

自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中的相互作用效应

贺俊凯¹⁾ 何亮君¹⁾ 张永昌^{1)*} 张晓斐^{2)†} 董彪^{1)‡}

1) (西安交通大学物理学院, 教育部物质非平衡与调控重点实验室, 西安 710049)

2) (陕西科技大学物理与信息科学学院, 西安 710021)

自旋-轨道耦合 (spin-orbit coupling, SOC) 可以使粒子的内部自由度与外部运动自由度产生关联, 并显著影响单粒子的色散关系, 是研究新奇宏观量子态和非平庸超流态的重要手段。与固体材料中天然固有的 SOC 不同, 冷原子体系中的 SOC 可通过原子与光场之间的相互作用实现, 具有较高的可操控性, 从而为量子模拟提供了重要平台。本文从相互作用效应的角度综述自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体 (spin-orbit-coupling Bose-Einstein condensate, SOC-BEC) 的理论进展。首先介绍冷原子体系中 SOC 的基本实现方式及一维拉曼型 SOC 对单粒子色散谱的影响, 指出在一维 SOC-BEC 中单粒子基态可在非零动量处发生二重简并。随后讨论短程相互作用对体系基态相的影响, 分析了由此呈现出的基态相图特征, 以及条纹相、平面波相和零动量相之间的相变, 同时还介绍了基态相的低能激发谱与宏观动力学响应的关键特征, 以及真实实验条件下量子涨落、有限温度和有限尺寸效应对以上性质的修正。接下来继续综述长程相互作用对体系基态结构、空间密度调制、自组织结构、自旋纹理以及超固体相稳定性的影响。总体而言短程相互作用和长程相互作用共同影响 SOC-BEC 的基态、低能激发和动力学行为, 并为研究条纹相的超固体特征、长程相互作用主导的超固体相及相关拓扑结构, 以及在实验上探测这些相提供了可调控的量子气体平台。

关键词: 自旋-轨道耦合; 玻色-爱因斯坦凝聚体; 短程相互作用; 长程相互作用; 超固体

*通信作者. E-mail: zhangyc@xjtu.edu.cn

†通信作者. E-mail: xfzhang@sust.edu.cn

‡通信作者. E-mail: biaodong@xjtu.edu.cn

1 引言

复杂量子多体体系在强关联、长时间演化和非平衡条件下，常因希尔伯特空间维数快速增长、纠缠累积以及符号问题等限制而难以用经典计算直接求解^[1,2]。量子模拟的基本思想是利用高度可控的量子体系实现目标模型的哈密顿量，并通过可测物理量提取其基态、激发谱和动力学响应等信息^[1,2]。在此背景下超冷原子体系凭借高洁净度、长相干时间以及相互作用和外场参数的可调控性，已成为研究量子多体物理的重要平台^[3-5]。其中玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate, BEC) 具有宏观量子特性和良好的实验可观测性，其基态和动力学行为通常可由 Gross-Pitaevskii 方程和 Bogoliubov 理论描述，为研究量子气体的基态结构、低能激发、超流性质和动力学行为提供了理想实验体系^[3,6]。

在 BEC 中引入自旋-轨道耦合 (spin-orbit coupling, SOC) 后，原子的内部自由度与平动的外部自由度产生关联，单粒子的色散关系和基态性质随之改变。与固体材料中由自身晶格结构和材料性质决定的 SOC 不同，冷原子体系中的 SOC 可通过原子与光之间的相互作用实现，其耦合形式、强度和维度均具有较高的可操控性。这一特点使 SOC-BEC 成为研究单粒子色散谱、多体基态相图、新奇宏观量子态和非平庸超流态的重要平台^[6-8]。

现已有关于人造规范势和自旋-轨道耦合量子气体的综述，较为系统地介绍了冷原子体系中 SOC 的基本模型与单粒子色散关系、实验方案，以及零动量相、平面波相和条纹相等典型基态相及其相关性质^[6-8]。但近年来随着高维 SOC 和不同实验实现方案的发展^[9]、偶极量子气体中量子液滴和超固体相研究的进展^[10]，以及低能激发、超流性质和非平衡动力学行为相关研究的开展^[11-13]，相关研究逐渐从基态相拓展到低能激发和动力学行为的理论预言与实验观察。因此从相互作用效应出发梳理 SOC-BEC 的研究进展，有助于理解不同基态相的形成条件、稳定区域及其实验可观测信号。

基于这一考虑，本文侧重综述相互作用效应对 SOC-BEC 系统性质的影响。全文围绕短程相互作用与长程相互作用如何影响体系的基态、低能激发谱和动力学行为展开。第二章概述冷原子体系中 SOC 的典型实验方案及其对单粒子色散谱的影响；第三章讨论短程相互作用对 SOC-BEC 多体基态、低能激发谱和集体模的影响，以及真实实验条件下量子涨落、有限温度和有限尺寸效应对以上性质的修正；第四章进一步讨论长程相互作用背景下的基态结构与稳定机制、低能激发谱和非平衡动力学行为；第五章总结全文，并展望如何通过低能激发谱、结构因子、集体响应和动力学观测等手段，区分条纹相的类超固体行为、真正意义上的超固体相及相关拓扑结构。

2 冷原子体系中 SOC 的实现及单粒子色散谱

冷原子体系中的自旋-轨道耦合并非材料内禀性质，而是可以通过原子与光之间的相互作用实现的人造 SOC 效应。在这类体系中原子从一个内态跃迁到另一个内态时，可以通过光子反冲获得动量的改变，从而使原子的内部自由度和平动的外部自由度发生耦合^[6,7,14]。本章主要介绍冷原子体系中 SOC 的典型实验方案及其对单粒子色散谱的影响。一维拉曼型 SOC 可以改变单粒子色散谱，使单粒子基态在非零动量处产生两个极小值，由此可驱动条纹相、平面波相和零动量相等多体基态相形成；而二维 SOC 的拉曼晶格方案和合成维度的实验方案扩展了可构造的人造规范场和有效自旋-动量耦合结构，为研究拓扑结构、密度调制、类超固体行为以及相关动力学响应提供了更丰富的平台。

2.1 一维拉曼型 SOC 的实现及单粒子色散关系

冷原子体系中实现 SOC 的基本思路，是通过空间依赖的光场耦合原子的内态，使原子在绝热运动过程中获得几何相位，并在有效哈密顿量中表现为人造规范势。对于具有内部自由度的中性原子，单粒子哈密顿量可写为

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

其中 $\hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r})$ 描述内部能级与外场之间的耦合。若将总波函数展开在位置依赖的缀饰态基底 $\{|\chi_n(\mathbf{r})\rangle\}$ 上，并在绝热近似下投影到低能缀饰态子空间，可得到有效哈密顿量^[6,15]

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})]^2 + \hat{\Phi}(\mathbf{r}) + \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

其中 $\hat{\varepsilon}$ 为缀饰态能量项， $\hat{\Phi}$ 为几何标量势，而^[6,15]

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = i\hbar \langle \chi_m(\mathbf{r}) | \nabla | \chi_n(\mathbf{r}) \rangle \quad (3)$$

为贝里联络对应的矩阵形式矢势。由于该矢势作用在内部自由度空间中，一般可形成非阿贝尔人造规范势，并在有效哈密顿量中产生自旋与动量之间的耦合^[7,8,15]。因此冷原子体系中的 SOC 并不是材料中的相对论效应，而是由光场耦合和内态结构共同实现的人造 SOC 效应。

在现有实验实现中，一维拉曼型 SOC 是最成熟、也最具代表性的基本模型^[7,16]。该方案通常利用两束拉曼光在两个超精细态之间驱动双光子拉曼过程，使原子在内态跃迁的同时获得确定的动量转移。设两束拉曼光的波矢差为 $\mathbf{q} \approx 2k_R \hat{\mathbf{x}}$ ，经过规范变换后，可得到具有平移不变形式的一维 SOC 哈密顿量^[16-18]

$$\hat{H}_{\text{SOC}} = \frac{(\hat{p}_x - \hbar k_R \hat{\sigma}_z)^2 + \hat{p}_\perp^2}{2m} + \frac{\delta}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\Omega}{2} \hat{\sigma}_x, \quad (4)$$

其中 Ω 为拉曼过程的有效拉比频率, δ 为双光子失谐, k_R 为反冲动量尺度。式 (4) 表明沿 x 方向的动量与赝自旋 $\hat{\sigma}_z$ 发生耦合, 而拉曼耦合项 $\Omega\hat{\sigma}_x/2$ 则混合了两个自旋分量。忽略横向动量后, 式 (4) 可在动量表象中对角化, 得到两条缀饰能带 [17,18]

$$E_{\pm}(k) = \frac{\hbar^2(k^2 + k_R^2)}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2} - \frac{2E_R k}{k_R}\right)^2}, \quad (5)$$

其中 $E_R = \hbar^2 k_R^2 / (2m)$ 为反冲能。当 $\delta = 0$ 时, 低能带 $E_-(k)$ 的极小值位置随 Ω 改变而发生变化: 在 $\Omega < 4E_R$ 时, 低能带在 $\pm k_{\min}$ 处具有两个对称极小值。在单粒子近似下, 两个极小值的位置满足 [17,18]

$$k_{\min} = k_R \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{4E_R}\right)^2}, \quad (\delta = 0, \Omega < 4E_R). \quad (6)$$

