

重构三维活塞模型用于分析内爆不对称性增长*

黄天暄 蒋炜 姚沛霖 蒲昱东 晏骥†

（中国工程物理研究院激光聚变研究中心 等离子体物理全国重点实验室，绵阳 621900）

摘要

传统空间离散化求解方法制约了三维活塞模型在内爆不对称性分析中的应用。本文采用球谐函数展开方法重构三维活塞模型，将控制方程转化为一组易于求解的常微分方程，并阐明了低阶模不对称性扰动增长与准一维内爆主过程的耦合机制。通过微扰解析解与直接数值模拟结果的交叉验证，确认了模型的可靠性，进而系统揭示了内爆减速和滞止阶段不对称性增长的特性：在滞止时刻，一阶微扰量与初始不对称性种子呈线性关系，二阶微扰量为这些种子的二次函数；自耦合效应可激发类似谐波的偶数模扰动；扰动模式的奇偶性对不对称性的演化和计量均具有显著影响。在此基础上，建立了归一化剩余动能（ $nRKE$ ）与滞止时刻壳层不对称性因子之间的广义定标关系，为在不同扰动条件下利用中子诊断技术测量 $nRKE$ 提供理论指导。该工作可为多因素、多模式不对称性增长提供高效且数值稳定的分析工具，并为定量评估非球形内爆的性能退化构建统一框架。

关键词：活塞模型；内爆不对称性；归一化剩余动能（ $nRKE$ ）；性能退化

PACS: 52.57.-z, 52.57.Fg

*国家自然科学基金（批准号：U2530215, 12575256），等离子体物理国家重点实验室稳定支持科研项目（批准号：JCKYS2024212801），国家重点研发计划（2023YFA1608400）资助的课题

†通信作者. E-mail: lucifer@mail.ustc.edu.cn

第一作者. E-mail: huangtx2013@aliyun.com

1 引言

在激光间接驱动惯性约束聚变（ICF）内爆实验中，不对称扰动增长会产生

严重影响，导致靶丸内爆过程偏离球对称一维内爆的物理设计要求，进而导致内爆性能显著退化^[1-6]。具体表现包括：靶丸壳层剩余动能增加，导致壳层动能向热斑内能的耦合效率降低；热斑形变引起干净半径减小；面密度角分布不均匀造成惯性约束时间缩短；以及热斑压强和聚变中子产额降低。

在基于直柱黑腔的 ICF 内爆实验中， P_1 、 P_2 和 P_4 等低阶模不对称扰动对内爆性能退化的贡献显著，扰动来源分为辐射驱动不对称性和靶丸自身不对称性^[1-9]。辐射驱动扰动源包括：黑腔开口（如激光注入孔和诊断孔）的辐射漏失；激光光斑区与非光斑区 X 光发射强度比的时变特性；等离子体喷射导致的临界面内移及其对激光能量沉积分布的影响；激光指向精度、束间功率涨落和靶丸装配偏差等随机因素；以及黑腔-靶丸等离子体与激光的复杂相互作用引发的时变不对称性。靶丸自身扰动源包括内外表面形变、壳层厚度/组分不均匀性以及夹持膜引入的扰动等。因此，在通过内爆调谐实验控制直柱黑腔中固有的 P_2 和 P_4 不对称扰动的同时^[9-12]，还需提升激光与靶工程参数的精密调控水平^[13-17]，以抑制 P_1 等随机不对称扰动，为实现高性能近一维内爆奠定基础^[18-19]。

实验测量、模拟计算和理论分析是科学研究中的三种基本手段，ICF 内爆物理研究亦不例外。在实验研究方面，可采用中子活化法、中子能谱诊断等方法测量聚变中子产额^[20,21]；通过 X 射线发射图像测量热斑不对称性^[22]；基于多角度中子飞行时间谱测量热斑定向运动速度^[23-24]；基于多角度高精度活化法与下散射中子成像的联合诊断测量燃料面密度不对称性^[25-27]。模拟研究的主要工具是辐射流体数值模拟程序，例如美国的 LASNEX^[28]和 HYDRA^[29,30]，中国的 LARED^[31]等。这些程序均具备二维和三维版本，可用于模拟计算非球对称内爆的时空演化过程^[32-34]。尽管实验与模拟均表明不对称性会导致内爆性能退化，但受限于三维

内爆过程的复杂性，两者均面临影响因素繁多、成本高昂的挑战。因此，ICF 研究通常综合运用实验测量、模拟计算与理论分析^[1-3]，获得近似定标关系，进而利用实验可诊断量评估不对称性对内爆性能退化的影响，或构建简化的物理模型，对内爆实验结果进行自洽解释。

早期 ICF 研究普遍采用基于热斑轮廓扰动加权均方根建立的定标关系^[35-37]来评估内爆性能退化。然而，后续数值模拟研究揭示了该方法的根本局限^[38-40]：热斑 P_2 和 P_4 模扰动在投影成像时存在混叠效应，容易误导不对称性测量；内爆不对称性所致的剩余动能主要源于滞止时刻壳层径向运动的差异，与热斑形貌弱相关；时变不对称性往往造成热斑与壳层形态演化不一致，二者并无简单的对应关系。随着研究视角从片面强调热斑转向热斑-壳层耦合体系，古建法与 Kritcher 等提出综合热斑不对称性、壳层面密度不均匀性和剩余动能来构建定标关系^[39-40]。但这些工作均依赖大量二维或三维数值模拟计算，计算成本高昂，且物理图像不够简明，或存在参数冗余，难以精准指导内爆实验中的不对称性归因分析与性能调谐。

近年来，Hurricane 等基于理论分析，提出以滞止时刻壳层面密度角分布的调和平均与算术平均之比(f^2)作为度量不对称性的因子；进而利用两端活塞模型将归一化剩余动能($nRKE$)与 f^2 关联起来，并建立了聚变产额等内爆性能参数与 $(1 - f^2)$ 的幂律定标关系^[41-42]。该方法从能量视角阐明了低阶模不对称性导致内爆性能退化的物理机制，解析了 f 因子与面密度不均匀性以及热斑定向运动速度的关联性，为 P_1 不对称性的实验表征、归因与抑制提供了有效指导^[15-18]；但对于其它模或多模扰动并存的情形，其物理自洽性则不够充分。Ralph 等尝试利用 f^2 与热斑 P_2 分量分别评估 P_1 与 P_2 不对称性的贡献^[43]。Springer、张春波和 Casey

等发展的三维火箭-活塞模型^[44-46]，能够快速模拟内爆过程中三维扰动的时空演化。该模型将内爆球壳均匀划分为多个球锥小活塞，各小活塞被限定在对应的立体角单元内作径向运动，并通过一个共同的等压热斑相互耦合。多活塞模型能够同时考虑壳层形变、质量和速度等多种因素及其多种扰动模式，以及冲击波传播与热斑动态演化等效应。然而，过多因素和效应的引入使得模型的输入-输出关系异常复杂，难以通过解析解直观揭示条件、过程和结果之间的物理联系。此外，其空间离散化求解方法容易引发数值不稳定性，通常需要引入修正算法才能使计算结果与物理预期相符。与 Hurricane 的简化活塞模型相比，多活塞模型在提高真实性的同时，显著牺牲了物理图像的简明性，增加了构建统一理论框架的难度。

为克服上述局限，本文基于球谐函数展开法重新构建三维活塞模型，将控制方程转化为一组易于求解的常微分方程组。通过降维处理，该方法突破了空间离散化求解的局限性，提升了模型的物理简明性与计算稳健性，进而可充分发挥其优势，为不对称性扰动增长机制和内爆性能退化定标关系的研究提供支持。

本文结构安排如下：第 2 章采用球谐函数展开法重构三维活塞模型，将其控制方程转化为易于求解的常微分方程组，并给出基于微扰近似的解析解。第 3 章结合具体算例，通过微扰解析解和直接数值解的交叉验证，确认重构模型的可靠性，并系统分析内爆不对称性增长的特性。第 4 章基于物理自洽性，提出 $nRKE$ 与滞止时刻壳层不对称性因子之间的广义定标关系，以指导 $nRKE$ 的实验测量。第 5 章总结并提出后续研究方向。

2 三维活塞模型的控制方程与求解方法

本章采用球谐函数展开法，将三维活塞模型的控制方程转化为易于求解的常微分方程组，并利用微扰方法获得显式解析解，为验证数值计算的可靠性提供参

考。

在内爆后期，因靶丸外表面积迅速减小，可忽略辐射烧蚀压做功与烧蚀层质量变化。但若考虑热斑演化、壳层可压缩性、冲击波往返和燃料混合等因素，壳层与热斑的相互作用仍难以用解析模型描述。为此，三维活塞模型将减速与滞止过程近似为绝热惯性压缩与约束，主要刻画壳层动能与热斑内能的相互转换。其物理假设为：芯部高温低密度等离子体采用理想气体状态方程与绝热近似，且压强全域相等；低温高密度壳层视为薄壳，忽略厚度、内能和切向流；各球面单元间无质量交换，仅径向运动与几何收缩，并通过共享芯部压强实现耦合。

为表示方便，在本文中使用 Ω 代表球坐标变量 (θ, ϕ) ；使用 $Y_i(\Omega)$ 指代球谐函数分项 $P_n^k(\cos \theta) \cos k\phi$ 或 $P_n^k(\cos \theta) \sin k\phi$ ，其中 i 、 n 和 k 为非负整数，且 $k \leq n$ 。令 $\int F(\Omega) d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta$ 代表对函数 $F(\Omega)$ 的全立体角积分，并定义 $\langle F(\Omega) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int F(\Omega) d\Omega$ ，以标记 $F(\Omega)$ 的全立体角平均值。

三维活塞模型的控制方程组由壳层运动方程和芯部气体状态方程组成^[44-46]：

$$\frac{\partial R(\Omega, t)}{\partial t} = v(\Omega, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v(\Omega, t)}{\partial t} = \frac{R^2(\Omega, t)}{m(\Omega)} P(t) \quad (2)$$

$$P(t) = P_0 \left(\frac{V_0}{V(t)} \right)^{5/3} \quad (3)$$

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} \langle R^3(\Omega, t) \rangle \quad (4)$$

其中， $R(\Omega, t)$ 描述壳层半径角分布的时间演化， $v(\Omega, t)$ 描述壳层速度角分布的时间演化， $m(\Omega)$ 为壳层质量角分布， $P(t)$ 为芯部压强的时间函数， $V(t)$ 为芯部体积的时间函数。式（3）采用多方气体状态方程描述芯部压强与体积变化的关系，多方指数 γ 取为5/3。

在内爆减速起始时刻（ $t = 0$ ）的初始条件包括半径角分布 $R_0(\Omega)$ 、速度角分

布 $v_0(\Omega)$ 、芯部体积 V_0 和压强 P_0 。特征时刻 t_s 定义为平均速度 $\langle v(\Omega, t_s) \rangle = 0$ 的时刻。在球对称内爆中， t_s 与最小半径，最小体积和最小动能的时刻重合，称为内爆滞止时刻。在三维扰动下，这些时刻存在微小差异，因此将 t_s 近似为内爆滞止时刻，对应半径角分布 $R_s(\Omega)$ 和速度角分布 $v_s(\Omega)$ 。

为方便后续讨论，进行下述变量代换： $t = \frac{\langle R_0(\Omega) \rangle}{\langle v_0(\Omega) \rangle} \tau$ ，其中 τ 为无量纲时间， $\langle R_0(\Omega) \rangle$ 和 $\langle v_0(\Omega) \rangle$ 分别为初始平均半径和平均速度； $m(\Omega) = \frac{M}{4\pi} \rho(\Omega)$ ，其中 $\rho(\Omega)$ 为无量纲质量角分布函数； $R(\Omega, t) = \langle R_0(\Omega) \rangle r(\Omega, \tau)$ ，其中 $r(\Omega, \tau)$ 为无量纲半径角分布函数； $v(\Omega, t) = \langle v_0(\Omega) \rangle u(\Omega, \tau)$ ，其中 $u(\Omega, \tau)$ 为无量纲速度角分布函数； $V(t) = V_{00} \langle r^3(\Omega, \tau) \rangle$ ，其中 $V_{00} = \frac{4\pi}{3} \langle R_0(\Omega) \rangle^3$ （与初始体积 $V_0 = \frac{4\pi}{3} \langle R_0^3(\Omega) \rangle$ 略有差异）， $\langle r^3(\Omega, \tau) \rangle$ 为无量纲体积； $q = \frac{\frac{1}{2} M \langle v_0(\Omega) \rangle^2}{\frac{3}{2} \rho_0 V_{00}}$ ，此无量纲能量因子近似等于壳层初始动能与芯部初始内能之比。

对控制方程组（1）-（4）进行无量纲化变换，得到：

$$\frac{\partial r(\Omega, \tau)}{\partial \tau} = u(\Omega, \tau) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u(\Omega, \tau)}{\partial \tau} = \frac{r^2(\Omega, \tau)}{q \rho(\Omega)} \left(\frac{\langle r^3(\Omega, 0) \rangle}{\langle r^3(\Omega, \tau) \rangle} \right)^{5/3} \quad (6)$$

通常可采用空间离散化求解方法^[44-46]直接求取式（5）和（6）的数值解。然而，这类模型及求解方法存在固有的数值不稳定性，例如，空间离散化近似处理引入的计算误差极易放大并导致非预期结果，致使计算可靠性与模型适用性面临挑战。

