditions. The model incorporates exposure-induced fringe attenuation, additive circularly symmetric complex Gaussian noise, and scanning-direction mechanical displacement perturbations. Based on this model, we derive the Fisher information matrix and the CRLBs for the envelope peak position z_M and the absolute phase φ_0 . For the pure additive-noise case, it is shown analytically that z_M and φ_0 are orthogonal in the Fisher-information sense, because envelope-position perturbations and phase perturbations correspond to radial and tangential directions in the complex observation space. For correlated mechanical vibration, a hybrid CRLB formulation is introduced by treating z_M and φ_0 as deterministic unknown parameters and the vibration sequence as a random nuisance process with a known covariance structure. Using the Schur complement and the Woodbury matrix identity, we obtain closed-form CRLB expressions involving an equivalent residual vibration covariance matrix $\mathbf{T}$. The resulting CRLB matrix reveals that mechanical vibration not only raises the marginal lower bounds of z_M and φ_0 , but may also introduce statistical coupling between them through the common vibration process.

* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (2022YFF0706300).

† Corresponding author. E-mail: zhangwenxi@aoe.ac.cn

Furthermore, we analyze relative topography measurement and show that common vibration components can be suppressed by differential measurement, with the residual vibration contribution determined by the difference between the vibration-sensitivity vectors of two pixels. For constant drift, the common displacement is strictly cancelled in ideal synchronous relative measurement. For narrowband single-frequency vibration, analytical frequency-sensitivity expressions are derived, showing how the vibration contribution depends on the envelope spectral overlap, the envelope-position response, the scanning speed, and the height difference between pixels. The proposed framework provides a quantitative theoretical tool for accuracy-limit evaluation, error budgeting, parameter optimization, and vibration-resistant design in WLSI systems.

Keywords: White-Light Scanning Interferometry; Cramér–Rao Lower Bound; Mechanical Vibration; Hybrid Fisher Information

录用稿件，
非最终出版稿