当 $\Omega \geq 4E_R$ 时, 两个极小值合并到 $k = 0$ 。图1概括了一维拉曼型 SOC 的实验实现、拉曼跃迁能级结构及单粒子色散谱。其关键在于凝聚体的最低能态不再一定对应于零动量, 而是可能出现在两个非零动量的简并极小值。与此同时由于有效磁场依赖于动量, 本征态具有明显的动量依赖自旋混合与自旋极化, 其动量空间中的自旋纹理可通过自旋分辨飞行时间成像直接观测 [16]。当 $\delta \neq 0$ 时, 两个极小值不再简并, 体系更倾向于形成单一有限动量凝聚态, 并使条纹相的稳定区域减小 [8,18]。

上述结果表明一维拉曼型 SOC 不仅是最成熟的实验实现方案, 也是理解 SOC-BEC 多体基态相图的基本模型。下文讨论的条纹相、平面波相及零动量相的产生和相变均与上述单粒子色散谱中极小值位置的变化密切相关。但传统拉曼方案也存在着自发辐射加热和技术噪声等限制, 这会影响体系寿命和最低可达温度 [15]。

2.2 二维 SOC 的实现及合成维度拓展方案

一维拉曼型 SOC 已经表明 SOC 可以显著改变单粒子色散谱, 并使凝聚体的最低能态出现在非零动量处。但要研究贝里曲率、二维自旋纹理、拓扑能带以及与密度调制和超固体行为相关的问题, 则需要在两个或更多的空间方向上实现稳定的自旋与动量耦合。二维 SOC 的实验关键在于多束光场相对相位的长期稳定控制; 若相位漂移不可忽略, 那么所实现的人造规范势及其拓扑性质都将受到显著影响 [7,14]。

当前较有代表性的二维实现路线是拉曼晶格方案。该方案利用光学晶格提供周期势, 并通过空间依赖的拉曼耦合在晶格中同时引入自旋翻转与动量转移。其连续模型可概括为 [19,21]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{\text{lat}}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + m_z \hat{\sigma}_z, \quad (7)$$

其中 $V_{\text{lat}}(\mathbf{r})$ 为光学晶格势, $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ 为空间依赖的拉曼耦合, m_z 为均匀塞曼项。投影到低能带子空间后,

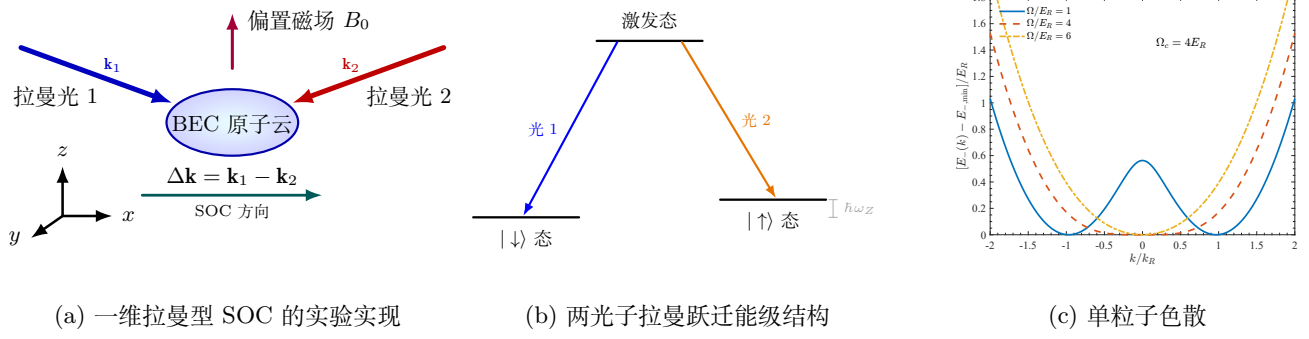


图 1 一维拉曼型自旋-轨道耦合的实验实现、能级结构与单粒子色散谱。(a) 一维拉曼型自旋-轨道耦合的实验实现示意图。两束拉曼光耦合 BEC 原子云中的两个赝自旋态，并在双光子拉曼跃迁过程中向原子传递动量 $\hbar\Delta\mathbf{k}$ ，其中 $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \simeq 2k_R\hat{x}$ ，从而在 x 方向形成一维自旋-轨道耦合。偏置磁场 B_0 用于定义量子化轴并调节相关能级结构。该图根据文献^[8,16]改绘；(b) 两光子拉曼跃迁能级结构示意图。两束拉曼光经由远失谐激发态耦合两个赝自旋态 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ ，两个赝自旋基态之间存在由偏置磁场 B_0 诱导的塞曼能级差，记为 $\hbar\omega_Z$ 。该图根据文献^[7]改绘；(c) 单粒子色散谱。曲线根据文献^[8]中的一维拉曼型 SOC 标准单粒子色散关系，并结合本文式 (5) 重新计算并绘制；计算参数取 $p_\perp = 0$ 、 $\delta = 0$ 、 $\Omega/E_R = 1, 4, 6$ 。图中以 k_R 和 $E_R = \hbar^2 k_R^2 / (2m)$ 分别为动量和能量单位，横轴为 k/k_R ，纵轴为 $[E_-(k) - E_{-,min}]/E_R$ ，其中 $E_{-,min}$ 为对应拉曼耦合强度下低能带的最低值。

Fig. 1. Experimental realization, level structure, and single-particle dispersion of one-dimensional Raman-induced spin-orbit coupling. (a) Schematic of the experimental realization of one-dimensional Raman-induced spin-orbit coupling. Two Raman laser beams couple two pseudospin states in a BEC atomic cloud and transfer a momentum $\hbar\Delta\mathbf{k}$ to the atoms through a two-photon Raman transition, where $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \simeq 2k_R\hat{x}$, thereby generating one-dimensional spin-orbit coupling along the x direction. The bias magnetic field B_0 defines the quantization axis and tunes the relevant level structure. Redrawn based on Refs. ^[8,16]; (b) schematic of the energy-level structure for the two-photon Raman transition. The two Raman beams couple the two pseudospin states $|\downarrow\rangle$ and $|\uparrow\rangle$ via a far-detuned excited state. The two pseudospin ground states are separated by a Zeeman energy splitting induced by the bias magnetic field B_0 , denoted by $\hbar\omega_Z$. Redrawn based on Ref. ^[7]; (c) Single-particle dispersion. The curves are recalculated and plotted from the standard single-particle dispersion relation for one-dimensional Raman-induced SOC in Ref. ^[8], together with Eq. (5) of the present manuscript; the parameters are $p_\perp = 0$, $\delta = 0$, and $\Omega/E_R = 1, 4, 6$. The momentum and energy are measured in units of k_R and $E_R = \hbar^2 k_R^2 / (2m)$, respectively. The horizontal axis is k/k_R , and the vertical axis is $[E_-(k) - E_{-,min}]/E_R$, where $E_{-,min}$ is the minimum of the lower dressed band for the corresponding Raman coupling strength.

动量空间中 $\mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\sigma}$ 的缠绕结构决定了贝里曲率和相关拓扑不变量^[19-21]。所以二维 SOC 的拉曼晶格方案不仅是一维模型的拓展,也使得冷原子体系的研究从连续体系中的基态相问题进一步扩展到光晶格中的拓扑模拟^[14,19,21,22]。

与二维 SOC 实现并行发展的另一条路线,是为了降低传统拉曼方案中的加热和退相干而发展出的窄线宽原子中的单光子钟跃迁方案,以及相对应的合成维度方法^[23-25]。所谓合成维度,就是将原子的不同内态视为额外方向上的格点,并通过受控耦合在这些格点之间建立等效跃迁。如此一来体系虽然在真实空间中的维度有限,却可以模拟更高维的规范结构和拓扑输运^[23,26,27]。以 ^{173}Yb 为代表的实验表明,这一路线不仅可以有效抑制传统拉曼方案中热效应,还能够同一实验平台中对几何相位、边缘流和威尔逊环等拓扑性质进行研究^[14,24,26,28]。

综上,一维拉曼型 SOC 为后续讨论短程相互作用下的多体基态相图提供了单粒子基础;二维 SOC 的拉曼晶格方案和合成维度等拓展方案则扩展了可构造的人工规范场和有效自旋-动量耦合结构,为研究二维自旋纹理和动力学行为提供了更丰富的实验平台。

3 SOC-BEC 中的短程相互作用效应

第二章已经说明了一维拉曼型 SOC 会改变单粒子色散谱,使单粒子基态在非零动量处出现两个极小值。然而对 BEC 而言,这一单粒子基态结构仅给出了凝聚体可能占据的动量位置;体系基态则由短程相互作用和 SOC 竞争共同决定。在零温平均场框架下,具有一维 SOC 的两分量 BEC 通常可以出现三类典型基态相:条纹相、平面波相和零动量相^[8,17,18]。上述平均场理论主要适用于稀薄、弱相互作用、绝大部分粒子处于凝聚且量子损耗较小的零温或极低温体系;对于受外势约束的体系,相图通常只能在平均密度变化不大的区域用于参考。因此,本章主要讨论短程相互作用对 SOC-BEC 基态的影响,及其对低能激发谱、集体模、超流性质的改变,以及在真实实验条件下量子涨落、有限温度和有限尺寸效应对以上性质的修正。

3.1 基态相变与条纹相

当单粒子基态具有两个简并极小值时,凝聚体可以相干占据两个极小值,也可以只占据其中一个极小值。早期关于 Rashba 型 SOC-BEC 的理论研究已经指出相互作用能够驱动单一平面波凝聚态与驻波或自旋条纹态之间的转变,加深了对 SOC-BEC 中平面波相和条纹相的形成机制的理解^[29]。对两分量 BEC,