下面应用球谐函数展开法通过降维处理，简化无量纲控制方程组（5）和（6）的求解问题。首先，将内爆物理量的时空分布函数 $\rho(\Omega)$ 、 $r(\Omega, \tau)$ 、 $u(\Omega, \tau)$ 按球谐函数系 $Y_i(\Omega)$ 展开^[47,48]：

$$\rho(\Omega) = \sum_{i=0}^N \rho_i Y_i(\Omega) \quad (7)$$

$$r(\Omega, \tau) = \sum_{i=0}^N r_i(\tau) Y_i(\Omega) \quad (8)$$

$$u(\Omega, \tau) = \sum_{i=0}^N u_i(\tau) Y_i(\Omega) \quad (9)$$

定义初始分量 $r_{i0} = r_i(0)$, $u_{i0} = u_i(0)$; 滞止分量 $r_{is} = r_i(\tau_s)$, $u_{is} = u_i(\tau_s)$ ($i = 0, \dots, N$)。必有初始条件 $\rho_0 = 1$, $r_{00} = 1$ 、 $u_{00} = -1$ 和滞止条件 $u_{0s} = 0$ 。

然后, 利用球谐函数系的正交性, 将式(7) - (9) 分别代入式(5)和(6), 在方程两边同乘 $Y_j(\Omega)$ 对全立体角积分, 再除以 $\langle Y_j^2(\Omega) \rangle$, 可得描述球谐分量时间系数的常微分方程组:

$$\frac{dr_j(\tau)}{d\tau} = u_j(\tau) \quad (10)$$

$$\frac{du_j(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{q} f_j(\tau) \quad (11)$$

$$f_j(\tau) = \frac{\langle \frac{r^2(\Omega, \tau)}{\rho(\Omega)} Y_j(\Omega) \rangle}{\langle Y_j^2(\Omega) \rangle} \left(\frac{\langle r^3(\Omega, 0) \rangle}{\langle r^3(\Omega, \tau) \rangle} \right)^{5/3} \quad (12)$$

其中, $j = 0, \dots, N$ 。给定初始条件后, 可采用高阶龙格-库塔算法^[49]数值求解式(10) - (12)得到 $r_j(\tau)$ 和 $u_j(\tau)$ ($j = 0, \dots, N$), 再通过式(8)和(9)计算 $r(\Omega, \tau)$ 和 $u(\Omega, \tau)$ 。尽管 $f_j(\tau)$ 涉及全立体角积分, 但在物理关注范围内无奇异点, 选用成熟算法可确保数值稳定性。总之, 重构后的三维活塞模型通过对控制方程降维处理, 将问题转化为具有确定解的初值问题, 从而避开了空间离散化求解方法可能引入的数值不稳定性。

为分析不对称扰动增长的基本特性并为校验数值计算提供参考, 下面采用微扰方法求得简化控制方程(10) - (12)的显式解析解^[50]。

当 $j = 0$ 时(对应准一维内爆主过程), 仅需考虑零阶项。将式(7)和(8)代入式(12)得零阶量 $f_0(\tau) \approx r_0^{-3}(\tau)$, 结合式(10)和(11)可得:

$$\frac{d^2 r_0(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{q} r_0^{-3}(\tau) \quad (13)$$

通过变量分离和积分, 结合初值条件 $r_{00} = 1$ 和 $u_{00} = -1$, 得半径零阶量的时

间函数：

$$r_0(\tau) = \sqrt{\frac{1}{1+q} + \frac{1+q}{q} \left(\tau - \frac{q}{1+q} \right)^2} \quad (14)$$

由式 (14) 知，内爆滞止时刻 $\tau_s = \frac{q}{1+q}$ ，对应最小半径 $r_{0s} = (1+q)^{-1/2}$ ，表明小扰动极限下内爆收缩比为 $C_r = (1+q)^{1/2}$ 。对式 (14) 求导得速度零阶量的时间函数：

$$u_0(\tau) = \frac{(1+q)\tau - q}{qr_0(\tau)} \quad (15)$$

当 $j > 0$ 时（对应不对称性增长子过程），需同时考虑一阶和二阶微扰项。不失一般性，用 $f_j(\tau)$ 表示式 (12) 中的一阶微扰量， $r_j(\tau)$ 和 $u_j(\tau)$ 分别表示式 (10) 和 (11) 中的一阶微扰量；用 $\tilde{f}_j(\tau)$ 、 $\tilde{r}_j(\tau)$ 和 $\tilde{u}_j(\tau)$ 表示相应的二阶微扰量。当高阶扰动影响显著时，零阶近似解失效，故以二阶微扰项为止。

先利用 $r_0(\tau)$ 构造一阶微扰解 $r_j(\tau)$ 。在式 (12) 中保留一阶微扰项，近似得：

$$f_j(\tau) \approx r_0^{-3}(\tau) \left(2 \frac{r_j(\tau)}{r_0(\tau)} - \rho_j \right) \quad (16)$$

其中 $j = 1, \dots, N$ 。式 (16) 表明，一阶微扰量的演化相互独立，只与准一维内爆主过程耦合。结合式 (10)、(11) 和 (16)，得一阶微扰通解：

$$r_j(\tau) = (c_1 \cosh(g(\tau)) + c_2 \sinh(g(\tau)) + \rho_j) r_0(\tau) \quad (17)$$

其中 $j = 1, \dots, N$ ， $g(\tau) = \tan^{-1} \left(\frac{(1+q)\tau - q}{\sqrt{q}} \right)$ 。对式 (17) 求导得：

$$u_j(\tau) = \frac{c_1 \sinh(g(\tau)) + c_2 \cosh(g(\tau))}{\sqrt{q} r_0(\tau)} + \left(\frac{(1+q)\tau - q}{q} \right) \frac{r_j(\tau)}{r_0^2(\tau)} \quad (18)$$

结合式 (17) 和 (18)，利用初始条件 r_{j0} 、 u_{j0} 和 ρ_j 确定系数 c_1 和 c_2 。令 $\delta = -g(0) = \tan^{-1}(q^{1/2})$ ，得 $c_1 = \cosh \delta (r_{j0} - \rho_j) + q^{1/2} \sinh \delta (u_{j0} + r_{j0})$ ， $c_2 = \sinh \delta (r_{j0} - \rho_j) + q^{1/2} \cosh \delta (u_{j0} + r_{j0})$ 。

随后利用 $r_0(\tau)$ 和 $r_j(\tau)$ 构造二阶微扰解 $\tilde{r}_j(\tau)$ 。在式（12）中保留二阶微扰项，近似得：

$$\tilde{f}_j(\tau) \approx r_0^{-3}(\tau) \left(2 \frac{\tilde{r}_j(\tau)}{r_0(\tau)} + \epsilon_2(\tau) \right) \quad (19)$$

其中， $j = 1, \dots, N$ ， $\epsilon_2(\tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{r_i(\tau)}{r_0(\tau)} - \rho_i \right) \left(\frac{r_k(\tau)}{r_0(\tau)} - \rho_k \right) \frac{\langle Y_i Y_k Y_j \rangle}{\langle Y_j^2 \rangle}$ 。将式（17）代入式（19），合并同类项得：

$$\tilde{f}_j(\tau) \approx r_0^{-3}(\tau) \left(2 \frac{\tilde{r}_j(\tau)}{r_0(\tau)} + D + A \cosh(2g(\tau)) + B \sinh(2g(\tau)) \right) \quad (20)$$

其中， A 、 B 和 D 为与 τ 无关的常数。结合式（10）、（11）和（20），得二阶微扰通解：

$$\frac{\tilde{r}_j(\tau)}{r_0(\tau)} = c_3 \cosh(g(\tau)) + c_4 \sinh(g(\tau)) - D + \frac{A \cosh(2g(\tau)) + B \sinh(2g(\tau))}{3} \quad (21)$$

对式（21）求导得：

$$\tilde{u}_j(\tau) = \frac{c_3 \sinh(g(\tau)) + c_4 \cosh(g(\tau)) + \frac{2}{3}(A \sinh(2g(\tau)) + B \cosh(2g(\tau)))}{\sqrt{q} r_0(\tau)} + \left(\frac{(1+q)\tau - q}{q} \right) \frac{\tilde{r}_j(\tau)}{r_0^2(\tau)} \quad (22)$$

其中 $j = 1, \dots, N$ ，常数 D 、 A 和 B 由一阶微扰解 $r_j(\tau)$ 确定。系数 c_3 和 c_4 由初始条件 $\tilde{r}_j(\tau) = 0$ 和 $\tilde{u}_j(\tau) = 0$ 决定： $c_3 = \lambda \cosh \delta + \frac{1}{3} A \cosh \delta (\cosh(2\delta) - 2) - \frac{1}{3} B \sinh \delta (\cosh(2\delta) - 1)$ ， $c_4 = \lambda \sinh \delta + \frac{1}{3} A \sinh \delta (\cosh(2\delta) + 2) - \frac{1}{3} B \cosh \delta (\cosh(2\delta) + 1)$ 。

综上所述，通过将三维活塞模型控制方程转化为描述球谐分量时间系数的常微分方程组，可利用高阶龙格-库塔法获得稳定数值解。同时，基于微扰方法获

得零阶至二阶微扰量的显式解析解，可为重构模型的数值求解提供校验基准。该方法有效避免了传统空间离散化求解方法固有的数值不稳定性，为构建统一的理论框架，研究内爆不对称性增长机制提供了支撑。

3 内爆不对称性增长的特性

本章结合微扰解析解与直接数值解，系统分析内爆减速和滞止阶段不对称性增长的主要特性，同时验证重构模型的可靠性。

首先，根据式 (17) 和 (18) 在滞止时刻的取值，合并同类项，可分别得到滞止时刻形变和速度不对称性的一阶微扰量与初始扰动种子的敏感关系式：

$$\frac{r_{js}}{r_{0s}} \approx \xi_{rr} r_{j0} + \xi_{ru} u_{j0} + \xi_{r\rho} \rho_j \quad (23)$$

$$u_{js} \approx \xi_{ur} r_{j0} + \xi_{uu} u_{j0} + \xi_{u\rho} \rho_j \quad (24)$$

在式 (23) 和 (24) 中， $j = 1, \dots, N$ 。各项系数可分别表示为： $\xi_{rr} = \cosh(\delta) + q^{1/2} \sinh(\delta)$ ， $\xi_{ru} = q^{1/2} \sinh(\delta)$ ， $\xi_{r\rho} = 1 - \cosh(\delta)$ ， $\xi_{ur} = (1 + q)^{1/2} q^{-1/2} \sinh(\delta) + (1 + q)^{1/2} \cosh(\delta)$ ， $\xi_{uu} = (1 + q)^{1/2} \cosh(\delta)$ ，和 $\xi_{u\rho} = -(1 + q)^{1/2} q^{-1/2} \sinh(\delta)$ 。由此可见，各个 Y_j 模不对称性的一阶微扰量均由其对应的初始扰动种子诱发，各模之间相互独立；增长系数与模数 j 无关，仅依赖于能量因子 q 。在能量因子相同的条件下，低阶模不对称性的一阶微扰量与初始扰动种子之间分别呈现相同的线性近似关系。如图 1 所示，形变和速度扰动种子所对应的增长系数与准一维内爆主过程的收缩比 $C_r = (1 + q)^{1/2}$ 呈良好的线性关系；而初始质量扰动种子产生的增长系数与 q 弱相关。当 $q \gg 1$ 时， $\delta \approx \frac{\pi}{2}$ ， $\sinh(\delta) \approx 2.3$ ， $\cosh(\delta) \approx 2.5$ ，因此， ξ_{rr} 、 ξ_{ru} 、 ξ_{ur} 和 ξ_{uu} 都分别与 C_r 成正比，比例系数分

别为 2.3 或 2.5；而 ξ_{rp} 接近常数-1.5， ξ_{up} 接近常数-2.3。在内爆减速与滞止阶段，为控制三维扰动增长，通常选择 $C_r < 10$ 。因此，本文主要选取收缩比 $C_r = 7$ 的算例展示计算结果，此设定不影响分析的一般性。

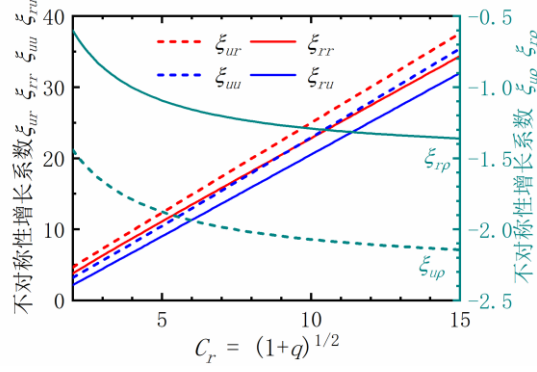


图 1 一阶微扰量的增长系数随收缩比 (C_r) 变化 (q 为能量因子)

Fig. 1. First-order perturbation growth coefficient versus convergence ratio (C_r) (q is energy factor).

