

冷原子相空间晶体 *

罗凡¹⁾ 郭领阵^{2)†}

1) (天津大学理学院, 量子交叉研究中心, 天津 300072)

2) (国防科技大学理学院, 长沙 410073)

传统固体晶体由原子在实空间中的周期性排布所定义, 而近期非平衡动力学研究表明, 受到时间周期驱动的动力学系统可在相空间中形成晶体结构, 即“相空间晶体”. 本文系统地综述了相空间晶体的理论框架、多体相互作用机制及其拓扑动力学效应. 相空间晶体的格波模式能在不破坏时间反演对称性的前提下, 支持手性拓扑输运态的存在, 表现为一种“反常陈氏绝缘体”. 超冷原子系统凭借其极低的环境噪声与高度可控性为实现相空间晶体这种非平衡态提供了理想的平台. 在开放环境下, 通过定义晶体序参量, 可以确定在耗散速率、相互作用强度与环境温度参数空间下相空间晶体的存在条件及物相图. 相空间晶体与时间晶体是两个有区别又紧密联系的概念, 都是研究动力系统的高次谐波现象, 但侧重点有所不同. 相空间晶体为研究量子多体问题提供了新的平台, 也为基于弗洛凯调控的玻色码量子计算打开了新的研究思路.

关键词: 相空间晶体, 弗洛凯系统, 陈氏绝缘体, 时间晶体

PACS: 03.65.Sq, 05.70.Ln, 03.65.Vf, 05.30.Rt

1 引言

传统的固体晶体是由于原子在实空间中的周期性排布所形成的高度有序的平衡态. 近期的研究表明, 受到时间周期驱动的多粒子也可以在其相空间中形成晶体结构, 形成“相空间晶体” (phase space crystals, PSC)^[1]. 这是在动力学系统中出现的一类高度有序的非平衡物态^[1], 其存在性由庞加莱-伯克霍夫 (Poincaré-Birkhoff) 定理^[2-6] 所保证. 特定的时域周期性外驱动场能够在相空间中产生一个具有晶格结构

† 通信作者. E-mail: guolingzhen26@nudt.edu.cn (通信作者)

* 国家自然科学基金 (批准号: 12475025) 资助的课题.

的有效哈密顿量, 称为“相空间晶格” (phase space lattices, PSL) 哈密顿量, 其极值点对应动力学系统中的吸引子. 在有耗散的情况下, 粒子倾向于向这些吸引子弛豫, 并在外部驱动 (能量泵浦) 与环境耗散 (能量损失) 的动态平衡下达到稳定排布. 当每个吸引子被单个粒子占据时, 且粒子间相互作用满足一定条件时, 这种周期性排布的多体态便可以形成稳定存在的相空间晶体^[1]. 要在真实的实验条件下实现这种由周期驱动引发的非平衡物态, 需要系统具备极低的环境噪声与高度的可控性. 近年来, 凭借优异的宏观量子相干性与高度精准的参数调控能力, 超冷原子系统已成为模拟和探测各类复杂周期驱动动力学现象的理想物理平台^[7,8]. 因此, 探索超冷原子在周期驱动下所形成的相空间晶体, 不仅拓展了现代凝聚态物理的研究范畴, 也为研究远离平衡态的量子多体动力学开辟了新的方向^[9,10].

需要注意的是, “相空间晶格”和“相空间晶体”是两个不同的概念. 相空间晶格描述的是单粒子有效哈密顿量的周期性结构, 而相空间晶体则是由粒子间相互作用与驱动耗散机制共同诱导形成的有序非平衡多体态. 历史上, 相空间晶格的概念最早由约翰·冯·诺依曼 (John von Neumann) 引入^[11], 其在频率-时间平面上的对应形式被称为 Gabor 晶格^[12,13], 该晶格正交基的完备性已被严格证明^[14-19]. 随后, 扎斯拉夫斯基 (Zaslavsky) 在对受击谐振子 (kicked harmonic oscillator, KHO) 的研究中, 进一步探讨了动力学系统中的相空间晶格结构^[20]. 在此基础上, 学者们把实空间晶体布洛赫定理和能带论拓展至相空间, 建立了“准数理论” (quasi-number theory)^[9,10]. 借助紧束缚模型与温策尔-克拉默斯-布里渊 (Wentzel-Kramers-Brillouin, WKB) 准经典近似^[21,22], 许多典型的凝聚态物理现象在相空间中得以复现. 例如, 通过在驱动场中引入随机时间微扰以产生等效的随机格点势, 可以在相空间中实现的安德森局域化 (Anderson localization)^[23-27]; 通过调节外部驱动强度, 可以在相空间晶格中呈现光子数布洛赫振荡现象^[28] 等等. 与实空间不同, 相空间本质上是一个非对易空间, 这会导致类似于阿哈罗诺夫-玻姆 (Aharonov-Bohm) 相位的几何相位, 使得粒子在相空间中的运动等效于带电粒子在磁场中的洛伦兹力运动^[29]. 也正因为这种内禀的拓扑联系, 具有相空间晶格对称性的本征态 (Gottesman-Kitaev-Preskill, GKP) 可以用于容错编码^[30,31].