短程相互作用哈密顿量可写为^[17,18]

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d\mathbf{r} \left[\frac{g_{\uparrow\uparrow}}{2} n_{\uparrow}^2 + \frac{g_{\downarrow\downarrow}}{2} n_{\downarrow}^2 + g_{\uparrow\downarrow} n_{\uparrow} n_{\downarrow} \right], \quad (8)$$

其中 $n_{\uparrow,\downarrow} = |\psi_{\uparrow,\downarrow}|^2$ 。在近自旋对称情形下，取 $g_{\uparrow\uparrow} \approx g_{\downarrow\downarrow} \equiv g$ ，并引入总密度 $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$ 与自旋密度 $s = n_{\uparrow} - n_{\downarrow}$ ，相互作用能密度可写为^[17,18]

$$\mathcal{E}_{\text{int}} = \frac{g_n}{2} n^2 + \frac{g_s}{2} s^2, \quad g_n = \frac{g + g_{\uparrow\downarrow}}{2}, \quad g_s = \frac{g - g_{\uparrow\downarrow}}{2}. \quad (9)$$

其中 g_n 对应总密度涨落的相互作用能， g_s 则与自旋混合和自旋极化相关。对实验中常用的 ^{87}Rb 超精细态而言， $g_{\uparrow\downarrow}$ 与 g 通常非常接近，使得 g_s 较小，这也是条纹相稳定区域较窄的重要原因之一^[8,17,18]。

当 $\delta = 0$ 且 $\Omega < 4E_R$ 时，单粒子低能带 $E_{-}(k_x)$ 在 $\pm k_{\min}$ 处具有两个简并极小值。考虑短程相互作用后，凝聚体实际占据的有限动量可记为 k_1 。三类典型基态相均可由如下两模变分波函数描述^[17,18]

$$\Psi(x) = \sqrt{n_0} [C_{+}\chi_{-}(k_1)e^{ik_1x} + C_{-}\chi_{-}(-k_1)e^{-ik_1x}], \quad |C_{+}|^2 + |C_{-}|^2 = 1, \quad (10)$$

其中 $\chi_{-}(\pm k_1)$ 为低能带在 $\pm k_1$ 处的缀饰自旋态， k_1 为相互作用平均场下的凝聚动量， n_0 为平均数密度；在单粒子极限下 k_1 可退化为 $k_{\min}$ 。若两个极小值被同时占据，体系形成条纹相；若只占据其中一个极小值，则形成平面波相；当 Ω 进一步增大并使两个极小值合并至 $k_x = 0$ 附近时，体系则形成零动量相。由此可见 SOC 改变单粒子色散谱，而短程相互作用则决定体系最终处于条纹相、平面波相还是零动量相。

在零失谐附近，体系通常随拉曼耦合强度增大呈现

条纹相 $\rightarrow$ 平面波相 $\rightarrow$ 零动量相

的演化顺序^[8,17,18]。其中条纹相到平面波相的转变通常为一阶，而平面波相到零动量相的转变通常为二阶。其物理原因在于 Ω 增大会增强两自旋分量之间的混合，并使低能带中两个极小值逐渐靠近；与此同时 g_s 决定自旋混合和自旋极化相关的相互作用能。正的 g_s 会抬高自旋极化能量，从而有利于两个动量分量的相干占据并稳定条纹相；当低能带逐渐有利于单一动量凝聚时，体系更容易进入平面波相；两个极小值合并后，零动量相成为最低能态。

在三类基态相中，条纹相具有特殊地位，因为它同时包含空间周期性密度分布和超流相干。当

$$|C_{+}| = |C_{-}| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (11)$$

两个有限动量分量的相干叠加会诱导总密度调制^[30,32]

$$n(x) = n_0[1 + C \cos(2k_1x + \phi)], \quad \lambda_{\text{st}} = \frac{\pi}{k_1}, \quad (12)$$

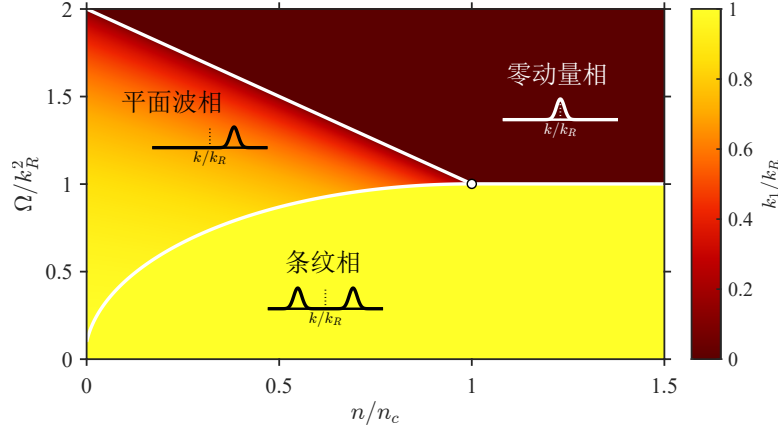


图 2 一维 SOC-BEC 的零温基态相图及动量占据示意。该图依据文献^[18]的均匀体系平均场结果重构并绘制, 计算中取 $\delta = 0$ 、 $g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow} \equiv g$ 、 $\gamma = 0.0012$ 。图中 k_R 为 SOC 动量尺度, 对应文献^[18]中的 k_0 。横轴为归一化密度 n/n_c , 其中 $n_c = k_R^2/(2\gamma g)$; 纵轴为归一化拉曼耦合强度 Ω/k_R^2 ; 颜色表示凝聚动量 k_1/k_R , 其中 k_1 为相互作用平均场下通过能量最小化得到的凝聚动量。图中展示了条纹相、平面波相和零动量相三个典型相区; 嵌入小图分别示意各相的动量空间占据特征。相边界和颜色分布根据文献^[18]重构并改绘。

Fig. 2. Zero-temperature ground-state phase diagram and momentum occupation in a one-dimensional SOC-BEC. The diagram is reconstructed from the uniform mean-field results of Ref. ^[18], with $\delta = 0$, $g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow} \equiv g$, and $\gamma = 0.0012$. Here k_R denotes the SOC momentum scale, corresponding to k_0 in Ref. ^[18]. The horizontal axis is the normalized density n/n_c , with $n_c = k_R^2/(2\gamma g)$, and the vertical axis is the normalized Raman coupling strength Ω/k_R^2 . The color scale represents the condensate momentum k_1/k_R , where k_1 is the variational condensate momentum obtained by minimizing the mean-field energy. The diagram shows the stripe, plane-wave, and zero-momentum phases, and the insets illustrate their characteristic momentum-space occupations. The phase boundaries and color distribution are reconstructed and plotted from the mean-field transition conditions and parameter setting in Ref. ^[18].

其中 ϕ 为相对相位, C 为条纹对比度, λ_{st} 为条纹周期 [30–33]。这一密度调制并不是由外加晶格直接产生, 而是由 $\pm k_1$ 两个凝聚分量相干叠加形成; 与此同时, 凝聚体仍保持全局相位相干。因此, 在理想均匀零温平均场图像下, 条纹相同时具有全局相位相干和自发空间密度调制, 可被视为 SOC-BEC 中具有超固体特征的典型基态之一 [8,30–36]。不过, 在一维拉曼型 SOC-BEC 中, 这种条纹相更严格地说应被理解为具有类超固体行为的条纹态; 是否能称为真正意义上的超固体相, 还需要结合低能戈德斯通模、超流分数、结构因子、集体响应或动力学测量等证据进一步确认。实验上有限动量双峰占据、布拉格散射或结构因子增强, 以及分量间长程相干关联, 都是识别条纹相的重要线索 [34,37]; 此外动量空间跃迁方案也实现了长寿命条纹凝聚态, 为条纹相的稳定观测和动力学研究提供了实验路径 [38]。但这些信号更多说明体系存在相干叠加和空间周期性, 仍不足以单独证明严格意义上的超固体性质。

上述的讨论以一维拉曼型 SOC-BEC 为主要模型, 而对于 Rashba 型 SOC 或光学晶格中由空间依赖拉曼耦合实现的二维 SOC-BEC, 短程相互作用仍然通过总密度和自旋密度通道影响凝聚体的动量占据; 但由于单粒子低能态具有二维动量空间结构, 基态选择不再局限于 $+k_1$ 与 $-k_1$ 两个动量分量之间的竞争, 而可能与二维密度调制、自旋极化结构和动量空间自旋纹理相关 [8,14,17,19,21,29]。因此二维 SOC-BEC 中短程相互作用的作用方式可以理解为一维条纹相、平面波相和零动量相形成机制在二维单粒子色散和二维自旋结构中的推广, 其核心仍然是相互作用对凝聚动量、自旋组成和空间密度分布的共同选择。

3.2 低能激发谱的特征

基态相图说明了体系在不同参数下可能处于何种凝聚态, 而低能激发谱则进一步给出激发特征。对短程相互作用主导的 SOC-BEC 而言, 重要的激发谱特征包括声速的方向依赖和有限波矢处旋子型极小值的软化。前者反映 SOC 对长波流体响应的影响, 后者则是预测条纹相形成的可观测信号。