如式 (19) 所示，二阶微扰项的增长源 $\epsilon_2(\tau)$ ，可表示为一阶微扰量的二次多项式函数。显然，滞止时刻不对称性的二阶微扰量与初始扰动种子的关系是非线性的，并且需要考虑各模之间的相互耦合现象。

下面以轴对称情况为例，利用比较简单的勒让德函数系替代球谐函数系，分析内爆不对称性二阶微扰项的非线性和模耦合现象。在轴对称条件下，式 (19) 中的球谐函数 Y_i 、 Y_j 和 Y_k 分别退化为勒让德函数 P_i 、 P_j 和 P_k 。当 $\langle P_i P_j P_k \rangle \neq 0$ 时，就可能从现有的扰动模式 P_i 和 P_k 衍生出新的扰动模式 P_j ，或对已有模式 P_j 的扰动增长叠加影响。根据勒让德多项式的完备性和正交性易知， $\langle P_i P_j P_k \rangle \neq 0$ 的必要条件是，在模数 i 、 j 和 k 中，最大者不超过其余两者之和，最小者不低于其余两

者之差。特别是，当 i 、 j 、 k 三者中任意一数等于其余两数之和时，必有 $\langle P_i P_j P_k \rangle \neq 0$ 。在模耦合现象中，模数的奇偶性会产生不同影响。当 i 、 k 为偶数， j 为奇数时，必有 $\langle P_i P_j P_k \rangle = 0$ ，说明偶数模不对称扰动种子不会衍生出奇数模不对称性。当 i 、 k 为奇数， j 为偶数时，可能有 $\langle P_i P_j P_k \rangle \neq 0$ ，说明奇数模不对称扰动种子可以衍生出偶数模不对称性。当 $i = k$ 时，对于 $\leq 2i$ 的所有正偶数 j ，必有 $\langle P_i^2 P_j \rangle \neq 0$ 。也就是说，对于每个具有初始扰动种子的 P_i 模不对称性，当其一阶微扰量增长显著时，可通过自耦合激发出一系列类似谐波的偶数模扰动。其中，耦合系数 $\frac{\langle P_i^2 P_j \rangle}{\langle P_j^2 \rangle}$ 在 $j = 2i$ 时达到最大，说明二次谐波最为显著。

为方便起见，假定初始扰动种子只有 P_j 模不对称性。则在一阶微扰项中除 P_j 模之外，其它模式的贡献为零。为了统一描述只与给定 P_j 模有关的二阶微扰项，可将式（19）简化为下式：

$$\tilde{f}_n(\tau) \sim r_0^{-3}(\tau) \left\{ 2 \frac{\tilde{r}_n(\tau)}{r_0(\tau)} + \mu_{nj} \left(\frac{r_j(\tau)}{r_0(\tau)} - \rho_j \right)^2 \right\} \quad (25)$$

其中，系数 $\mu_{nj} = \frac{\langle P_j^2 P_n \rangle}{\langle P_n^2 \rangle}$ 。当 $n = j$ 时，式（25）描述的是 P_j 模不对称性对其自身形成的扰动增长源。当 $n \neq j$ ，且为不大于 $2j$ 的正偶数时，式（25）描述的就是 P_j 模不对称性对其谐波 P_n 模不对称性形成的扰动增长源。特别是当基模为 P_1 或 P_2 时，分别只需考虑二次谐波 P_2 或 P_4 。

将式（14）和（17）代入式（25），先按照式（20）整理，获得相应的常数为 $D = \frac{1}{2} \mu_{nj} (c_1^2 - c_2^2)$ 、 $A = \frac{1}{2} \mu_{nj} (c_1^2 + c_2^2)$ 和 $B = \mu_{nj} c_1 c_2$ ；然后根据式（21）和（22）提供的通解和初值得到终解 $\tilde{r}_n(\tau)$ 和 $\tilde{u}_n(\tau)$ 。其中，系数 c_1 和 c_2 采用与式（17）相同的定义；根据初值 $\tilde{r}_n(0) = 0$ 和 $\tilde{u}_n(0) = 0$ ，确定系数 $c_3 = \frac{1}{3} \mu_{nj} \left(\cosh(\delta) (r_{j0} - \rho_j)^2 - 2q^{1/2} \sinh(\delta) (r_{j0} - \rho_j)(u_{j0} + r_{j0}) - 2q^{1/2} \cosh(\delta) (u_{j0} + r_{j0})^2 \right)$ 和 $c_4 =$

$$\frac{1}{3}\mu_{nj}\left(\sinh(\delta)(r_{j0}-\rho_j)^2-2q^{1/2}\cosh(\delta)(r_{j0}-\rho_j)(u_{j0}+r_{j0})-2q^{1/2}\sinh(\delta)(u_{j0}+r_{j0})^2\right)。$$

最后，忽略具体的推导过程，根据前述微扰解析解直接给出 $\tilde{r}_n(\tau)$ 和 $\tilde{u}_n(\tau)$ 在滞止时刻的取值：

$$\frac{\tilde{r}_{ns}}{r_{os}} = \alpha_1(r_{j0}-\rho_j)^2 + \alpha_2(r_{j0}-\rho_j)(u_{j0}+r_{j0}) + \alpha_3(u_{j0}+r_{j0})^2 \quad (26)$$

$$\tilde{u}_{ns} = \beta_1(r_{j0}-\rho_j)^2 + \beta_2(r_{j0}-\rho_j)(u_{j0}+r_{j0}) + \beta_3(u_{j0}+r_{j0})^2 \quad (27)$$

其中，式（26）中的各项系数分别为 $\alpha_1 = \frac{1}{6}\mu_{nj}(2\cosh(\delta) + \cosh(2\delta) - 3)$ ， $\alpha_2 = \frac{1}{3}\mu_{nj}q^{1/2}(\sinh(2\delta) - 2\sinh(\delta))$ ， $\alpha_3 = \frac{1}{6}\mu_{nj}q(-4\cosh(\delta) + \cosh(2\delta) + 3)$ ；式（27）中的各项系数分别为 $\beta_1 = \frac{1}{3}\mu_{nj}(1+q)^{1/2}q^{-1/2}(\sinh(\delta) + \sinh(2\delta))$ ， $\beta_2 = \frac{2}{3}\mu_{nj}(1+q)^{1/2}(-\cosh(\delta) + \cosh(2\delta))$ ， $\beta_3 = \frac{1}{3}\mu_{nj}(1+q)^{1/2}q^{1/2}(-2\sinh(\delta) + \sinh(2\delta))$ 。根据式（26）和（27）易知，当仅考虑初始质量种子 ρ_j 诱发的不对称性模系时，可得到 $\frac{\tilde{r}_{ns}}{r_{os}}$ 和 $\tilde{u}_{ns}$ 分别与 ρ_j^2 成正比，若能量因子 $q \gg 1$ ， $\delta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ，相应的系数 α_1 和 β_1 分别趋于常数。当仅考虑初始速度种子 u_{j0} 诱发的不对称性模系时，可得到 $\frac{\tilde{r}_{ns}}{r_{os}}$ 和 $\tilde{u}_{ns}$ 分别与 u_{j0}^2 成正比，若能量因子 $q \gg 1$ ，相应的系数 α_3 和 β_3 分别与 q 成正比。当仅考虑初始形状种子 r_{j0} 诱发的不对称性模系时，可得到 $\frac{\tilde{r}_{ns}}{r_{os}}$ 和 $\tilde{u}_{ns}$ 分别与 r_{j0}^2 成正比，若能量因子 $q \gg 1$ ，相应的系数 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 和 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ 分别与 q 成正比。

值得注意的是，模数 j 的奇偶性会改变 P_j 模不对称性自身激发的非线性增长行为。前文分析已知，一阶微扰量与初始扰动种子之间为线性关系，二阶微扰量与初始扰动种子之间则由二次多项式描述。当一阶微扰振幅的正负符号不同时，

二阶微扰与一阶微扰叠加所产生的增强或削弱效果恰好相反，因此单一偶数模扰动的非线性增长过程会因符号而异。而奇数模因源自自身的二阶微扰可以忽略，不存在上述消长效应，这与符号相反的奇数模扰动具有镜像特征相一致。总之，与奇数模相比，偶数模不对称扰动的增长表现出更显著的非线性，并对扰动振幅的符号具有依赖性。

图 2 通过计算实例展示了不对称扰动增长子过程与准一维内爆主过程相互耦合的关系。其中， C_r 表示内爆收缩比， u_{20} 表示初始时刻速度 P_2 模不对称性扰动种子。图中虚线表示微扰解析解（止于二阶微扰近似），实线表示直接数值解。为方便起见，统一用 $r_0(\tau)$ 和 $u_0(\tau)$ 分别表示半径和速度的零阶量随时间变化的曲线；用 $r_2(\tau)$ 和 $u_2(\tau)$ 分别表示半径和速度 P_2 模不对称性分量随时间变化的曲线；用 $r_4(\tau)$ 和 $u_4(\tau)$ 分别表示半径和速度 P_4 模不对称性分量随时间变化的曲线。如图 2 所示，在内爆滞止时刻前后极短时间内，代表内爆平均速度的 $u_0(\tau)$ 发生了由负到正的剧烈变化，同时，代表速度不对称扰动的 $u_2(\tau)$ 和 $u_4(\tau)$ 也在迅速增长；距离滞止时刻越远，上述三个速度分量的变化越小，并逐渐趋于常量。由于代表形状不对称扰动的 $r_2(\tau)$ 和 $r_4(\tau)$ 分别是 $u_2(\tau)$ 和 $u_4(\tau)$ 对时间的积分函数，它们将在滞止时刻之后继续快速增长。需说明的是，此处 P_4 模不对称性是 P_2 模不对称性激发的二次谐波，仅有二阶微扰项贡献的 $u_4(\tau)$ 和 $r_4(\tau)$ 分别远小于包含一阶与二阶微扰项之和的 $u_2(\tau)$ 和 $r_2(\tau)$ 。改变 C_r ，选择不同的扰动类型与模式 $(\rho_{i0}, r_{i0}, u_{i0})$ ，改变初始幅度，都可获得与图 2 类似的计算结果：即在初期不对称扰动幅度较小时，微扰解与数值解高度吻合；在后期扰动幅度增大后，两者偏离随之增大，微扰近似逐渐失效，但仍可通过数值解获得有效物理信息。

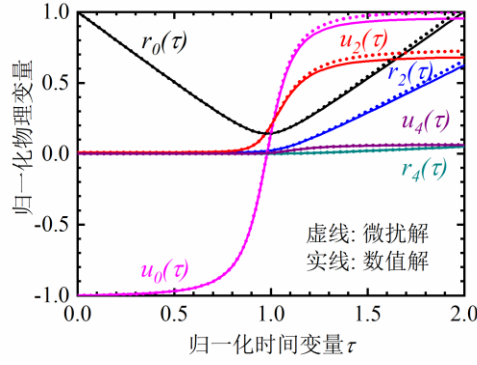


图 2 不对称扰动增长子过程与准一维内爆主过程的耦合 ($C_r = 7$; 速度种子 $u_{20}=0.01$)

Fig. 2. Coupling between asymmetry growth sub-process and quasi-one-dimensional implosion main process ($C_r = 7$; velocity seed $u_{20}=0.01$).

图 3 通过计算结果展示滞止时刻内爆不对称性与初始时刻速度 P_2 模扰动种子 u_{20} 的敏感关系。其中，内爆收缩比 $C_r = 7$ 滞止时刻形状和速度的 P_2 分量分别为 $\frac{r_{2s}}{r_{0s}}$ 和 u_{2s} ， P_4 分量分别为 $\frac{r_{4s}}{r_{0s}}$ 和 u_{4s} 。 P_4 模扰动是 P_2 模扰动诱发的二次谐波，如图 3 所示，以一阶微扰项贡献为主的速度 P_2 和形状 P_2 与初始扰动种子之间存在近似线性的敏感关系；仅有二阶微扰项贡献的速度 P_4 和形状 P_4 则与初始扰动种子之间存在近似平方的敏感关系。在物理关注范围内，当不对称性扰动种子 u_{20} 在区间 $(-0.03, 0.03)$ 内变化时，由实线表示的直接数值解与由虚线表示的微扰解析解基本相符。其中，速度分量 u_{2s} 两种解的最大偏差小于 1%，形状分量 $\frac{r_{2s}}{r_{0s}}$ 两种解的最大偏差约 5%，后者更为显著的原因，可能与滞止时刻的定义有关。实际上，改变 C_r ，选择不同的扰动类型与模式 $(\rho_{i0}, r_{i0}, u_{i0})$ ，均可获得与图 3 类似的计算结果，从而证实由式 (23) 和 (24) 描述的一阶线性关系与由式 (26) 和 (27) 描述的二阶非线性关系都在给定条件下近似成立。据此推测，由微扰解析解得到的推论在一定范围内具有普适性。

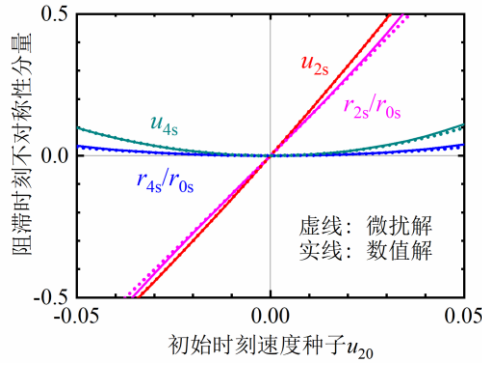


图 3 滞止时刻不对称性随速度种子 u_{20} 变化 ($C_r = 7$, 4 阶模是 2 阶模的二次谐波)

Fig. 3. Stagnation-time asymmetry versus velocity seed u_{20} ($C_r = 7$, mode 4 is the second harmonic of mode 2).