尽管相空间晶格中的单粒子物理已得到深入研究, 但相空间多体动力学仍需进一步探索. 研究发现, 由于相空间中相距较远格点上的粒子在实空间演化过程中仍会发生频繁碰撞, 实空间的短程相互作用会在相空间变为长程相互作用^[1,26,27,32-34]. 这种长程化映射机制, 结合相空间有效磁场以及周期背景势场, 使得在相空间晶格中模拟和研究固体物理中诸如哈伯德 (Hubbard) 模型、海森堡 (Heisenberg) 模型以及存在无序驱动时的多体局域化 (many-body localization, MBL) 等量子多体物理成为可能^[35-37]. 在相空间晶体中, 粒子间的相空间相互作用也会引发类似于实空间中的集体声子激发. 但与实空间晶格波受二阶时间微

分方程支配不同, 相空间晶体的振动由一阶正则辛动力学 (symplectic dynamics) 所描述.

维持相空间晶体这种远离平衡的有序态需要系统在外部驱动 (能量泵浦) 与环境阻尼 (能量耗散) 之间达成动态平衡, 否则一般的孤立受驱多体系统将不可避免地被加热至无穷温度态 [38–40]. 在包含耗散与热噪声的真实开放环境中, 经典动力学的线性分析与数值模拟表明, 仅当系统的多体相互作用强度、耗散速率以及环境温度均低于各自的物理临界值时, 相空间晶体才能克服边缘熔化与方差色散稳定存在 [41]. 此外, 作为高激发系统中的非平衡有序范例, 相空间晶体与近年来备受瞩目的“时间晶体” (time crystals) [27,42–44] 形成了互补与对比研究. 时间晶体的研究主要集中于系统离散时间平移对称性的自发破缺机制; 而相空间晶体的构建并不必然要求打破该对称性, 其更侧重于相空间内由多体相互作用维持的类固体晶态 [1,41,45], 二者的研究正共同推动着时间晶体中的凝聚态物理学等新兴前沿领域的深入探索 [27,34,44,46].

本文的结构安排如下. 在第一节 (本节) 引言之后, 第二节聚焦单粒子相空间晶格, 探讨一维与二维晶格的构建方法、准数能带理论以及非对易几何效应等单粒子物理内容. 第三节将深入介绍相空间多体动力学, 阐明实空间短程相互作用向相空间长程相互作用的映射机制, 以及如何在相空间模拟各类强关联多体模型. 第四节围绕冷原子相空间晶体, 分析其集体振动的拓扑能带与手性边缘态, 并结合耗散与热噪声等开放环境条件, 给出了系统稳定存在的相图与具体实验参数. 第五节阐明时间晶体与相空间晶体之间的区别和联系. 最后第六节对全文进行总结, 并对相空间晶体领域的未来发展与应用前景作出展望.

2 相空间晶格

2.1 相空间中的晶格对称性

2.1.1 一维 $\mathbb{Z}_n$ 相空间晶格

首先, 考虑一个描述经典的一维系统运动的不含时哈密顿量 $H_0(x, p)$, 由于能量守恒, 系统在相空间中的轨道就是 $H_0(x, p)$ 的等能线. 通过沿等能线定义“作用量” (action) 变量: $I \equiv (2\pi)^{-1} \oint p dx$. 哈密顿量可被重写为作用量的函数 $H_0(I)$, 其中作用量 I 的共轭变量 (角变量 θ) 不显式出现. 根据正则运动方程, 角变量的变化满足 $\theta(t) = \Omega t + \theta(0)$, 其中 $\Omega(I) = dH_0(I)/dI$ 表示规则运动轨道的频率. 然后, 加入微扰时域周期性外驱动场 $V(x, t) = V(x, t + 2\pi/\omega_d)$, 当驱动频率 ω_d 与某个作用量 I_0 的有理轨道共振时, 把哈密顿量正则变换到旋转频率为 ω_d/n 的旋转坐标系, 采用旋转波近似 (rotating wave approximation, RWA)