在线性化 Gross-Pitaevskii/Bogoliubov-de Gennes 理论中, 平面波相和零动量相由于保持着平移对称性, 可在动量表象下分块求解; 而条纹相本身具有空间周期性, 其低能谱需要在 Bloch-BdG 框架下理解。这类 BdG 处理默认体系处于稳定平均场基态附近, 主要适用于小振幅低能激发和稳定性分析, 而不直接描述强涨落或大振幅非线性动力学区域。此时的低能激发不再只是均匀凝聚体上的普通密度涨落, 还会与条纹平移相关的自由度发生耦合 [8,39]。在线性响应框架下, 外加微扰 $U(\mathbf{q}, \omega)$ 诱导的密度涨落满足 [39]

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \chi_{nn}(\mathbf{q}, \omega) U(\mathbf{q}, \omega), \quad (13)$$

相应的动态结构因子为 [39,44]

$$S(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \chi_{nn}^R(\mathbf{q}, \omega), \quad \omega > 0. \quad (14)$$

这一关系把理论中的低能激发与实验可测的动态结构因子直接联系了起来。由于 SOC 会混合密度涨落与自旋涨落，低能激发通常不再是纯粹的密度模或自旋模，而是两者耦合后的集体激发。对平面波相和零动量相，最低支激发在长波极限下仍具有声学模形式 [39,40]

$$\omega(\mathbf{q}) \simeq c(\hat{\mathbf{q}}) q, \quad q = |\mathbf{q}|. \quad (15)$$

但与普通弱相互作用 BEC 不同，声速 $c(\hat{\mathbf{q}})$ 在 SOC 存在时具有明显的方向依赖 [39]。对一维拉曼型 SOC 而言，沿 SOC 方向的低能带曲率减小，对应有效质量增大，从而使该方向上的声速降低；在平面波相向零动量相的连续转变附近，这种降低进一步增强，并可表现为声学模软化 [39-41]。所以声速的方向依赖是 SOC 和短程相互作用共同影响长波流体响应的结果。

更明显的激发谱信号出现在平面波相靠近条纹相边界的一侧。此时最低支激发会在有限波矢处形成局域极小值；随着体系继续逼近条纹相-平面波相的相边界，旋子能隙持续降低，表明体系对相应有限波矢密度调制的响应显著增强 [39,42,43]。从这一角度看旋子型极小值软化是预测条纹相形成的可观测信号。相关实验已经在拉曼型 SOC 的 ^{87}Rb 凝聚体中观测到声子-极大子-旋子组成的激发谱结构及其软化过程 [44]；近期工作还进一步通过原位成像和激发谱测量直接探测了 SOC-BEC 条纹相中的超流与晶格激发，从而把静态相图、激发谱特征和可观测信号联系起来 [12]。

而在二维 SOC-BEC 中，低能激发谱同样可以通过 Bogoliubov 理论和动态结构因子来分析 [8,39]，但激发模式会同时受到两个空间方向上自旋-动量耦合的影响。与一维拉曼型 SOC 中沿 SOC 方向声速降低和有限波矢旋子软化的图像相比，二维 SOC 体系中的声学模、旋子型极小值和自旋密度响应通常具有更明显的方向依赖，并可能受到动量空间自旋纹理和能带几何性质的影响 [14,19-21]。因此在二维 SOC-BEC 中，激发谱不仅用于判断密度模和自旋模的耦合，也可作为识别二维密度调制和判断自旋结构稳定性的主要可观测量。

3.3 动力学响应的特点

低能激发谱给出体系激发模式的能量结构，而动力学响应则描述了体系在外势和实验扰动下的集体振荡和响应。对短程相互作用主导的一维拉曼型 SOC-BEC 而言，动力学响应主要体现在两个方面：一是势阱中集体模频率和振荡形式的变化，二是超流密度和临界速度的各向异性。

条纹相提供了最直接的例子。由于条纹相同时破缺全局 $U(1)$ 相位对称性与连续平移对称性，其低能自由度不仅包括通常的超流相位模，还包括与条纹平移或滑移相关的晶格自由度。所以理论上条纹相应具有两支低能戈德斯通模^[45,46]。在谐振子势阱中，这些模式会与偶极模、呼吸模等集体激发发生耦合，使条纹相的低能性质能够通过集体响应间接观测。已有研究表明相变邻域中偶极模和呼吸模的软化、条纹图样对自旋扰动的非刚性响应，都可作为判断条纹相是否具有超固体响应的重要动力学信号^[45-48]。

SOC 对集体模的影响并不仅限于条纹相。在无 SOC 时，科恩定理保证谐振子势阱中的偶极振荡与内部相互作用解耦，其频率等于势阱频率^[49]；引入 SOC 后，动量与自旋耦合使质心运动与内部自由度不再完全分离，偶极模频率因而会随 Ω 和 δ 改变，并可能出现非简谐和振幅依赖行为^[50-54]。在条纹相区域，呼吸模还可与条纹滑移自由度耦合，使集体振荡反映出条纹态的晶格自由度和类超固体特征。

与集体模变化相伴随的是超流性质的改变。对具有伽利略不变性的传统超流体系，零温下正常密度通常消失；而一维拉曼型 SOC 在实验室参考系下显式破坏伽利略不变性，所以即便在零温下也可出现有限正常组分^[40,55]。超流密度可由自由能对超流速度的二阶响应定义^[40,55]

$$\Delta F = \frac{1}{2} \sum_{ij} \rho_s^{ij} v_{s,i} v_{s,j}. \quad (16)$$

对一维拉曼型 SOC，沿 SOC 方向的超流密度最容易被压低，而垂直方向更接近传统情形^[40]。同时临界速度也不再由单一声速决定，而由完整的各向异性激发谱给出^[55-57]

$$v_c(\hat{v}) = \min_{q,\nu} \frac{\omega_\nu(\mathbf{q})}{\mathbf{q} \cdot \hat{v}}, \quad \mathbf{q} \cdot \hat{v} > 0. \quad (17)$$

所以超流失稳既可能由长波声学模触发，也可能由有限波矢旋子激发触发^[40,55,56,58]。这表明 SOC 会同时影响体系的基态、激发谱和超流性质。

相应地，二维 SOC-BEC 的动力学响应仍然围绕集体模、超流响应和自旋动力学展开。由于两个空间方向上的动量均可与自旋自由度耦合，外场扰动或调制激发所耦合的集体模式通常会随扰动波矢方向和响应通道而改变；因此密度响应、自旋密度响应和动量空间自旋纹理需要结合相应的谱学测量和自旋分辨成像来表征。光学晶格中的二维 SOC 为研究动量空间自旋纹理、贝里曲率和拓扑能带提供了实验平台，而利用内态构造的合成维度则可用于研究边缘态、边缘流和威尔逊环等拓扑性质^[14,19,21-23,26-28]。从相互作用效应的角度看，短程相互作用会进一步改变集体模频率、自旋密度响应和超流性质，所以二维 SOC-BEC 的动力学响应为探测基态及其低能激发提供了手段。

3.4 量子涨落、有限温度与有限尺寸效应

上述的平均场结果主要建立在零温、均匀体系近似的基础上。然而对于真实实验体系而言，量子涨落、有限温度和有限尺寸效应都会对相边界、激发谱和响应性质产生影响。

有限温度与量子涨落会改变相边界和低能响应。已有的理论研究表明，热涨落可以改变条纹相、平面波相与零动量相的参数区域，并影响声速、超流密度和条纹相稳定区域^[59-62]。相关实验相图和相变观测则为这些有限温度与外势条件下的理论讨论提供了重要参照^[44]。在广义 HFB-Popov 框架下，热涨落会拓宽平面波相区域，并使平面波相到零动量相转变附近的声速极小值位置发生偏移；即便在零温下，量子涨落也会修正平均场理论中声速在临界点严格趋于零的预言，使声速在相变附近仅表现为非零极小值，而非完全软化；有限温度则会进一步增大这一非零极小值并移动其出现位置，从而改变相变邻域的低能声学响应^[59]。值得注意的是 HFB-Popov 方法适用于有限温度下凝聚体占主导、热涨落损耗不强且准粒子图像有效的区域；而在临界涨落或强耗尽区域该方法不适用。

进一步的研究表明，在一维拉曼型 SOC 玻色气体中，量子损耗和超流密度能够定量反映量子涨落对不同相区的影响。对条纹相而言，这些修正会影响相变位置和超流响应；而在平面波相和零动量相中，超流密度沿 SOC 方向会被显著抑制，并在相变附近呈现特殊的温度依赖^[40,60,61]。所以量子涨落和热涨落是理解 SOC-BEC 相边界、超流性质和低能响应时不可忽略的因素。

另一方面，真实实验中的 BEC 通常对应有限粒子数和有限空间尺度的受限体系，并常被置于谐振子势阱等缓变外势中，所以热力学极限下的相图不能直接等同于实验体系中的实际相边界^[63,64]。在缓变外势中，不同空间区域对应不同的局域密度和有效化学势，因此条纹相往往只在云团的部分区域稳定，整体密度分布可能表现为多个局域相区的组合^[8]。从有限尺寸效应的角度看，若体系沿 SOC 方向的有效长度记为 L_x ，则长波激发的最小波矢尺度可估计为 $\Delta q \simeq \pi/L_x$ ；当 L_x 与条纹周期 $\lambda_{st} = \pi/k_1$ 或愈合长度 ξ 不再相差足够大时，均匀体系中的连续波矢近似和热力学极限下的相边界都会受到修正^[63,64]。具体而言，有限尺寸效应会使条纹密度调制在云团边缘减弱^[8,32,34,63]，并使布拉格散射峰、动态结构因子和低能激发谱表现出有限宽度或离散化特征^[32,34,39]；同时，一阶相变附近的相区共存、亚稳态和相边界展宽也会使实验中观察到的转变不再表现为理想均匀体系中的尖锐相变。因此在实际判断条纹相、平面波相和零动量相时，尤其是判断条纹相是否具有可观测的超固体特征时，除平均场相图给出的稳定条件外，还需要比较托马斯-费米半径、条纹周期、愈合长度以及实验探测分辨率等尺度，并结合结构因子、布拉格散射和集体激发谱等信号进行综合判断^[32,34,39]。