在这些算例中，采用具有四阶精度的龙格-库塔法求得常微分方程组 (10) - (12) 的直接数值解，结果与微扰解析解基本吻合，表明在感兴趣的范围内计算精度满足要求。球谐展开法与传统空间离散化法的优缺点比较，以及数值稳定性和计算精度的分析对比，可参见相关专著^[51-53]，此处不再赘述。

综上，本章通过直接数值解与微扰解析解相互校验，验证了重构三维活塞模型的可靠性，并系统揭示了内爆减速与滞止阶段不对称性增长的主要特性。具体发现包括：一阶微扰量与初始扰动种子呈线性关系，仅依赖能量因子（对应内爆收缩比），与扰动模式无关；二阶微扰量包括非线性与模耦合项，可表示为初始扰动种子的二次多项式函数。基于轴对称简化分析，球谐扰动模式的奇偶性是影响不对称性扰动演化路径的关键因素。对于单模扰动而言，奇模振幅的符号反转仅相当于对系统进行镜像对称操作，其物理图像与演化过程保持等价；而偶模振幅符号反转则会导致物理图像及演化过程的实质性改变，且该差异在非线性和耦合阶段尤为突出。此外，自耦合效应能够激发偶数模谐波型扰动，其中模数最高的二次

谐波分量最为显著。上述特征均与理论预期相符，充分证实重构模型对相关物理机制的有效捕捉，从而为建立更具普适性的不对称性定标关系奠定了坚实基础。

4 内爆不对称性的定标关系

接下来，将基于前述内爆不对称性增长特性的分析，对 $nRKE$ 与壳层不对称性因子的定标关系进行修正，确保其在多因素、多模式扰动条件下仍近似成立，从而为 $nRKE$ 的实验测量提供理论支持。

壳层动能角分布的时间演化为 $\frac{1}{2}m(\Omega)v^2(\Omega, t) = \frac{M}{4\pi}\langle v_0(\Omega) \rangle^2 \rho(\Omega)u^2(\Omega, \tau)$ ，式中 $M = 4\pi\langle m(\Omega) \rangle$ 为壳层总质量。因此，无量纲化的剩余动能角分布函数定义为 $rke(\Omega) = \rho(\Omega)u_s^2(\Omega)$ ，而 $nRKE$ 可表示为：

$$nRKE = \frac{\langle \rho(\Omega)u_s^2(\Omega) \rangle}{\langle \rho(\Omega)u_0^2(\Omega) \rangle} \quad (28)$$

面密度角分布的时间演化为 $\frac{m(\Omega)}{R^2(\Omega, t)} = \frac{M}{4\pi\langle R_0(\Omega) \rangle^2} \frac{\rho(\Omega)}{r^2(\Omega)}$ 。滞止时刻的面密度角分布函数定义为：

$$\chi_s(\Omega) = \frac{\rho(\Omega)}{r_s^2(\Omega)} \quad (29)$$

图 4 和图 5 通过计算实例，分别展示了滞止时刻球壳剩余动能和面密度角分布与不同速度扰动种子之间的关系。其中， C_r 为内爆收缩比， u_{10} 和 u_{20} 分别表示 P_1 和 P_2 模的速度扰动种子。图中实线和虚线分别对应初始速度扰动幅度符号为负和正的情形。在单模扰动条件下，内爆过程中速度和形状扰动幅度的符号与初始符号保持一致。由于满足轴对称条件，相应的角分布函数仅依赖于 θ 。因此，在图 4 和图 5 中令 $x = \cos \theta$ ，并分别以 $rke(x)$ 和 $\chi_s(x)$ 表示剩余动能和面密度的角分布函数。

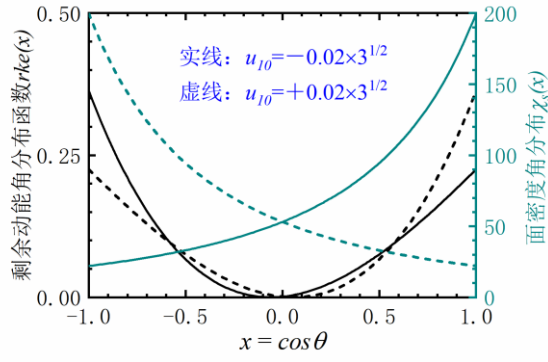


图 4 源自速度种子 u_{10} 的滞止时刻剩余动能和面密度角分布 ($C_r = 7$)

Fig. 4. Angular distributions of residual kinetic energy and areal density at stagnation time

originating from the velocity seed u_{10} ($C_r = 7$).

由图 4 可见，当 u_{10} 大小相等、符号相反时，不对称性扰动演化的结果关于赤道面呈镜像对称，物理上是完全等效的。这实为奇模扰动的固有特性：两种演化途径在几何上始终保持镜像对称关系。改变 C_r ，或选择不同的扰动类型 (ρ_{10} , r_{10} , u_{10}) 或其它奇模扰动种子，均可获得与图 4 类似的计算结果。

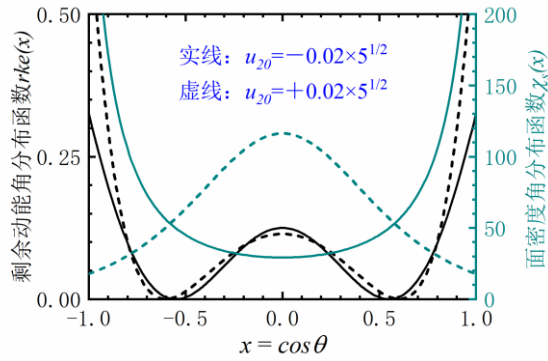


图 5 源自速度种子 u_{20} 的滞止时刻剩余动能和面密度角分布 ($C_r = 7$)

Fig. 5. Angular distributions of residual kinetic energy and areal density at stagnation time

originating from the velocity seed u_{20} ($C_r = 7$).

由图 5 可见，当 u_{20} 大小相等、符号相反时，不对称性扰动演化的结果完全不同。这实为偶模扰动的固有特性：两种演化途径在几何上始终无相似之处，特别是面密度角分布呈现出显著差异。改变 C_r ，选择不同的扰动类型（ ρ_{20} ， r_{20} ， u_{20} ）或其它偶模扰动种子，均可获得与图 5 类似的计算结果。

如前文所述，Hurricane 基于两端活塞模型提出 $nRKE \approx f^2$ 和 $f \approx \frac{v_{hs}}{v_{imp}}$ 等猜想，并将滞止时刻的面密度角分布 $\chi_s(\Omega)$ 、热斑定向运动速度 v_{hs} ，以及最大内爆速度 v_{imp} 等实验可诊断量关联起来^[41,42]。根据其对壳层不对称性因子的定义 $f^2 = 1 - \langle \chi_s(\Omega) \rangle^{-1} \langle \chi_s^{-1}(\Omega) \rangle^{-1}$ ，代入式（29）可得：

$$f^2 = 1 - \left\langle \frac{\rho(\Omega)}{r_s^2(\Omega)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{r_s^2(\Omega)}{\rho(\Omega)} \right\rangle^{-1} \quad (30)$$

易见， $f \approx \frac{v_{hs}}{v_{imp}}$ 的猜想仅适用于 P_1 模不对称性这一特例，在 P_1 模不占主导的一般情形下并不适用。 $nRKE \approx f^2$ 的猜想是否适用于一般情形仍有待验证。考虑到与两端活塞模型定义不对等的影响，现在三维活塞模型中假定 $nRKE$ 与 f^2 存在近似的比例关系：

$$nRKE \approx \kappa f^2 \quad (31)$$

其中 κ 为待定系数。将球谐展开式（7）-（9）代入式（28）和（30），展开后忽略四次和以上高次项，可得 $nRKE \approx \sum_{i=1}^N u_{is}^2 \langle Y_i^2 \rangle + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \rho_i u_{js} u_{ks} \langle Y_i Y_j Y_k \rangle$ ，以及 $f^2 \approx \sum_{i=1}^N \left(2 \frac{r_{is}}{r_{os}} - \rho_i \right)^2 \langle Y_i^2 \rangle - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left\{ 4 \frac{r_{is}}{r_{os}} \frac{r_{js}}{r_{os}} \frac{r_{ks}}{r_{os}} - 2 \frac{r_{is}}{r_{os}} \frac{r_{js}}{r_{os}} \rho_k - 2 \frac{r_{is}}{r_{os}} \rho_j \rho_k + \rho_i \rho_j \rho_k \right\} \langle Y_i Y_j Y_k \rangle$ 。

当 $f^2 \rightarrow 0$ 时，在 $nRKE$ 和 f^2 中都只需考虑二次项的贡献。此时，一阶微扰近似（参见式（17）和（18））足可描述不对称扰动的增长过程，因此可将式（23）和（24）代入式（31）获得系数 κ 的极限估计值。若仅考虑初始形变 r_{i0} ，可得极限系数 $\kappa_r = \left(\frac{\xi_{ur}}{2\xi_{rr}} \right)^2$ ；若仅考虑初始速度不对称性 u_{i0} ，可得极限系数 $\kappa_u = \left(\frac{\xi_{uu}}{2\xi_{ru}} \right)^2$ ；

若仅考虑初始质量不均匀性 ρ_i ，可得极限系数 $\kappa_\rho = \left(\frac{\xi_{u\rho}}{2\xi_{r\rho}-1}\right)^2$ 。当 $q \gg 1$ 时， κ_r 和 κ_u 都渐近趋向于 0.30， κ_ρ 渐近趋向于 0.33。

上述分析表明，在小扰动极限情形下，或当 $nRKE$ 与 f^2 展开式中的三次项贡献可忽略时，式（31）近似成立。然而，当偶模不对称扰动的幅度较大时，三次项的影响不可忽略，此时在 $nRKE$ 和 f^2 中对应三次项的增减趋势呈现不一致性，导致两者偏离小扰动极限下的简单比例关系。因此，式（31）在偶模主导或多因素多模式耦合场景中容易失效。为此，本文拟从能量视角出发，重新构建具有更广泛适用性的不对称性定标关系，并结合数值算例验证其有效性。

在活塞模型中，内爆减速和滞止过程简化为壳层动能与芯部内能之间的相互转化，因此二者之和守恒。根据多方气体状态方程（多方指数取 $\gamma = 5/3$ ），芯部内能的时间演化可表示为 $\frac{3}{2}P(t)V(t) = \frac{3}{2}P_0V_0 \left(\frac{\langle r^3(\Omega,0) \rangle}{\langle r^3(\Omega,\tau) \rangle}\right)^{2/3}$ 。结合上文的定义和代换，得到无量纲能量守恒关系：

$$\langle r^3(\Omega,0) \rangle + q\langle \rho(\Omega)u^2(\Omega,0) \rangle = \frac{\langle r^3(\Omega,0) \rangle^{5/3}}{\langle r^3(\Omega,\tau_s) \rangle^{2/3}} + q\langle \rho(\Omega)u^2(\Omega,\tau_s) \rangle \quad (32)$$

将球谐展开式(7)-(9)代入式(32)，结合初始条件 $\rho_0 = 1, r_{00} = 1, u_{00} = -1$ 和滞止时刻条件 $u_{0s} = 0$ ，忽略初始不对称性 u_{i0} 和 r_{i0} 等相对小量，利用式（28）可将式（32）近似简化为：

$$nRKE \approx 1 - (1+q)^{-1} \langle r^3(\Omega,\tau_s) \rangle^{-2/3} \quad (33)$$

其中， $\langle r^3(\Omega,\tau_s) \rangle = r_{0s}^3 \left(1 + \sum_{i=1}^N 3 \left(\frac{r_{is}}{r_{0s}}\right)^2 \langle Y_i^2 \rangle + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{r_{is}r_{js}r_{ks}}{r_{0s}^3} \langle Y_i Y_j Y_k \rangle\right)$ 为滞止时刻无量纲体积。当内爆接近球对称时， $(1+q)^{-1}r_{0s}^{-2} \rightarrow 1$ ，由此猜想 $nRKE$ 与内爆不对称性具有如下形式的定标关系：

$$nRKE \approx 1 - (1+\sigma_s^2)^{-\lambda} \quad (34)$$

其中， λ 为待定指数，壳层不对称性因子 σ_s^2 的定义为：

$$\sigma_s^2 = \langle \chi_s^{-3/2}(\Omega) \rangle \langle \chi_s^{-1/2}(\Omega) \rangle^{-3} - 1 \quad (35)$$

式(35)的球谐展开式为 $\sigma_s^2 \approx 3 \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_{is}}{r_{0s}} - \frac{1}{2} \rho_i \right)^2 \langle Y_i^2 \rangle + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{r_{is} r_{js} r_{ks}}{r_{0s} r_{0s} r_{0s}} - \frac{9}{2} \frac{r_{is} r_{js}}{r_{0s} r_{0s}} \rho_k + \frac{9}{2} \frac{r_{is}}{r_{0s}} \rho_j \rho_k - \frac{5}{4} \rho_i \rho_j \rho_k \right) \langle Y_i Y_j Y_k \rangle$ 。当质量不均匀性 ρ_i 的影响可以忽略时, $\sigma_s^2 = r_{0s}^{-3} \langle r^3(\Omega, \tau_s) \rangle - 1$, 此时, σ_s^2 实际刻画了芯部体积因不对称扰动而产生的相对变化。实验中难以直接测量质量不均匀性 ρ_i 或壳层形状 $r(\Omega, \tau_s)$, 而面密度角分布 $\chi_s(\Omega)$ 可通过中子诊断数据获得, 因此采用式(35)定义 σ_s^2 不仅兼顾形状、质量和速度三种扰动因素产生的内爆不对称性, 而且便于实验测量。

当 $\sigma_s^2 \rightarrow 0$ 时, 式(34)可进一步简化为 $nRKE \approx \lambda \sigma_s^2$, 其中 $nRKE \approx \sum_{i=1}^N u_{is}^2 \langle Y_i^2 \rangle$, $\sigma_s^2 \approx 3 \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_{is}}{r_{0s}} - \frac{\rho_i}{2} \right)^2 \langle Y_i^2 \rangle$ 。此时, 一阶微扰近似足可描述不对称扰动增长过程, 因此可直接利用式(23)和(24)获得指数 λ 的极限估计值。若仅考虑初始形变 r_{i0} , 可得极限指数 $\lambda_r = \frac{1}{3} \left(\frac{\xi_{ur}}{\xi_{rr}} \right)^2$; 若仅考虑初始速度不对称性 u_{i0} , 可得极限指数 $\lambda_u = \frac{1}{3} \left(\frac{\xi_{uu}}{\xi_{ru}} \right)^2$; 若仅考虑初始质量不均匀性 ρ_i , 可得极限指数 $\lambda_\rho = \frac{1}{3} \left(\frac{\xi_{u\rho}}{\xi_{r\rho} - \frac{1}{2}} \right)^2$ 。

比较式(30)和式(35)可知, 当 $nRKE$ 和 σ_s^2 展开式中的三次项及以上高次项贡献可忽略时, 两式所定义的不对称性因子 f^2 和 σ_s^2 仅相差乘数因子 $4/3$, 而参数 κ 与 λ 的极限估值只相差乘数因子 $3/4$ 。显然, 在小扰动极限下, 由式(31)和(34)分别描述的不对称性定标关系是近似等价的。

在一阶微扰近似下, ξ_{rr} , ξ_{ru} , $\xi_{r\rho}$, ξ_{ur} , ξ_{uu} 和 $\xi_{u\rho}$ 与模数 i 无关, 因此极限指数 λ_r 、 λ_u 和 λ_ρ 与模数 i 无关。如图6所示, 当 $q \gg 1$ 时, λ_r 和 λ_u 渐近趋向 0.40, λ_ρ 渐近趋向 0.44。虽然 λ_r 、 λ_u 和 λ_ρ 的变化均较平缓, 但三者之间仍存在细微差异。为利用式(34)统一描述不同扰动条件下的定标关系, 可采用算术平均值 λ_{av} 或加权平均值替代 λ_r 、 λ_u 和 λ_ρ 。通常可将由扰动种子种类、模数和幅度变化引起

的这些差异视为数据不确定度，另行考虑。

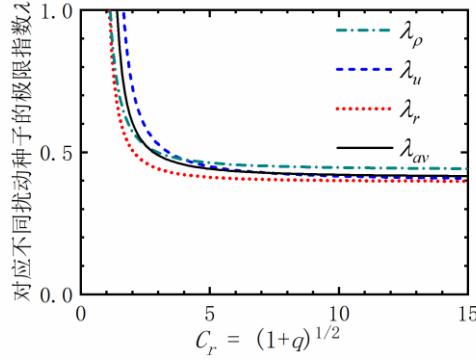


图 6 极限指数 (λ) 随收缩比 (C_r) 变化 (q 为能量因子)

Fig. 6. Limit exponent (λ) versus convergence ratio (C_r) (q is energy factor).

不过，当不对称扰动幅度增大时，需在所述相关物理量的球谐展开式中进一步纳入扰动振幅三次项的影响。以轴对称情况为例，利用勒让德函数系 P_i 、 P_j 和 P_k 替代球谐函数系 Y_i 、 Y_j 和 Y_k ，研究滞止时刻 $nRKE$ 与壳层不对称性因子的相互关系。若仅考虑单模 P_i 扰动，分别可得 $nRKE \approx u_{is}^2 \langle P_i^2 \rangle + \rho_i u_{is}^2 \langle P_i^3 \rangle$ ， $f^2 \approx \left(2 \frac{r_{is}}{r_{os}} - \rho_i\right)^2 \langle P_i^2 \rangle - \left(4 \left(\frac{r_{is}}{r_{os}}\right)^3 - 2 \left(\frac{r_{is}}{r_{os}}\right)^2 \rho_i - 2 \frac{r_{is}}{r_{os}} \rho_i^2 + \rho_i^3\right) \langle P_i^3 \rangle$ ，以及 $\sigma_s^2 \approx 3 \left(\frac{r_{is}}{r_{os}} - \frac{1}{2} \rho_i\right)^2 \langle P_i^2 \rangle + \left(\left(\frac{r_{is}}{r_{os}}\right)^3 - \frac{9}{2} \left(\frac{r_{is}}{r_{os}}\right)^2 \rho_i + \frac{9}{2} \frac{r_{is}}{r_{os}} \rho_i^2 - \frac{5}{4} \rho_i^3\right) \langle P_i^3 \rangle$ 。 f^2 和 σ_s^2 表达式中忽略了四次和以上高次项。当模数 i 为奇数时， $\langle P_i^3 \rangle = 0$ ，三次项无贡献。当模数 i 为偶数时， $\langle P_i^3 \rangle \neq 0$ ，且 f^2 与 σ_s^2 中三次项的主要变化趋势相反。

结合芯部体积 $\langle r^3(\Omega, \tau_s) \rangle$ 的球谐展开式可知， σ_s^2 可近似等效为芯部体积因不对称扰动引起的相对变化，且该等效关系受扰动模式奇偶性的影响甚微。相比之下，由于 f^2 与芯部体积展开式中对应三次项的符号相反，扰动模式的奇偶性及振幅符号均可通过所述三次项改变两者之间的映射关系。具体而言，若仅存在单一奇模扰动，三次项无贡献，则 f^2 与芯部体积相对变化的比例基本保持恒定；若仅

存在单一偶模扰动，三次项的贡献将导致该比例随振幅符号与幅值发生变化。

基于芯部内能对体积的单调依赖关系及能量守恒定律，可推测 σ_s^2 与 $nRKE$ 的广义定标关系（式 34）在较大参数范围内仍适用，而且基本不受扰动模式奇偶性的影响。然而，在偶模主导或多因素、多模式耦合的情形下， f^2 与 $nRKE$ 的映射关系将因振幅符号与幅值变化而产生显著分化，进而导致式（31）所描述的比例定标关系易于失效。

下面利用具体算例验证前述结论。内爆收缩比越大，不对称扰动增长越剧烈，因此对初始扰动幅度的限制也越严格，这正是 ICF 研究在追求高收缩比、高性能内爆时所面临的挑战。有鉴于此，不失一般性，本文以 $nRKE < 0.2$ 作为选择初始扰动种子的约束条件；否则，内爆性能将降至不可接受的水平。文中算例均采用典型收缩比 $C_r = 7$ ；若选用更高的收缩比，则需降低初始扰动幅度。对于多因素或多模式扰动问题，依据等权重原则设定各种参数的取值水平，并通过均匀抽样或随机抽样的方法确定初始条件，从而在统计意义上保证不同扰动因素对 $nRKE$ 的贡献均衡。

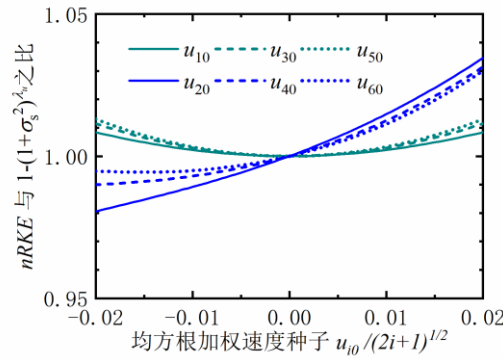


图 7 $nRKE$ 与 $1 - (1 + \sigma_s^2)^{-\lambda_u}$ 的比值随速度种子 u_{i0} 变化 ($C_r = 7$; $i=1, 2, \dots, 6$)

Fig. 7. Ratio of $nRKE$ to $1 - (1 + \sigma_s^2)^{-\lambda_u}$ versus velocity seed u_{i0} ($C_r = 7$, $i=1, 2, \dots, 6$).

如图 7 所示，当仅考虑速度扰动种子 u_{i0} 时，在感兴趣范围内，定标关系 $nRKE \approx 1 - (1 + \sigma_s^2)^{-\lambda_u}$ 成立（ λ_u 取图 6 所示极限指数）。内爆收缩比 $C_r = (1 + q)^{1/2} = 7$ ，横坐标为归一化初始扰动幅度 $u_{i0}/(2i + 1)^{1/2}$ 。计算结果显示， $nRKE$ 与该定标关系的预测偏差 $<3\%$ ，可接受。如果仅考虑形状扰动种子 r_{i0} 或质量扰动种子 ρ_i 时，可分别采用指数 λ_r 或 λ_ρ 确定 $nRKE$ 和 σ_s^2 的定标关系，且因扰动幅度或模数奇偶性变化产生的偏差都在可接受范围。在感兴趣范围内，改变收缩比 C_r ，可获得类似结果。

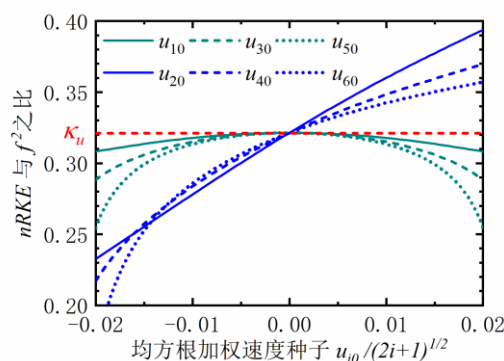


图 8 $nRKE$ 与 f^2 的比值随速度扰动种子 u_{i0} 变化（ $C_r = 7$; $i=1, 2, \dots, 6$ ）

Fig. 8. Ratio of $nRKE$ to f^2 versus velocity seed u_{i0} ($C_r = 7$; $i=1, 2, \dots, 6$).

图 8 采用与图 7 相同的算例和横坐标，展示 $nRKE$ 与 f^2 的关系。计算结果表明：当仅考虑单一奇数模小扰动时， $nRKE/f^2$ 相对极限系数 κ_u 偏离小，且与初始扰动种子幅度的符号无关；仅当扰动幅度增大时，偏离逐渐增大。当考虑偶数模扰动时， $nRKE/f^2$ 相对极限系数 κ_u 的偏离则非常显著，且与初始扰动种子幅度的符号相关。具体原因可参见上文对式（31）的相关分析。由此可见，即使仅考虑速度扰动种子 u_{i0} ， $nRKE$ 与 f^2 也不能保持简单比例关系。类似地，对于形状扰动种子 r_{i0} 或质量扰动种子 ρ_i ，因扰动幅度增大或模数奇偶性变化产生的显著偏离，

同样表明 $nRKE$ 与 f^2 无普适比例关系。总之，通过对比分析可知，在仅考虑单因素单模扰动的情況下，式（34）比式（31）具有更广的适用性。

图 7 和图 8 均表明，当仅考虑单一奇模扰动时， $nRKE$ 与不对称性因子的定标关系与扰动幅度的符号无关（参见图 4 及相关分析）；当仅考虑单一偶模扰动时，定标关系则与扰动幅度的符号和大小均密切相关（参见图 5 及相关分析）。根据前文关于 $nRKE$ 、 σ_s^2 和 f^2 展开式的分析可知，上述差异主要源于三次项的贡献，且与扰动模式的奇偶性有关。由于奇模中三次项为零，从表象来看，无论式（31）还是式（34），对于单一奇模扰动的适用性均优于单一偶模扰动。

下面给出更一般情况下的数值试验结果，进一步验证式（34）的适用性。图 9 展示同时存在速度扰动种子的三种典型扰动模式 P_1 、 P_2 和 P_4 时， $nRKE$ 与壳层不对称性因子的敏感关系。内爆收缩比 $C_r = 7$ ，采用 3 因素 5 水平完全抽样选择初始条件，共 125 个算例。另外，以 $(2i + 1)^{1/2}$ 为比例系数平衡 u_{10} 、 u_{20} 和 u_{40} 的取值水平，使各因素对定标关系的影响权重相当。计算结果显示，数据点 $(\sigma_s^2, nRKE)$ 与广义定标关系 $nRKE = 1 - (1 + \sigma_s^2)^{-\lambda_u}$ 描述的曲线高度吻合，拟合优度极佳（决定系数 $R^2 > 0.99$ ，均方根误差 $RMSE < 0.004$ ）；而数据点 $(f^2, nRKE)$ 高度分散，不存在简单映射关系。前文已指出，在单一偶模扰动条件下，式(31)描述的比例关系便难以成立；本例涉及多个奇、偶扰动模式的各种组合，故该式自然不再适用。改变收缩比 C_r ，或仅考虑形状扰动种子或质量扰动种子的多模式扰动时，也可获得类似结果。

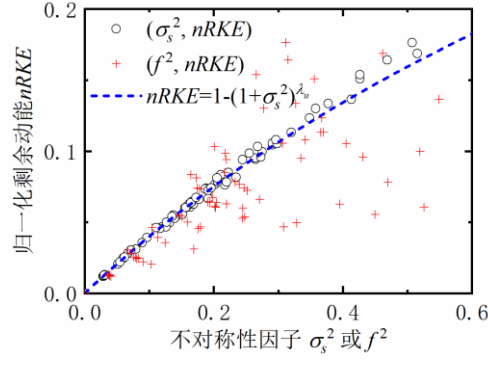


图 9 $nRKE$ 与不对称性因子 σ_s^2 或 f^2 的关系 ($C_r = 7$; 速度种子: u_{10} 、 u_{20} 和 u_{40} ; 3 因素 5 水平完全抽样)

Fig. 9. $nRKE$ versus asymmetry metric σ_s^2 or f^2 ($C_r = 7$; velocity seeds: u_{10} , u_{20} and u_{40} ; full sampling with 3-factor and 5-level).