由此来看 SOC-BEC 的零温平均场结果构成了理解多体基态相图的起点；而要判断条纹相及其类超固体响应是否能够在真实体系中稳定观测，则必须同时考虑量子涨落、有限温度和有限尺寸效应对稳定区域、激发谱和超流性质的共同影响。

4 SOC-BEC 中的长程相互作用效应

上一章讨论了短程相互作用如何在 SOC 改变单粒子色散谱后影响条纹相、平面波相和零动量相等多体基态相。进一步引入长程相互作用后，体系的性质不再只取决于凝聚体在动量空间中的占据情况，还会受到实空间密度分布、自旋排布以及不同空间位置之间相互作用的影响。对 SOC-BEC 而言，本文主要关注两类长程相互作用。一类是偶极-偶极相互作用，其特点是具有长程性和由偶极取向决定的各向异性^[65]；另一类是由里德堡缀饰等手段实现的软核长程相互作用，其相互作用势在小于阻塞半径的距离范围内近似为有限常数平台，并通常表现为近似各向同性的有效排斥相互作用^[66,67]。基于这一背景，在长程相互作用存在时，仅讨论凝聚体占据哪一个单粒子极小值已经不够，还需要进一步分析体系中的空间密度分布、自旋纹理、拓扑结构以及相关基态相的稳定性^[13,68,69]。本章将从基态结构、激发谱和非平衡动力学行为三个方面展开讨论。

4.1 基态结构与稳定机制

与第三章中短程相互作用主要通过有限动量凝聚竞争决定基态相不同，在存在长程相互作用的 SOC-BEC 中，体系能量还显式依赖不同空间区域之间的相对排布，因此基态研究需同时考察动量空间占据、实空间密度分布、自旋排布及可能出现的拓扑结构。而本章中的超固体相，主要指在长程相互作用和量子涨落修正共同作用下，稳定形成的兼具密度有序和超流响应的相；其中空间密度调制只是必要线索之一，还需结合激发谱、超流分数、结构因子和动力学响应等证据判断其超固性。

对偶极体系而言，这一特点首先来源于偶极-偶极相互作用的长程性和各向异性。对于取向沿单位矢量 $\mathbf{e}_d$ 极化的偶极粒子，设 $\mathbf{r}$ 为两粒子之间的相对位矢， $r = |\mathbf{r}|$ ， $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ ，则常用的偶极-偶极相互作用势可写为^[65]

$$V_{dd}(\mathbf{r}) = \frac{C_{dd}}{4\pi} \frac{1 - 3(\mathbf{e}_d \cdot \hat{\mathbf{r}})^2}{r^3}, \quad (18)$$

其中 C_{dd} 表征偶极相互作用强度。若以前文定义的总密度 $n(\mathbf{r})$ 与自旋密度 $s(\mathbf{r})$ 为出发点，则在偶极-偶

极相互作用参与下，体系的相互作用能泛函可写为 [65,68,69]

$$E_{\text{int}}^{(\text{c+dd})} = \int d\mathbf{r} \left[\frac{g_n}{2} n^2(\mathbf{r}) + \frac{g_s}{2} s^2(\mathbf{r}) \right] + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' n(\mathbf{r}) V_{\text{dd}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}'). \quad (19)$$

与只含短程相互作用的局域模型相比，式 (19) 中的非局域偶极项表明体系能量不仅由局域密度和自旋密度决定，还与不同空间位置之间的密度分布有关。所以在偶极体系中，最低能态不能只由有限动量凝聚来描述，还需要同时考察空间密度分布、自旋排布及其拓扑性质 [68,69]。

为描述这类基态结构，考虑两分量凝聚体序参量

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

其总数密度定义为

$$n(\mathbf{r}) = \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}), \quad (21)$$

在密度非零的区域，可进一步引入归一化赝自旋矢量 [13,68,69]

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{\Psi^{\dagger}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \Psi(\mathbf{r})}{\Psi^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r})}, \quad (22)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵。对于二维体系，常用的拓扑荷写为 [13,68,69]

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2\mathbf{r} \mathbf{S} \cdot (\partial_x \mathbf{S} \times \partial_y \mathbf{S}). \quad (23)$$

在这一框架下，整数拓扑荷通常对应斯格明子型结构，而半斯格明子型结构通常对应半整数拓扑荷，其中具有涡旋构型特征的半斯格明子也常称为麦韧子；图3给出了半斯格明子型和斯格明子型自旋纹理在布洛赫球上的典型表示。由此可见，偶极-偶极相互作用与 SOC 的共同作用可以使体系形成条纹、涡旋、半斯格明子、斯格明子及其晶格结构等多种拓扑态，并可能形成与超固体相相关的密度有序和拓扑结构；其是否构成严格意义上的超固体相，还需结合超流响应和低能激发证据判断 [13,68,69]。

需要指出的是，在偶极量子气体中，量子液滴、液滴晶格和超固体相的稳定性往往不能仅由平均场相互作用解释。李-黄-杨修正所对应的量子涨落能量可以在高密度区域提供额外的有效排斥作用，从而与平均场吸引贡献形成平衡，并稳定量子液滴和超固体结构 [70-74]。当这一机制与 SOC 同时存在时，SOC 对单粒子色散谱和自旋结构的调控、偶极-偶极相互作用对密度分布和自旋纹理的非局域影响，以及李-黄-杨修正提供的稳定机制会共同影响条纹相、涡旋态、半斯格明子或斯格明子结构、量子液滴以及相关超固体相的稳定性 [75-77]。

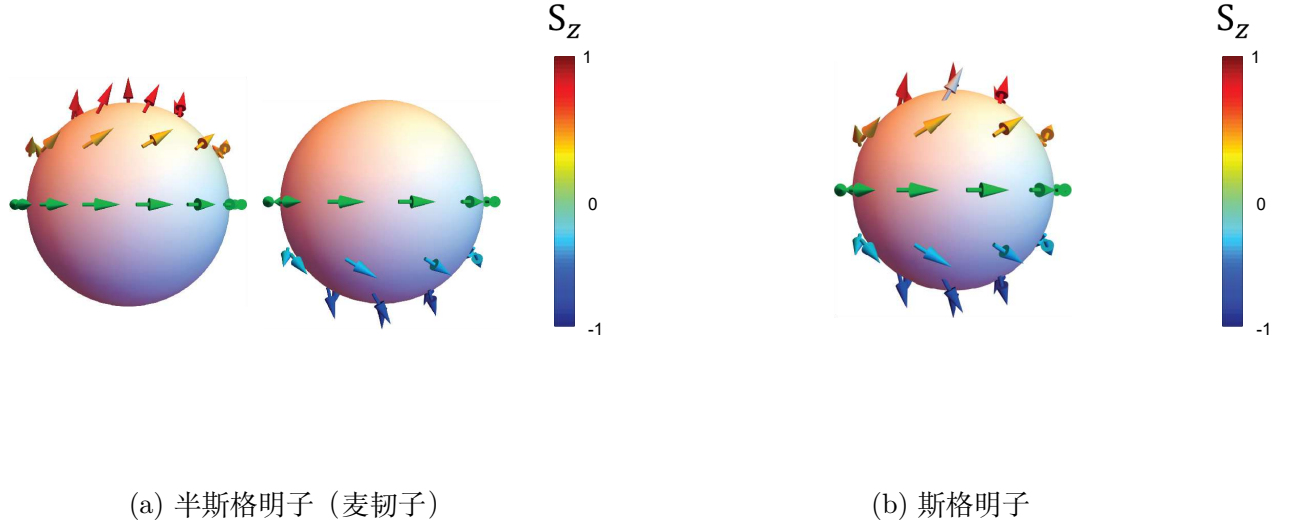


图 3 二维 SOC-BEC 中典型拓扑自旋纹理示意图。颜色表示赝自旋在 z 方向的极化 S_z ，箭头表示局域赝自旋方向。其中半斯格明子型纹理通常对应半整数拓扑荷，而斯格明子型纹理通常对应整数拓扑荷。依据文献^[13]节选并转载。

Fig. 3. Representative topological spin textures in a two-dimensional SOC-BEC. The color indicates the z -component of the pseudospin polarization, S_z , while the arrows denote the local pseudospin orientation. A meron-like, or half-skyrmion, texture is generally associated with a half-integer topological charge, whereas a skyrmion texture is typically characterized by an integer topological charge. Selected panels reproduced from Ref. ^[13].