图 10 展示同时存在三类扰动种子, 及 P_1 、 P_2 和 P_4 三种扰动模式时, $nRKE$ 与壳层不对称性因子的敏感关系。内爆收缩比 $C_r = 7$, 采用 9 因素 5 水平正交表 L50511 抽样选择初始条件, 共 50 个算例。另外, 分别以 $(2i+1)^{1/2}/\xi_{rr}$ 、 $(2i+1)^{1/2}/\xi_{ru}$ 和 $(2i+1)^{1/2}/\xi_{r\rho}$ 为比例系数平衡 r_{i0} 、 u_{i0} 和 ρ_i 的水平设置, 使各因素对定标关系的影响权重相当。计算结果显示, 数据点 $(\sigma_s^2, nRKE)$ 与广义定标关系 $nRKE = 1 - (1 + \sigma_s^2)^{-\lambda_{av}}$ 描述的曲线紧邻, 拟合优度指标极佳 (决定系数 $R^2 > 0.99$, 均方根误差 $RMSE < 0.004$); 而数据点 $(f^2, nRKE)$ 高度分散, 不存在简单映射关系。前文已指出式(31)在一般扰动下不适用的原因, 此处不再赘述。如果改变收缩比 C_r , 可获得类似结果。

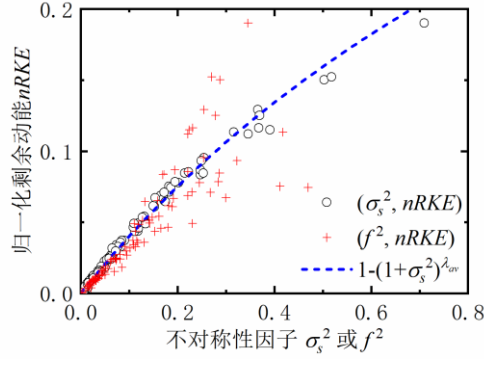


图 10 $nRKE$ 与不对称性因子 σ_s^2 或 f^2 的关系 ($C_r = 7$; 扰动种子: r_{i0} 、 u_{i0} 和 ρ_i , $i=1, 2, 4$;

采用 9 因素 5 水平正交表 $L_{50}(5^{11})$ 抽样)

Fig. 10. $nRKE$ versus asymmetry metric σ_s^2 or f^2 ($C_r = 7$; perturbation seeds: r_{i0} , u_{i0} and ρ_i , $i=1, 2, 4$; sampling with 9-factor 5-level orthogonal array $L_{50}(5^{11})$).

综上，不对称性因子 σ_s^2 与 f^2 虽均由中子诊断获得的面密度角分布 $\chi_s(\Omega)$ 直接导出，但 σ_s^2 与滞止时刻芯部体积（对应芯部内能）的相对变化具有更直接的物理关联，因而在计量不对称性时基本不受扰动模数奇偶性到的干扰，并在构建与 $nRKE$ 的定标关系时展现出明显优势。传统基于 f^2 的比例定标仅在小扰动极限或奇数模扰动主导条件下近似成立；然而，当偶数模扰动主导时， f^2 展开式中三次项贡献所引起的偏差将导致该定标关系失效。为此，本文提出基于 σ_s^2 的广义定标关系 $nRKE \approx 1 - (1 + \sigma_s^2)^{-\lambda}$ 。理论分析与数值验证均表明，在小扰动极限或奇模主导情形下，两种定标关系基本等价；而在偶模主导或多因素、多模式耦合条件下，基于 σ_s^2 的定标关系展现出更优的普适性。该广义定标关系能够统一描述薄壳内爆体系中形状、质量、速度等多因素、多模式扰动耦合所引起的内爆性

能退化，并保持可接受的预测精度，为复杂扰动下 $nRKE$ 的实验测量提供了明确的理论依据。

值得注意的是，第3章关于内爆不对称性增长机制的重要推论，以及本章对定标关系的分析，均依赖于三维活塞模型的有效性。该模型采用薄壳近似，并假设球壳质量不变、切向运动可忽略以及热斑均匀等压。这些简化与实验和数值模拟之间必然存在一定偏差；但该模型基本抓住了内爆减速阶段能量耦合与转换的主要矛盾，在所关注的参数范围内近似成立，并已获得数值模拟与理论研究的支撑^[41-46,54,55]。以球壳质量不变假设为例：Atzeni等^[54]采用内爆火箭方程模拟辐射烧蚀球壳的加速过程，其解析解清楚表明，随着球壳半径和外表面积缩小，总质量烧蚀率迅速降低；Saillard等^[55]通过数值模拟结果与解析解对比指出，在内爆减速阶段，内外表面烧蚀对球壳质量变化的贡献可近似忽略。

当然，三维活塞模型仍有诸多改进余地，例如：采用动态热斑模型替代绝热假设，并纳入辐射致冷和 α 粒子加热效应；部分放松薄壳近似和不可压缩假设，考虑聚心反弹冲击波在有限传播时间内穿过球壳的影响；引入球壳质量交换项以描述滞止阶段的角向质量流动等。然而，采取这些改进后，通常只能借助空间离散化法对三维模型进行数值求解，无法获得类似本文的解析解。在提升真实性的同时，牺牲物理图像的清晰性和理论推导的简洁性，是科学研究必然面临的挑战，需要在应用中审慎权衡复杂性与实用性之间的得失，做出合理取舍。实际上，在内爆滞止时刻前后，不对称性扰动增长迅速，模型预测的有效性最易受到质疑。因此，在应用式(34)描述的定标关系时，需结合具体靶物理设计，借助二维辐射流体模拟与实验数据，对前文所述不对称性增长特性进行分析验证；同时，应考虑壳层厚度的影响，例如对 n 指数进行适当修正，以减小薄壳近似带来的偏差。

5 结论

本文采用球谐函数展开法重构了三维活塞模型，将控制方程转化为易于求解的常微分方程组。该方法清晰刻画了低阶模不对称扰动的演化过程与准一维内爆主过程的耦合机制，避免了传统空间离散化求解所伴随的数值不稳定性，为构建统一的理论框架提供了支撑。然后，通过微扰近似获得解析解，并与直接数值解进行了交叉验证，证实了重构模型的可靠性。

数值计算与微扰分析一致表明，在内爆减速和滞止阶段，内爆不对称性增长具有如下一般特性：滞止时刻一阶微扰量与初始扰动种子呈线性关系，其增长系数仅依赖于能量因子（对应内爆收缩比），而与具体扰动模数无关；二阶微扰量（包括非线性项和模耦合项）则可表示为初始扰动种子的二次多项式函数。

基于轴对称简化分析可知，扰动模式的奇偶性对不对称性扰动的演化路径具有显著影响。对于单一模扰动，奇模振幅的符号反转仅等价于对系统进行镜像对称操作，因此其物理图像与演化过程完全等价；而偶模振幅的符号反转则会导致物理图像及演化过程的实质性改变，且该差异在非线性阶段尤为突出。此外，自耦合效应激发类似谐波的偶数模扰动，其中模数最高的二次谐波最为显著。

扰动模式的奇偶性不仅改变内爆不对称性的演化路径，还直接影响不对称性计量的可靠性，导致传统因子 f^2 与 $nRKE$ 的比例定标容易失效。为此，本文提出了一种具有广泛适用性的定标关系 $nRKE \approx 1 - (1 + \sigma_s^2)^{-\lambda}$ 。其中，引入新的不对称性计量因子 $\sigma_s^2 = \langle \chi_s^{-3/2}(\Omega) \rangle \langle \chi_s^{-1/2}(\Omega) \rangle^{-3} - 1$ ， $\langle \cdot \rangle$ 表示全立体角平均， λ 为与内爆收缩比弱相关的常数。 $\chi_s(\Omega)$ 为滞止时刻面密度角分布，可通过中子诊断数据获得。在小扰动极限或奇模主导情形下，该定标关系与基于 f^2 因子的传统比例定标关系基本等价；而在偶模主导或多因素、多模式耦合条件下，则展现出更

优的普适性。数值试验表明，在所关注的参数范围内，该广义定标关系的拟合优度极佳（决定系数 $R^2 > 0.99$ ，均方根误差 $RMSE < 0.004$ ），为实验测量 $nRKE$ 提供了明确的理论依据。

综上，本研究可为多因素、多模式不对称性增长提供高效且数值稳定的分析工具，并为定量评估非球对称内爆的性能退化建立统一框架。该框架支持多种应用，包括参数灵敏度分析、不确定性传播建模、设计裕量分配和实验归因分析。未来改进计划包括：通过二维辐射流体模拟与实验数据验证上述不对称性增长特性，以及引入厚度修正项以减小因薄壳近似引入的偏差等。

参 考 文 献

- [1] Lindl J D 1995 *Phys. Plasmas* **2** 3933
- [2] Lindl J D, Amendt P A, Berger R L, Glendinning S G, Glenzer S H, Haan S W, Kauffman R L, Landen O L, Suter L J 2004 *Phys. Plasmas* **11** 339
- [3] Lindl J D, Landen O L, Edwards M J, Moses E I 2014 *Phys. Plasmas* **21** 020501
- [4] Woo K M, Betti R 2021 *Phys. Plasmas* **28** 054503
- [5] Hurricane O A, Patel P K, Betti R, Froula D H, Regan S P, Slutz S A, Gomez M R, Sweeney M A 2023 *Rev. Mod. Phys.* **95** 025005
- [6] Hurricane O A, Allen A, Bachmann B L, Baker K L, Baxamusa S, Bhandarkar S D, Biener J, Bionta R M, Braun T, Briggs T M, Brunton G, Casey D T, Chapman T, Choate C, Clark D S, Dewald E L, DiNicola J-M, Divol L, Do A, Fehrenbach T, Fittinghoff D N, Gatu-Johnson M, Geppert-Kleinrath H, Geppert-Kleinrath V, Haan S W, Hilsabeck T J, Hinkel D E, Hohenberger M, Humbird K D, Izumi N, Kong C, Kritcher A L, Landen O L, Lindl J D, MacGowan B J, Mackinnon A J, MacLaren S A, Marinak M M, Meeuwsen R, Michel P A, Milovich J L, Meaney K D, Millot M, Moody J D, Moore A S, Nikroo A, Nora R C, Pak A E, Ralph J E, Ratledge M, Ross J S, Rubery M S, Schlossberg D J, Schmit P F, Sepke S M, Smalyuk V A, Spears B K,

Springer P T, Stadermann M, Strozzi D J, Suratwala T I, Tommasini R, Town R P J, Weber C R, Wild C, Van-Wonterghem B M, Woodworth B N, Wu J, Young C V, Zylstra A B 2025 *Plasma Phys. Control. Fusion* **67** 015019

[7] Yan J, Zhang X, Zheng J H, Yuan Y T, Kang D G, Ge F J, Chen L, Song Z F, Yuan Z, Jiang W, Yu B, Chen B L, Pu Y D, Huang T X 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 125203 (in Chinese) [晏骥, 张兴, 郑建华, 袁永腾, 康洞国, 葛峰骏, 陈黎, 宋仔峰, 袁铮, 蒋炜, 余波, 陈伯伦, 蒲昱东, 黄天暉 2015 物理学报 **64** 125203]

[8] Jiang S E, Dong Y S, Huang T X, Li S W, Tang Q, Cao Z R, Yang D, Yang G H, Yang Z H, Yi R Q, Su C X, Liu S Y, Yang J M, Wang F, Du K, He Z B, Zhu Q H, Hu D X, Zou S Y, Zheng W D, Ge F J, Zhao Y Q, Zhang H S, Gu P J, Liu J, Zhu S P, Wang J G, Zhang B H, Ding Y K 2016 *High Power Laser Part. Beams* **28** 080101 (in Chinese) [江少恩, 董云松, 黄天暉, 李三伟, 唐琦, 曹柱荣, 杨冬, 杨国洪, 杨正华, 易荣清, 苏春晓, 刘慎业, 杨家敏, 王峰, 杜凯, 何智兵, 朱启华, 胡东霞, 邹士阳, 郑无敌, 葛峰峻, 赵益清, 张桦森, 古培俊, 刘杰, 朱少平, 王建国, 张保汉, 丁永坤 2016 强激光与粒子束 **28** 080101]

[9] Huang T X, Wu C S, Chen Z J, Yan J, Li X, Ge F J, Zhang X, Jiang W, Deng B, Hou L F, Pu Y D, Dong Y S, Wang L F 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 025201 (in Chinese) [黄天暉, 吴畅书, 陈忠靖, 晏骥, 李欣, 葛峰峻, 张兴, 蒋炜, 邓博, 侯立飞, 蒲昱东, 董云松, 王立锋 2023 物理学报 **72** 025201]

[10] Landen O L, Edwards M J, Haan S W, Robey H F, Milovich J L, Spears B K, Weber S V, Clark D S, Lindl J D, MacGowan B J, Moses E I, Atherton L J, Amendt P A, Boehly T R, Bradley D K, Braun D G, Callahan D A, Celliers P M, Collins G W, Dewald E L, Divol L, Frenje J A, Glenzer S H, Hamza A, Hammel B A, Hicks D G, Hoffman N, Izumi N, Jones O S, Kilkenny J D, Kirkwood R K, Kline J L, Kyrala G A, Marinak M M, Meezan N B, Meyerhofer D D, Michel P A, Munro D H, Olson R E, Nikroo A, Regan S P, Suter L J, Thomas C A, Wilson D C 2011 *Phys. Plasmas* **18** 051002

[11] Callahan D A, Hurricane O A, Ralph J E, Thomas C A, Baker K L, Benedetti L R, Berzak-Hopkins L F, Casey D T, Chapman T, Czajka C E, Dewald E L, Divol L, Döppner T, Hinkel D E, Hohenberger M, Jarrott L C, Khan S F, Kritcher A L, Landen

- O L, LePape S, MacLaren S A, Masse L P, Meezan N B, Pak A E, Salmonson J D, Woods D T, Izumi N, Ma T, Mariscal D A, Nagel S R, Kline J L, Kyrala G A, Loomis E N, Yi S A, Zylstra A B, Batha S H 2018 *Phys. Plasmas* **25** 056305
- [12] Kritcher A L, Casey D T, Thomas C A, Zylstra A B, Hohenberger M, Baker K L, LePape S, Bachmann B, Bhandarkar S, Biener J, Braun T, Clark D S, Divol L, Döppner T, Hinkel D, Kong C, Mariscal D A, Millot M, Milovich J L, Nikroo A, Pak A E, Rice N G, Robey H F, Stadermann M, Sevier J, Strozzi D J, Weber C R, Wild C, Woodworth B N, Edwards M J, Callahan D A, Hurricane O A 2020 *Phys. Plasmas* **27** 052710
- [13] Li B, Zhang Z W, He Z B, Gao D Z, Chen S F, He X S, Zhao X S, Qi X B, Liu Y Y, Wang Z W, Liu M F, Ma X J, Meng J, Feng J H, Su L, Chen Y P, Liu X D, Li J, Li J 2015 *High Power Laser Part. Beams* **27** 032024 (in Chinese) [李波, 张占文, 何智兵, 高党忠, 陈素芬, 何小珊, 赵学森, 漆小波, 刘一杨, 王宗伟, 刘梅芳, 马小军, 孟婕, 冯建红, 苏琳, 陈永平, 刘向东, 李婧, 李洁 2015 强激光与粒子束 **27** 032024]
- [14] Gu J F, Dai Z S, Gu P J, Ye W H, Zheng W D, Zou S Y 2016 *Chin. J. Comput. Phys.* **33** 645 (in Chinese) [谷建法, 戴振生, 古培俊, 叶文华, 郑无敌, 邹士阳 2016 计算物理 **33** 645]
- [15] Gu J F, Ge F J, Dai Z S, Kang D G, Zou S Y 2022 *Chin. J. Comput. Phys.* **39** 268 (in Chinese) [谷建法, 葛峰峻, 戴振生, 康洞国, 邹士阳 2022 计算物理 **39** 268]
- [16] MacGowan B J, Landen O L, Casey D T, Young C V, Callahan D A, Hartouni E P, Hatarik R, Hohenberger M, Ma T, Mariscal D A, Moore A S, Nora R C, Rinderknecht H G, Schlossberg D J, Van-Wonterghem B M 2021 *High Energy Density Phys.* **40** 100944
- [17] Rinderknecht H G, Casey D T, Hatarik R, Bionta R M, MacGowan B J, Patel P K, Landen O L, Hartouni E P, Hurricane O A 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 145002
- [18] Kritcher A L, Young C V, Robey H F, Weber C R, Zylstra A B, Hurricane O A, Callahan D A, Ralph J E, Ross J S, Baker K L, Casey D T, Clark D S, Döppner T, Divol L, Hohenberger M, Berzak-Hopkins L F, LePape S, Meezan N B, Pak A E, Patel P K, Tommasini R, Ali S J, Amendt P A, Atherton L J, Bachmann B, Bailey D, Benedetti L R, Betti R, Bhandarkar S D, Biener J, Bionta R M, Birge N W, Bond E J, Bradley D K, Braun T, Briggs T M, Bruhn M W, Celliers P M, Chang B, Chapman T, Chen H, Choate C, Christopherson A R, Crippen J W, Dewald E L, Dittrich T R, Edwards M J, Farmer W A, Field J E, Fittinghoff D N, Frenje J A, Gaffney J A, Gatu-Johnson M, Glenzer S H, Grim G P, Haan S W, Hahn K D, Hall G N, Hammel B A, Harte J A, Hartouni E P, Heebner J E, Hernandez V J, Herrmann H W, Herrmann M C, Hinkel D E, Ho D D, Holder J P, Hsing W W, Huang H, Humbird K D, Izumi N, Jarrott L C, Jeet J, Jones O S, Kerbel G D, Kerr S M, Khan S F, Kilkenny J D, Kim Y, Geppert-Kleinrath H, Geppert-Kleinrath V, Kong C, Koning J M, Kruse M K G, Kroll J J, Kustowski B, Landen O L, Langer S H, Larson D, Lemos N C,

Lindl J D, Ma T, MacDonald M J, MacGowan B J, Mackinnon A J, MacLaren S A, MacPhee A G, Marinak M M, Mariscal D A, Marley E V, Masse L P, Meaney K D, Michel P A, Millot M, Milovich J L, Moody J D, Moore A S, Morton J W, Murphy T J, Newman K, DiNicola J-M, Nikroo A, Nora R C, Patel M V, Pelz L J, Peterson J L, Ping Y, Pollock B B, Ratledge M, Rice N G, Rinderknecht H G, Rosen M, Rubery M S, Salmonson J D, Sater J, Schiaffino S, Schlossberg D J, Schneider M B, Schroeder C R, Scott H A, Sepke S M, Sequoia K, Sherlock M W, Shin S, Smalyuk V A, Spears B K, Springer P T, Stadermann M, Stoupin S, Strozzi D J, Suter L J, Thomas C A, Town R P J, Trosseille C, Tubman E R, Volegov P L, Widmann K, Wild C, Wilde C H, Van-Wonterghem B M, Woods D T, Woodworth B N, Yamaguchi M, Yang S T, Zimmerman G B 2022 *Nat. Phys.* **18** 251

[19] Kritcher A L, Schlossberg D J, Weber C R, Young C V, Hurricane O A, Dewald E L, Zylstra A B, Allen A, Bachmann B, Baker K L, Baxamusa S, Braun T, Brunton G, Callahan D A, Casey D T, Chapman T, Choate C, Clark D S, DiNicola J-M, Divol L, Edwards M J, Haan S W, Fehrenbach T, Hayes S, Hinkel D E, Hohenberger M, Humbird K D, Izumi N, Jones O S, Kur E, Kustowski B, Kong C, Landen O L, Larson D, Lepro-Chavez X, Lindl J D, MacGowan B J, MacLaren S A, Marinak M M, Michel P A, Millot M, Nikroo A, Nora R C, Pak A E, Patel P K, Ralph J E, Ratledge M, Rubery M S, Ruof N W, Sepke S M, Stadermann M, Strozzi D J, Surawala T I, Tommasini R, Town R P J, Woodworth B N, Van-Wonterghem B M, Wild C 2024 *Phys. Plasmas* **31** 070502

[20] Edwards M J 2016 *J. Phys. Conf. Ser.* **688** 012017

[21] Yeamans C B, Cassata W S, Church J A, Fittinghoff D N, Gatu-Johnson M, Gharibyan N, Hatarik R, Sayre D B, Sio H W, Bionta R M, Bleuel D L, Caggiano J A, Cerjan C J, Cooper G W, Eckart M J, Edwards E R, Faye S A, Forrest C J, Frenje J A, Glebov V Y, Grant P M, Grim G P, Hartouni E P, Herrmann H W, Kilkenny J D, Knauer J P, Mackinnon A J, Merrill F E, Moody K J, Moran M J, Petrasso R D, Phillips T W, Rinderknecht H G, Schneider D H G, Sepke S M, Shaughnessy D A, Stoeffl W, Velsko C A, Volegov P L 2016 *J. Phys. Conf. Ser.* **717** 012117

[22] Dong J J, Deng K L, Wang Q Q, Ren K, Cao Z R, Jiang S E 2018 *Nucl. Fusion Plasma Phys.* **38** 125 (in Chinese) [董建军, 邓克立, 王强强, 任宽, 曹柱荣, 江少恩 2018 核聚变与等离子体物理 **38** 125]

[23] Spears B K, Edwards M J, Hatchett S, Kilkenny J D, Knauer J, Kritcher A L, Lindl J D, Munro D H, Patel P K, Robey H F, Town R P J 2014 *Phys. Plasmas* **21** 042702

[24] Hatarik R, Nora R C, Spears B K, Eckart M J, Grim G P, Hartouni E P, Moore A S, Schlossberg D J 2018 *Rev. Sci. Instrum.* **89** 10I138

[25] Yeamans C B, Gharibyan N 2016 *Rev. Sci. Instrum.* **87** 11D702

[26] Rinderknecht H G, Bionta R M, Grim G, Hatarik R, Khater H, Schlossberg D J, Yeamans C B 2018 *Rev. Sci. Instrum.* **89** 10I125

[27] Casey D T, Landen O L, Hartouni E P, Bionta R M, Hahn K D, Volegov P L, Fittinghoff D N, Geppert-Kleinrath V, Wilde C H, Milovich J L, Smalyuk V A, Field

- J E, Hurricane O A, Zylstra A B, Kritcher A L, Clark D S, Young C V, Nora R C, Callahan D A, MacGowan B J, Munro D H, Spears B K, Peterson J L, Gaffney J A, Humbird K D, Kruse M K G, Moore A S, Schlossberg D J, Gatu-Johnson M, Frenje J A 2021 *Phys. Plasmas* **28** 042708
- [28] Zimmerman G B, Kruer W L 1975 *Comments Plasma Phys. Control. Fusion* **2** 51
- [29] Marinak M M, Tipton R E, Landen O L, Murphy T J, Amendt P A, Haan S W, Hatchett S P, Keane C J, McEachern R, Wallace R 1996 *Phys. Plasmas* **3** 2070
- [30] Marinak M M, Kerbel G D, Gentile N A, Jones O S, Munro D H, Pollaine S, Dittrich T R, Haan S W 2001 *Phys. Plasmas* **8** 2275
- [31] Pei W B 2007 *Commun. Comput. Phys.* **2** 255
- [32] Marinak M M, Zimmerman G B, Chapman T, Kerbel G D, Patel M V, Koning J M, Sepke S M, Chang B, Schroeder C R, Harte J A, Bailey D S, Taylor L A, Langer S H, Belyaev M A, Clark D S, Gaffney J A, Hammel B A, Hinkel D E, Kritcher A L, Milovich J L, Robey H F, Weber C R 2024 *Phys. Plasmas* **31** 070501
- [33] Zhang H S, Kang D G, Wu C S, Hao L, Shen H, Zou S Y, Zhu S P, Ding Y K 2024 *Matter Radiat. Extremes* **9** 015601
- [34] Yan Z, Chen Z, Li J W, Wang L F, Li Z Y, Zhang C, Ge F J, Wu J F, Zhang W Y 2025 *Matter Radiat. Extremes* **10** 057602
- [35] Kishony R, Shvarts D 2001 *Phys. Plasmas* **8** 4925
- [36] Clark D S, Haan S W, Salmonson J D 2008 *Phys. Plasmas* **15** 056305
- [37] Haan S W, Lindl J D, Callahan D A, Clark D S, Salmonson J D, Hammel B A, Atherton L J, Cook R C, Edwards M J, Glenzer S H, Hamza A V, Hatchett S P, Herrmann M C, Hinkel D E, Ho D D, Huang H, Jones O S, Kline J L, Kyrala G, Landen O L, MacGowan B J, Marinak M M, Meyerhofer D D, Milovich J L, Moreno K A, Moses E I, Munro D H, Nikroo A, Olson R E, Peterson K, Pollaine S M, Ralph J E, Robey H F, Spears B K, Springer P T, Suter L J, Thomas C A, Town R P J, Vesey R, Weber S V, Wilkens H L, Wilson D C 2011 *Phys. Plasmas* **18** 051001
- [38] Scott R H H, Clark D S, Bradley D K, Callahan D A, Edwards M J, Haan S W, Jones O S, Spears B K, Marinak M M, Town R P J, Norreys P A, Suter L J 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 075001
- [39] Gu J F, Dai Z S, Fan Z F, Zou S Y, Ye W H, Pei W B, Zhu S P 2014 *Phys. Plasmas* **21** 012704