除偶极-偶极相互作用外，软核长程相互作用也为 SOC-BEC 中的密度调制和自组织结构提供了另一类实现途径^[78]。里德堡缀饰所诱导的软核相互作用通常写为^[66,67]

$$V_{\text{sc}}(r) = \frac{U_0}{1 + (r/R_c)^6}, \quad (24)$$

其中 U_0 为软核平台高度， R_c 为阻塞半径或等效软核半径。由于该势在 $r \lesssim R_c$ 的范围内近似为有限常数平台，其动量空间形式具有明显的波矢依赖，因而可在一定条件下诱导有限波矢密度调制，并形成具有多个密度峰的周期结构。所以软核长程相互作用可以诱导自组织结构，并在 SOC 存在时进一步产生手性对称性破缺的超固体相、超条纹相和多种晶格结构等基态相^[79-83]。

近年来一个具有代表性的进展是二维偶极 SOC-BEC 中拓扑超固体基态的研究。相关研究表明在弱 SOC 区域，体系可表现为含单个斯格明子的超流态；随 SOC 增强，体系进入超固体相，而较弱偶极相互

作用对应三角对称的半斯格明子晶格，较强偶极相互作用则对应方格对称的斯格明子晶格，不同基态相之间还可能表现出不同阶数的相变^[13]。这一结果说明在 SOC 与长程相互作用共同存在时，体系的密度分布、自旋纹理和拓扑结构都会发生显著变化^[13]。

概括而言，长程相互作用的根本作用在于使体系能量显式依赖不同空间区域之间的相对排布，从而使 SOC-BEC 的基态结构不再只由单粒子色散极小值和局域相互作用决定。在偶极-偶极相互作用、软核长程相互作用以及李-黄-杨量子涨落修正的共同作用下，体系可以表现出空间密度调制、自旋纹理、拓扑结构以及与量子液滴和超固体相相关的稳定机制。其中，单纯平均场理论主要描述平均场稳定区内的密度调制和有限波矢失稳趋势；当偶极相互作用较强、体系接近平均场塌缩边界或量子涨落对稳定性起关键作用时，则需要引入 LHY 修正。

4.2 低能激发谱的特征

在长程相互作用体系中，有限波矢处旋子型极小值的软化通常与相互作用势在动量空间中的波矢依赖性有关。对于偶极凝聚体，这种波矢依赖性主要来自偶极-偶极相互作用的非局域性及其由偶极取向决定的各向异性动量核，因此不同方向的密度涨落会获得不同的相互作用能，并可能在特定几何条件下形成旋子极小值^[65,84-88]。与此不同，里德堡缀饰诱导的软核相互作用虽然在实空间中近似表现为各向同性排斥，但其有限特征长度和平台型势形使动量空间响应呈现非单调结构，从而也可在有限波矢处诱导旋子软化、自发密度调制和自组织结构^[66,67,81]。

在理论处理中，这类问题通常仍可从含长程相互作用的 Bogoliubov-de Gennes 线性化方程出发。与短程相互作用体系不同的是，此时 BdG 矩阵中的相互作用部分不再只包含局域短程相互作用项，还包含长程相互作用核在动量空间中的贡献。直接结果就是最低支激发除了在长波极限附近可能表现出各向异性声学模外，还会在有限波矢处出现旋子型极小值，并在接近不稳定区域时发生软化。对偶极凝聚体而言，有限波矢处的旋子-极大子激发谱在早期理论上被系统指出，并被视为长程各向异性相互作用诱导空间密度调制的重要信号^[84]。就此意义而言，旋子软化是长程体系中超固体相形成前的重要激发谱特征之一^[84-88]。值得强调的是，旋子软化或有限波矢密度响应增强并不等价于已经形成真正意义上的超固体相；它们更多是进入密度有序相或超固体相之前的重要前兆信号。

这一物理图像最早在偶极量子气体中得到系统研究，并进一步发展为识别长程相互作用主导的超固体相的重要方法。旋子支可以在实验中被分辨，而进入超固体相后，体系还会出现与晶格有序和超流相干相

关的低能分支^[85-88]。因此进入超固体相之后，激发谱研究不仅要关注是否存在旋子极小值，还需要进一步分析与晶格位移、振幅模、相对相位等相关的多个低能分支。

对软核长程相互作用和 SOC 同时存在的体系而言，激发谱还会受到自旋与动量耦合的进一步影响。已有研究表明 SOC 不仅能够影响长程相互作用诱导的旋子软化，还会改变软化模式出现的位置、失稳后的基态结构以及不同激发分支之间的耦合方式^[81]。所以对长程相互作用主导的超固体相，激发谱研究不应仅停留在单一旋子极小值的辨认上，还需要结合多分支低能激发模式及其耦合关系进行分析^[89-91]。

在二维 SOC 与长程相互作用同时存在时，低能激发谱还会反映密度调制和自旋纹理之间的耦合。偶极-偶极相互作用和软核长程相互作用均可通过动量空间相互作用核诱导有限波矢处的旋子软化，而二维 SOC 会进一步改变软化模式的自旋组成、传播方向和失稳后可能形成的空间结构^[81,84-88]。因此，对二维 SOC-BEC 中长程相互作用主导的超固体相而言，激发谱分析不应只停留在单个旋子极小值的位置，还需要结合低能分支、密度响应和自旋响应来判断基态结构的稳定性^[89-91]。

4.3 非平衡动力学响应与实验观测

前文已经说明在长程相互作用主导下的 SOC-BEC 可以形成密度调制、自组织晶格、自旋纹理以及斯格明子等拓扑自旋纹理。然而对拓扑超固体相而言，仅凭静态密度分布、晶格对称性和自旋纹理并不能完全确定其超流性质和相变过程。所以如何通过动力学响应关联超流分数、对称性破缺和拓扑转变，是进一步理解长程相互作用主导的超固体相的重要问题。

关于这个问题，近期关于二维偶极 SOC-BEC 拓扑超固体的研究提供了代表性的例证^[13]。在该体系中，SOC 强度 κ 与偶极相互作用强度 ε_{dd} 共同决定体系所处的相区，使体系可在不同参数区稳定形成含单个斯格明子的超流态、半斯格明子型拓扑超固体和斯格明子型拓扑超固体。进一步地，在文献^[13]的模型中，当在弱驱动条件下引入 PT 对称的增益-损耗过程时，体系会产生沿 x 方向的振荡流响应 $J_x(t)$ ；其主振荡频率 ω_d 可与非经典转动惯量分数 f_{NCRI} ^[92]联系起来。同时 ω_d 随 κ 或 ε_{dd} 的突变能够反映不同相区之间的转变^[13]。因而在此模型中，非平衡流响应可以作为联系长程相互作用、超流组分与拓扑转变的可观测量^[13]。

如图 4 所示，非平衡动力学响应的意义并不在于替代静态结构识别，而在于为超流组分和拓扑转变提供了一种新型的实验判据。需要指出的是这类研究表明长程相互作用主导的超固体相研究正在从静态基态结构分析，进一步发展到可重复、可定量的动力学观测。

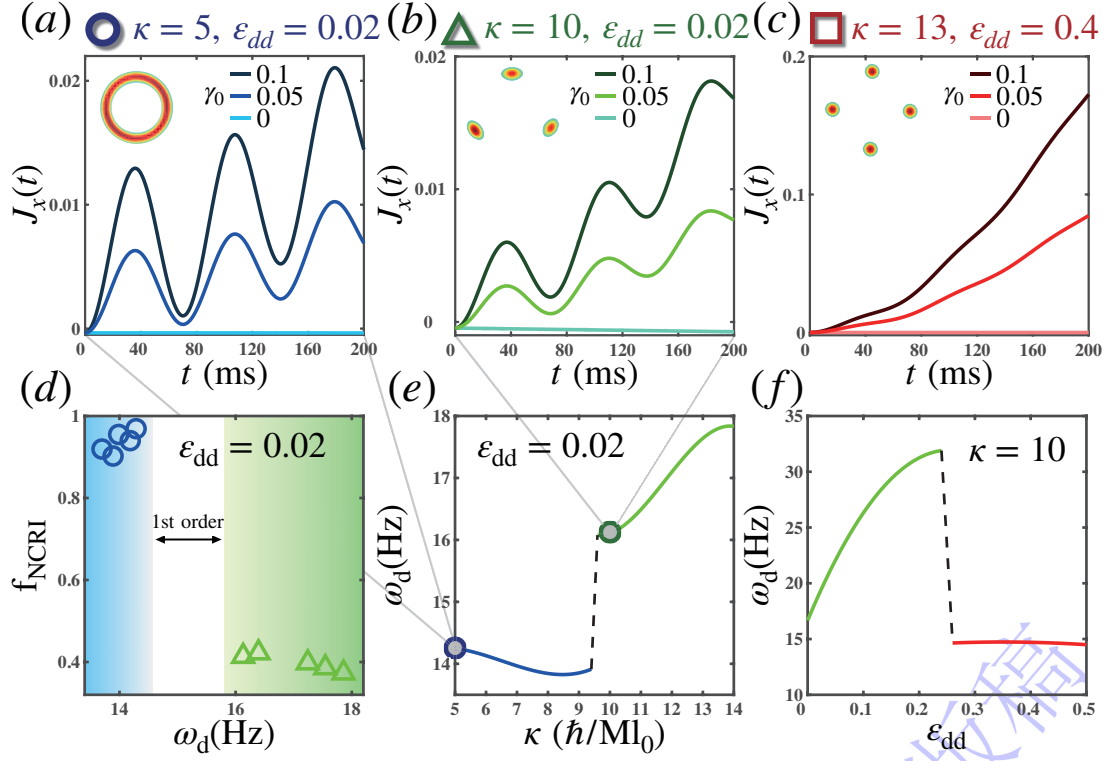


图 4 拓扑超固体相变的非平衡动力学响应。弱驱动下的流响应 $J_x(t)$ 、主振荡频率 ω_d 及其与 f_{NCRI} 、 κ 和 ϵ_{dd} 的关系，可用于区分不同拓扑超固体相区。转载自文献^[13]。

Fig. 4. Nonequilibrium dynamical response associated with topological supersolid phase transitions. The flow response $J_x(t)$ under weak driving, the dominant oscillation frequency ω_d , and their dependence on f_{NCRI} , κ , and ϵ_{dd} can be used to distinguish different topological supersolid regimes. Reproduced from Ref. ^[13].

对于二维 SOC-BEC 中的拓扑超固体相, 非平衡动力学响应尤其适合用于区分不同基态结构。弱外场驱动、参数淬火或旋转响应可以激发与密度调制、超流相干和自旋纹理相关的集体模式; 相应的流响应、主振荡频率以及非经典转动惯量分数等物理量, 可用于分析超固体相的超流性质和拓扑结构变化 [13,45,47,92-94]。因此, 二维 SOC 与长程相互作用的结合不仅丰富了基态相图, 也为通过动力学响应识别半斯格明子晶格、斯格明子晶格和拓扑超固体相提供了可操作的实验判据。

5 总结与展望

本文综述了自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中相互作用效应的相关研究进展。SOC-BEC 中的核心在于 SOC 会改变单粒子色散谱和单粒子基态的动量分布特征, 从而进一步影响体系的多体基态、低能激发谱和动力学行为 [6-8]。另外, 短程相互作用、长程相互作用和量子涨落与 SOC 相互竞争, 共同决定着不同基态相的形成条件、稳定区域和实验可测信号。短程相互作用主要影响条纹相、平面波相和零动量相之间的转变; 长程相互作用则进一步影响体系的空间密度分布、自旋纹理、拓扑结构、超固体相稳定性和非平衡动力学过程 [13,17,18,68,72-74]。

沿着这一主线回看全文, 第二章介绍了冷原子体系中 SOC 的典型实现方式及其对单粒子色散谱的影响; 第三章表明短程相互作用可以在一维 SOC 改变单粒子色散谱的基础上决定条纹相、平面波相和零动量相等多体基态相, 并进一步影响低能激发谱、集体响应和超流性质; 第四章则说明长程相互作用可以进一步影响体系的基态结构、空间密度调制、自旋纹理、拓扑结构以及相关超固体相的稳定性和动力学行为。所以条纹相、量子液滴、自组织晶格和拓扑超固体及其相关相并不是彼此孤立的物态, 而是可以通过同一物理图像理解。SOC 改变单粒子色散谱, 与相互作用和量子涨落相互竞争, 共同决定体系的基态结构、稳定性和动力学性质 [6-8,17,18,68,74,77]。

从当前发展看, 更迫切的问题是如何在实验上探测条纹相及相关超固体相。现有研究已经表明单纯依赖静态密度调制并不足以充分刻画其物理性质; 相比之下将静态密度分布与低能激发谱、集体响应以及动力学测量结合起来, 才能更有效地区分空间周期性、超流组分和相变过程之间的关系 [13,45-47]。所以今后值得进一步推进的工作, 不宜仅停留在提出新的相图或结构类型, 而应在有限温度和有限尺寸下, 建立可重复、可比较的实验观测方法, 并加强理论模拟与实验观测之间的定量比较。例如, 近期关于行波型超固体条纹的研究表明, 在一维拉曼型 SOC-BEC 条纹相中, 若两个单粒子极小值的占据不平衡, 条纹密度调制可获得有限传播速度; 随着不平衡程度增大, 体系会表现出自旋极化、条纹对比度降低、激发谱反演非对

称,并在高不平衡条件下出现能量失稳和动力学失稳^[93]。这一结果说明对于具有超固体特征的 SOC-BEC 条纹态,后续实验探测不应只依赖静态密度图样,还需要结合条纹运动、激发谱和动力学稳定性等可观测信号进行综合判断。

从更长远的角度看,该方向的重要目标是在更一般的 SOC 形式、空间维度和相互作用条件下,建立关于单粒子色散谱、相互作用效应、多体基态相图和动力学行为之间关系的系统理解^[6-8,68,74,77]。只有进一步明确不同基态相之间的联系、稳定条件和实验观测判据,并增强理论预测与实验观测之间的对应关系, SOC-BEC 中由短程相互作用、长程相互作用和量子涨落共同产生的丰富物理,才有可能从一系列零散结果中形成更系统和完备的理论图像。

参考文献

- [1] Georgescu I M, Ashhab S, Nori F 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 153
- [2] Feynman R P 1982 *Int. J. Theor. Phys.* **21** 467
- [3] Bloch I, Dalibard J, Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [4] Bloch I, Dalibard J, Nascimbene S 2012 *Nat. Phys.* **8** 267
- [5] Gross C, Bloch I 2017 *Science* **357** 995
- [6] Dalibard J, Gerbier F, Juzeliūnas G, Öhberg P 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1523
- [7] Galitski V, Spielman I B 2013 *Nature* **494** 49
- [8] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
- [9] Peng S G, Jiang K, Chen X L, Chen K J, Zou P, He L Y 2022 *AAPPS Bull.* **32** 36
- [10] Recati A, Stringari S 2023 *Nat. Rev. Phys.* **5** 735
- [11] Biagioni G, Antolini N, Donelli B, Pezzè L, Smerzi A, Fattori M, Fioretti A, Gabbanini C, Inguscio M, Tanzi L, Modugno G 2024 *Nature* **629** 773
- [12] Chisholm C S, Hirthe S, Makhalov V B, Ramos R, Vatré R, Cabedo J, Celi A, Tarruell L 2026 *Science* **391** 480
- [13] Dong B, Zhang X F, Zhuang L, Han W, Liao R, Yang X Y, Liu W M, Zhang Y C 2026 *Phys. Rev. A* **113** 023320

- [14] Cooper N R, Dalibard J, Spielman I B 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 015005
- [15] Goldman N, Juzeliūnas G, Öhberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [16] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [17] Ho T L, Zhang S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 150403
- [18] Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225301
- [19] Huang L H, Meng Z M, Wang P J, Peng P, Zhang S L, Chen L C, Li D H, Zhou Q, Zhang J 2016 *Nat. Phys.* **12** 540
- [20] Ozawa T, Price H M 2019 *Nat. Rev. Phys.* **1** 349
- [21] Wu Z, Zhang L, Sun W, Xu X T, Wang B Z, Ji S C, Deng Y, Chen S, Liu X J, Pan J W 2016 *Science* **354** 83
- [22] Sun W, Wang B Z, Xu X T, Yi C R, Zhang L, Wu Z, Deng Y, Liu X J, Chen S, Pan J W 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 150401
- [23] Celi A, Massignan P, Ruseckas J, Goldman N, Spielman I B, Juzeliūnas G, Lewenstein M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 043001
- [24] Livi L F, Cappellini G, Diem M, Franchi L, Clivati C, Frittelli M, Levi F, Calonico D, Catani J, Inguscio M, Fallani L 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 220401
- [25] Kolkowitz S, Bromley S L, Bothwell T, Wall M L, Marti G E, Koller A P, Zhang X, Rey A M, Ye J 2017 *Nature* **542** 66
- [26] Mancini M, Pagano G, Cappellini G, Livi L F, Rider M, Catani J, Sias C, Zoller P, Inguscio M, Dalmonte M, Fallani L 2015 *Science* **349** 1510
- [27] Stuhl B K, Lu H I, Aycock L M, Genkina D, Spielman I B 2015 *Science* **349** 1514
- [28] Sugawa S, Salces-Carcoba F, Yue Y, Putra A, Spielman I B 2021 *npj Quantum Inf.* **7** 144
- [29] Wang C, Gao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [30] Martone G I, Li Y, Stringari S 2014 *Phys. Rev. A* **90** 041604(R)
- [31] Zhang Y, Mossman M E, Busch T, Engels P, Zhang C 2016 *Front. Phys.* **11** 118103
- [32] Li Y, Martone G I, Pitaevskii L P, Stringari S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 235302

- [33] Martone G I, Stringari S 2021 *SciPost Phys.* **11** 092
- [34] Li J R, Lee J, Huang W, Burchesky S, Shteynas B, Top F Ç, Jamison A O, Ketterle W 2017 *Nature* **543** 91
- [35] Li Y, Martone G I, Stringari S 2015 *Annual Review of Cold Atoms and Molecules* (Vol. 3) (World Scientific) p201
- [36] Boninsegni M, Prokof'ev N V 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 759
- [37] Putra A, Salces-Cárcoba F, Yue Y, Sugawa S, Spielman I B 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 053605
- [38] Bersano T M, Hou J, Mossman S, Gokhroo V, Luo X W, Sun K, Zhang C, Engels P 2019 *Phys. Rev. A* **99** 051602(R)
- [39] Martone G I, Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. A* **86** 063621
- [40] Zhang Y C, Yu Z Q, Ng T K, Zhang S, Pitaevskii L P, Stringari S 2016 *Phys. Rev. A* **94** 033635
- [41] Chai X D, Yu Z F, Zhang A X, Xue J K 2017 *Chin. Phys. Lett.* **34** 090301
- [42] Ji S C, Zhang L, Xu X T, Wu Z, Deng Y, Chen S, Pan J W 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 105301
- [43] Jiao C, Jian Y, Zhang A X, Xue J K 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 060302 (in Chinese) [焦宸, 简粤, 张爱霞, 薛具奎 2023 物理学报 **72** 060302]
- [44] Ji S C, Zhang J Y, Zhang L, Du Z D, Zheng W, Deng Y J, Zhai H, Chen S, Pan J W 2014 *Nat. Phys.* **10** 314
- [45] Geier K T, Martone G I, Hauke P, Stringari S 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 115301
- [46] Liang J C, Zhang A X, Xue J K 2024 *Phys. Rev. A* **109** 053307
- [47] Geier K T, Martone G I, Hauke P, Ketterle W, Stringari S 2023 *Phys. Rev. Lett.* **130** 156001
- [48] Xia W L, Chen L, Li T T, Zhang Y, Zhu Q 2023 *Phys. Rev. A* **107** 053302
- [49] Kohn W 1961 *Phys. Rev.* **123** 1242
- [50] Chen L, Pu H, Yu Z Q, Zhang Y 2017 *Phys. Rev. A* **95** 033616
- [51] Chen Z, Zhai H 2012 *Phys. Rev. A* **86** 041604(R)
- [52] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B, Deng Y J, Zhai H, Chen S, Pan J W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301