- [40] Kritcher A L, Town R P J, Bradley D, Clark D S, Spears B K, Jones O S, Haan S W, Springer P T, Lindl J D, Scott R H H, Callahan D A, Edwards M J, Landen O L 2014 *Phys. Plasmas* **21** 042708
- [41] Hurricane O A, Casey D T, Landen O L, Kritcher A L, Nora R C, Patel P K, Gaffney J A, Humbird K D, Field J E, Kruse M K G, Peterson J L, Spears B K 2020 *Phys. Plasmas* **27** 062704
- [42] Hurricane O A, Casey D T, Landen O L, Callahan D A, Bionta R M, Haan S W, Kritcher A L, Nora R C, Patel P K, Springer P T, Zylstra A B 2022 *Phys. Plasmas* **29** 012703
- [43] Ralph J E, Ross J S, Zylstra A B, Kritcher A L, Robey H F, Young C V, Hurricane O A, Pak A E, Callahan D A, Baker K L, Casey D T, Döppner T, Divol L, Hohenberger M, LePape S, Patel P K, Tommasini R, Ali S J, Amendt P A, Atherton L J, Bachmann B, Bailey D, Benedetti L R, Berzak-Hopkins L F, Betti R, Bhandarkar S D, Biener J, Bionta R M, Birge N W, Bond E J, Bradley D K, Braun T, Briggs T M, Bruhn M W, Celliers P M, Chang B, Chapman T, Chen H, Choate C, Christopherson A R, Clark D S, Crippen J W, Dewald E L, Dittrich T R, Edwards M J, Farmer W A, Field J E, Fittinghoff D N, Frenje J, Gaffney J A, Gatu-Johnson M, Glenzer S H, Grim G P, Haan S W, Hahn K D, Hall G N, Hammel B A, Harte J A, Hartouni E P, Heebner J E, Hernandez V J, Herrmann H W, Herrmann M C, Hinkel D E, Ho D D, Holder J P, Hsing W W, Huang H, Humbird K D, Izumi N, Jarrott L C, Jeet J, Jones O S, Kerbel G D, Kerr S M, Khan S F, Kilkenny J D, Kim Y, Geppert-Kleinrath H, Geppert-Kleinrath V, Kong C, Koning J M, Kroll J J, Kruse M K G, Kustowski B, Landen O L, Langer S H, Larson D, Lemos N C, Lindl J D, Ma T, MacDonald M J, MacGowan B J, Mackinnon A J, MacLaren S A, MacPhee A G, Marinak M M, Mariscal D A, Marley E V, Masse L P, Meaney K D, Meezan N B, Michel P A, Millot M, Milovich J L, Moody J D, Moore A S, Morton J W, Murphy T J, Newman K, DiNicola J-M, Nikroo A, Nora R C, Patel M V, Pelz L J, Peterson J L, Ping Y, Pollock B B, Ratledge M, Rice N G, Rinderknecht H G, Rosen M, Rubery M S, Salmonson J D, Sater J, Schiaffino S, Schlossberg D J, Schneider M B, Schroeder C R, Scott H A, Sepke S M, Sequoia K, Sherlock M W, Shin S, Smalyuk V A, Spears B K, Springer P T, Stadermann M, Stoupin S, Strozzi D J, Suter L J, Thomas C A, Town R

- P J, Trosseille C, Tubman E R, Volegov P L, Weber C R, Widmann K, Wild C, Wilde C H, Van-Wonterghem B M, Woods D T, Woodworth B N, Yamaguchi M, Yang S T, Zimmerman G B 2024 *Nat. Commun.* **15** 2975
- [44] Springer P T, Hurricane O A, Hammer J H, Betti R, Callahan D A, Campbell E M, Casey D T, Cerjan C J, Cao D, Dewald E L, Divol L, Döppner T, Edwards M J, Field J E, Forrest C, Frenje J, Gaffney J A, Gatu-Johnson M, Glebov V Y, Goncharov V N, Grim G P, Hartouni E P, Hatarik R, Hinkel D E, Berzak-Hopkins L F, Igumenshchev I, Knapp P, Knauer J P, Kritcher A L, Landen O L, Pak A E, LePape S, Ma T, MacPhee A G, Munro D H, Nora R C, Patel P K, Peterson J L, Radha P B, Regan S P, Rinderknecht H G, Sangster C, Spears B K, Stoeckl C 2019 *Nucl. Fusion* **59** 032009
- [45] Zhang C B, Yu C X, Yang C, Xiao D L, Liu J, Fan Z F 2019 *Phys. Plasmas* **26** 022707
- [46] Casey D T, Kunimune J, Hurricane O A, Landen O L, Springer P T, Bionta R M, Young C V, Nora R C, MacGowan B J, Gaffney J A, Kustowski B, Weber C R, Kritcher A L, Milovich J L, Haan S W, Gatu-Johnson M, Schlossberg D J, Kerr S M, Volegov P L, Fittinghoff D N, Geppert-Kleinrath V, Wilde C H, Freeman M 2025 *High Energy Density Phys.* **54** 101172
- [47] Casey D T, MacGowan B J, Hurricane O A, Landen O L, Nora R C, Haan S W, Kritcher A L, Zylstra A B, Ralph J, Dewald E L, Hohenberger M, Pak A E, Springer P T, Weber C R, Milovich J L, Divol L, Hartouni E P, Bionta R M, Hahn K, Schlossberg D J, Moore A S, Gatu-Johnson M 2023 *Phys. Rev. E* **108** L053203
- [48] Arfken G B, Weber H J, Harris F E 2013 *Mathematical Methods for Physicists* (7th ed.) (Amsterdam: Elsevier Academic Press) pp712-772
- [49] Butcher J C 2008 *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations* (2nd ed.) (Chichester: John Wiley & Sons Ltd) pp137-316
- [50] Nayfeh A H 2004 *Perturbation Methods* (Weinheim: Wiley-VCH) pp1-55
- [51] Blazek J 2001 *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications* (Oxford: Elsevier) pp29-180

- [52] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, Zang T A 1988 *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Berlin: Springer) pp31-93
- [53] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, Zang T A 2007 *Spectral Methods* (Berlin: Springer) pp435-488
- [54] Atzeni S, Meyer-ter-Vehn J 2004 *The Physics of Inertial Fusion* (Oxford: Clarendon Press) pp230-236
- [55] Saillard Y 2004 *Laser Part. Beams* **22** 451

录用稿件，非最终出版稿

Reconstruction of Three-Dimensional Piston Model for Analyzing Implosion Asymmetry Growth

Huang Tian-Xuan, Jiang Wei, Yao Pei-Lin, Pu Yu-Dong, Yan Ji[†]

(National Key Laboratory of Plasma Physics, Laser Fusion Research Center, China
Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China)

Abstract: The three-dimensional (3D) piston model provides a convenient framework for investigating the growth of implosion asymmetries. In the conventional approach, the imploding shell is discretized into multiple small conical pistons, each constrained to move radially and coupled through an isobaric core. However, this method is susceptible to numerical instabilities and entails complex input-output dependencies, which limit its broader applicability in asymmetry analysis.

To address these limitations, the 3D piston model is reconstructed using a spherical-harmonic expansion, through which the original governing equations are reduced to a set of ordinary differential equations describing the time-dependent coefficients of each mode. This reformulation explicitly characterizes the coupling mechanism between the evolution of low-mode asymmetry perturbations and the primary quasi-one-dimensional implosion dynamics, while also improving numerical stability. Analytical solutions, including zeroth- through second-order perturbative terms, are derived and subsequently validated against numerical integrations performed with a high-order Runge–Kutta solver, thus confirming the reliability of the reconstructed model.

Subsequently, the general characteristics of asymmetry growth during the deceleration and stagnation phases of implosion are systematically investigated. The key findings are summarized as follows: (1) First-order perturbations at stagnation scale linearly with the initial asymmetry seeds, with the sensitivity coefficients depending on the convergence ratio while remaining independent of different modes. (2) Second-order perturbations, comprising both nonlinear and mode-coupling terms, are quadratic polynomials of the initial seeds. (3) Mode parity plays an important role in asymmetry evolution, where reversing an odd mode yields mirror symmetry, or reversing an even mode alters both the image and the process, with more pronounced differences in the nonlinear growth stage. (4) The self-coupling effect of each mode can excite harmonic-like even-mode perturbations, with the second harmonic being the most prominent.

Based on the preceding methods and results, as illustrated in Fig. 11, a generalized scaling relation between the normalized residual kinetic energy ($nRKE$) and the asymmetry metric σ_s^2 is derived: $nRKE \approx 1 - (1 + \sigma_s^2)^{-\lambda}$. Here, σ_s^2 serves as an alternative to the conventional metric f^2 , where both are defined from the angular

distribution of the shell areal density at stagnation, $\chi_s(\Omega)$, which is measurable via neutron diagnostics in experiments. Moreover, the difference in the mappings of σ_s^2 and f^2 to $nRKE$ is investigated in detail using spherical-harmonic expansion. In the small-amplitude limit or for a single odd-mode case, f^2 is approximately proportional to $nRKE$; however, for even modes, the mapping varies significantly with both the sign and magnitude of the perturbation amplitude. Owing to its susceptibility to mode parity, f^2 cannot provide a unified scaling relation with $nRKE$. In contrast, σ_s^2 effectively tracks the relative variation in core volume induced by asymmetry perturbations at stagnation. Based on the dependence of internal energy on core volume and the principle of energy conservation, σ_s^2 exhibits a monotonic mapping to $nRKE$, which is less sensitive to mode parity. Although this generalized scaling relation is derived in the small-amplitude limit, it remains approximately valid under even-mode-dominated or multi-factor/multi-mode perturbations, demonstrating broader applicability across a wide parameter range, as exemplified in Fig. 11(b).

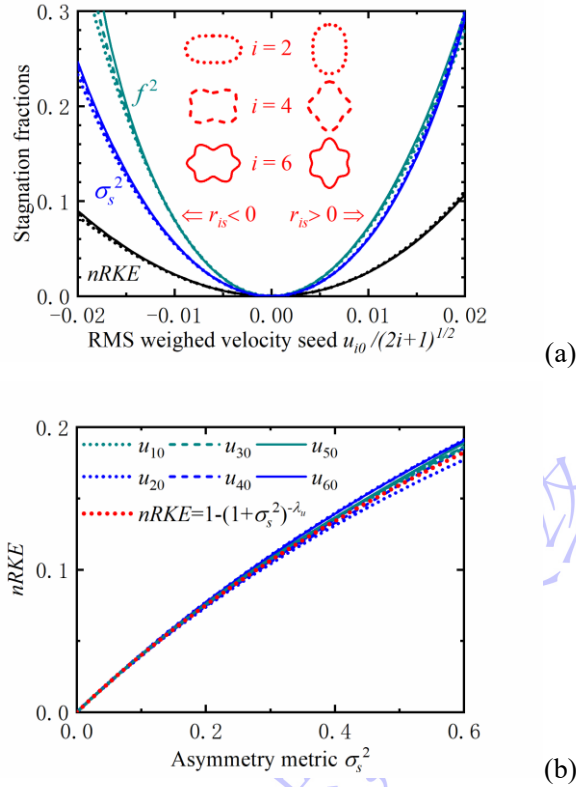


Fig. 11. (a) Stagnation fractions versus velocity seed u_{i0} for even modes $i=2, 4, 6$ at $C_r = 7$ (convergence ratio). $\sigma_s^2 = \langle \chi_s^{-3/2} \rangle \langle \chi_s^{-1/2} \rangle^{-3} - 1$ and $f^2 = 1 - \langle \chi_s \rangle^{-1} \langle \chi_s^{-1} \rangle^{-1}$ are asymmetry metrics, with r_{is} denoting mode- i shape asymmetry. For even modes, implosion dynamics and morphology depend on the perturbation sign. Both metrics reflect this, but σ_s^2 tracks the trend in $nRKE$ (normalized residual kinetic energy) much more closely than f^2 . (b) $nRKE$ versus σ_s^2 for all modes $i=1-6$ at $C_r = 7$. For both odd and even parities, the

dependence closely follows the scaling relation $nRKE = 1 - (1 + \sigma_s^2)^{-\lambda_u}$ for velocity seeds.

In summary, this study offers an efficient, numerically stable tool for analyzing multi-factor, multi-mode asymmetry growth. The σ_s^2 -based scaling relation enables experimental inference of asymmetry-induced $nRKE$, providing a unified framework for quantitatively evaluating performance degradation in asymmetric implosions. This framework supports diverse applications, including parameter sensitivity analysis, uncertainty propagation modeling, design margin allocation, and experimental attribution analysis.

Keywords: piston model; implosion asymmetry; normalized residual kinetic energy ($nRKE$); performance degradation

PACS: 52.57.-z, 52.57.Fg

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. U2530215, 12575256), the Foundation of National Key Laboratory of Plasma Physics (Grant Nos. JCKYS2024212801), and National Key R&D Program of China (Grant Nos. 2023YFA1608400)

†Corresponding author. E-mail: lucifer@mail.ustc.edu.cn

The first author. E-mail: huangtx2013@aliyun.com

录用稿件，非最终出版稿