- [53] Li Y, Martone G I, Stringari S 2012 *Europhys. Lett.* **99** 56008
- [54] Wang J, Liang J C, Yu Z F, Zhang A Q, Zhang A X, Xue J K 2023 *Chin. Phys. B* **32** 090305
- [55] He P S, Liu X J, Hu H 2014 *Phys. Rev. A* **89** 053615
- [56] Yu Z Q 2017 *Phys. Rev. A* **95** 033618
- [57] He L, Yu Z Q 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 220301 (in Chinese) [贺丽, 余增强 2017 物理学报 **66** 220301]
- [58] Lyu H, Chen Y Y, Zhu Q, Zhang Y 2024 *Phys. Rev. Res.* **6** 023048
- [59] Chen X L, Liu X J, Hu H 2017 *Phys. Rev. A* **96** 013625
- [60] Chen X L, Wang J, Li Y, Liu X J, Hu H 2018 *Phys. Rev. A* **98** 013614
- [61] Chen X L, Liu X J, Hu H 2022 *Phys. Rev. A* **106** 023302
- [62] Rajat, Ritu, Roy A, Gautam S 2024 *Phys. Rev. A* **109** 033319
- [63] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [64] Ketterle W, van Druten N J 1996 *Phys. Rev. A* **54** 656
- [65] Lahaye T, Menotti C, Santos L, Lewenstein M, Pfau T 2009 *Rep. Prog. Phys.* **72** 126401
- [66] Henkel N, Nath R, Pohl T 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 195302
- [67] Pupillo G, Micheli A, Boninsegni M, Lesanovsky I, Zoller P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 223002
- [68] Deng Y, Cheng J, Jing H, Sun C P, Yi S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 125301
- [69] Wilson R M, Anderson B M, Clark C W 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185303
- [70] Lee T D, Huang K, Yang C N 1957 *Phys. Rev.* **106** 1135
- [71] Lima A R P, Pelster A 2011 *Phys. Rev. A* **84** 041604
- [72] Wächtler F, Santos L 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043618
- [73] Chomaz L, Baier S, Petter D, Mark M J, Wächtler F, Santos L, Ferlaino F 2016 *Phys. Rev. X* **6** 041039
- [74] Baillie D, Blakie P B 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 195301
- [75] Su X H, Dai W T, Li T Y, Wang J Y, Wen L H 2024 *Chaos Solitons Fractals* **184** 114979
- [76] Gangwar S, Ravisankar R, Mistakidis S I, Muruganandam P, Mishra P K 2024 *Phys. Rev. A* **109** 013321

- [77] Sánchez-Baena J, Boronat J, Mazzanti F 2020 *Phys. Rev. A* **102** 053308
- [78] Lü H, Zhu S B, Qian J, Wang Y Z 2015 *Chin. Phys. B* **24** 090308
- [79] Cinti F, Macrì T, Lechner W, Pupillo G, Pohl T 2014 *Nat. Commun.* **5** 3235
- [80] Han W, Zhang X F, Wang D S, Jiang H F, Zhang W, Zhang S G 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 030404
- [81] Lyu H, Zhang Y 2020 *Phys. Rev. A* **102** 023327
- [82] Zhang X F, Wen L, Wang L X, Chen G P, Tan R B, Saito H 2022 *Phys. Rev. A* **105** 033306
- [83] Liu J, Feng J, Chen S L, Wen L, Han W, Zhang X F, Yang X Y 2025 *Phys. Rev. A* **111** 043302
- [84] Santos L, Shlyapnikov G V, Lewenstein M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 250403
- [85] Petter D, Natale G, van Bijnen R M W, Patscheider A, Mark M J, Chomaz L, Ferlaino F 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 183401
- [86] Natale G, van Bijnen R M W, Patscheider A, Petter D, Mark M J, Chomaz L, Ferlaino F 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 050402
- [87] Tanzi L, Roccuzzo S M, Lucioni E, Famà F, Fioretti A, Gabbanini C, Modugno G, Recati A, Stringari S 2019 *Nature* **574** 382
- [88] Guo M, Böttcher F, Hertkorn J, Schmidt J N, Wenzel M, Büchler H P, Langen T, Pfau T 2019 *Nature* **574** 386
- [89] Poli E, Baillie D, Ferlaino F, Blakie P B 2024 *Phys. Rev. A* **110** 053301
- [90] Kirkby W, Lee A C, Baillie D, Bland T, Ferlaino F, Blakie P B, Bisset R N 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 103401
- [91] Hertkorn J, Stürmer P, Mukherjee K, Ng K S H, Uerlings P, Hellstern F, Lavoine L, Reimann S M, Pfau T, Klemm R 2024 *Phys. Rev. Res.* **6** L042056
- [92] Leggett A J 1970 *Phys. Rev. Lett.* **25** 1543
- [93] Martone G I, Shlyapnikov G V 2026 *Phys. Rev. A* **113** 013331
- [94] Casotti E, Poli E, Klaus L, Litvinov A, Ulm C, Politi C, Mark M J, Bland T, Ferlaino F 2024 *Nature* **635** 327

Interaction Effects in Spin-Orbit-Coupled Bose-Einstein Condensates

HE Junkai¹⁾ HE Liangjun¹⁾ ZHANG Yongchang^{1)*} ZHANG Xiaofei^{2)†}
DONG Biao^{1)‡}

1) (*School of Physics, Xi'an Jiaotong University, Key Laboratory of Nonequilibrium and
Control of Matter, Ministry of Education, Xi'an 710049, China*)

2) (*School of Physics and Information Science, Shaanxi University of Science and
Technology, Xi'an 710021, China*)

Abstract

Spin-orbit coupling (SOC) intrinsically couples the internal spin degrees of freedom of atoms with their center-of-mass motion and profoundly shapes the single-particle dispersion, providing a highly controllable platform for exploring unconventional quantum phases in ultracold gases. Unlike intrinsic SOC in condensed-matter systems, synthetic SOC in ultracold atoms can be engineered through atom-light interactions. This review summarizes recent progress in spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates (SOC-BECs) with a distinct focus on interaction effects. We systematically discuss how short-range and long-range interactions affect the ground-state structures, low-energy excitations, superfluid properties, and dynamical responses of SOC-BECs, while also considering the roles of quantum fluctuations, finite temperature, and finite-size effects.

We first outline the realization of synthetic SOC and its impact on single-particle dispersion. In one-dimensional Raman-induced SOC systems, the lower dressed band can develop two degenerate minima at finite momenta, providing the basis for interaction-driven many-body phases. Short-range contact interactions dictate the occupation and coherent superposition of these minima, driving quantum phase

*Corresponding author. E-mail: zhangyc@xjtu.edu.cn

†Corresponding author. E-mail: xfzhang@sust.edu.cn

‡Corresponding author. E-mail: biaodong@xjtu.edu.cn

transitions among stripe, plane-wave, and zero-momentum phases. Their characteristic signatures include anisotropic sound propagation, roton-like softening at finite momentum, modified collective modes, and anisotropic superfluid responses. We also discuss how quantum fluctuations, finite temperature and finite-size effects modify the ideal zero-temperature mean-field phase diagram, such as phase boundaries and experimentally observable responses.

We then examine SOC-BECs with long-range interactions, focusing on dipole-dipole and Rydberg-dressed soft-core interactions. Their nonlocal character makes the system energy dependent on the relative arrangement of different spatial regions, leading to spatial density modulation, self-organized structures, spin textures, and topological configurations. In dipolar systems, quantum fluctuations can provide an additional stabilization mechanism for quantum droplets and supersolid structures, while recent studies of two-dimensional dipolar SOC-BECs have revealed topological supersolid states involving meron-like and skyrmion-like spin textures. These developments can be understood within a common physical picture in which SOC reshapes the single-particle dispersion, while interactions and quantum fluctuations jointly determine the ground-state structure, stability, excitation properties, and dynamical behaviour.

A central perspective of this review is that periodic density modulation alone is insufficient to establish genuine supersolidity. Reliable identification requires combining static density and coherence measurements with low-energy excitation spectra, structure factors, collective responses, superfluid observables, and nonequilibrium dynamics. Finally, we outline future directions, highlighting the need to explore higher-dimensional SOC platforms and investigate finite-temperature dynamics. Crucially, future efforts must bridge the quantitative gap between theoretical predictions and experimentally accessible dynamical observables.

Keywords: spin-orbit coupling; Bose-Einstein condensate; short-range interactions; long-range interactions; supersolid