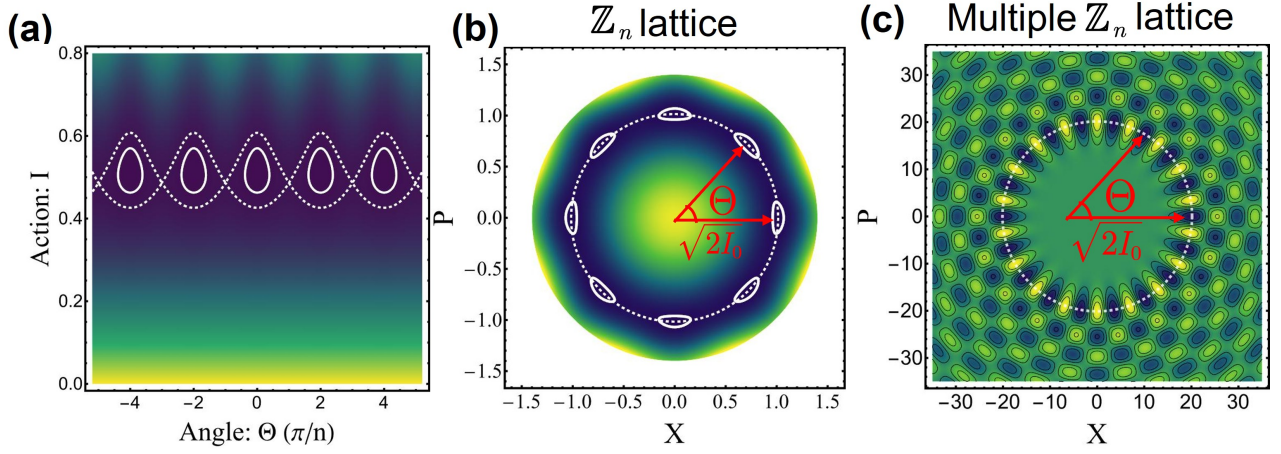


图 1: 相空间晶格结构. (a) 哈密顿量 (2) 在作用量-角变量 (I - Θ) 相空间的密度图及稳定点附近的周期性轨道 (白色实线) 形成的 $\mathbb{Z}_n$ 晶格结构; (b) 当 $n = 8$ 且驱动强度 $\mu = 0.2\mu_c$, 哈密顿量 (2) 在坐标-动量 (X - P) 相空间中的密度图; (c) 哈密顿量 (3) 在坐标-动量 (X - P) 相空间的密度图. 该图由被零线分隔的多个 $\mathbb{Z}_n$ 晶格环路 (白色虚线圆圈) 构成. (基于文献 [10,22,47] 的方法重新生成).

Fig. 1: Lattice structures in phase space. (a) Periodic orbits of the $\mathbb{Z}_n$ lattice model in the action-angle (I - Θ) plane shown in Eq. (2); (b) 2D density plot of Eq. (2) in (X - P) phase space when $n = 8$ and the driving strength is $\mu = 0.2\mu_c$; (c) 2D distribution plot of Hamiltonian Eq. (3). This plot is composed of loops (white circles) formed by multiple $\mathbb{Z}_n$ lattices separated by zero lines. (Reproduced following references [10,22,47]).

舍去快振荡项后, 即可得到与时间无关的有效哈密顿量:

$$H_{\text{RWA}}(I, \Theta) = H_0(I) - \frac{\omega_d}{n} I + \epsilon V_{\text{eff}}(I, \Theta). \quad (1)$$

其中, $\Theta = \theta - \omega_d t/n$ 为旋转系中的新角变量, 有效势能 $V_{\text{eff}}(I, \Theta)$ 是关于 Θ 的周期函数, ϵ 为扰动参数. 根据庞加莱-伯克霍夫定理 [2], 驱动与频率为 ω_d/n 的经典轨道共振, 将在 Θ 环上均匀地产生 n 个相同的局域势阱 [3-6]. 这种一维 n 重对称的相空间晶格即被称为 $\mathbb{Z}_n$ 晶格. 下面我们介绍关于该晶格的两个例子.

2.1.1.1 幂律驱动非线性振子 考虑一个非线性振子 $H_0(x, p) = p^2/2m + m\omega_0^2 x^2/2 + \nu x^4/2$, 受外部场幂律形式的驱动 $V(x, t) = 2f \cos(\omega_d t)x^n$, $n \in \mathbb{N}$. 当驱动频率 ω_d 接近 $n\omega_0$ 亚共振区域 ($|\omega_d/n - \omega_0| \ll \omega_0$), 用作用量和角变量表示的时间无关旋转波近似哈密顿量为 [9]:

$$H_{\text{RWA}}(I, \Theta) = \left(I - \frac{1}{2}\right)^2 + \mu(\sqrt{2I})^n \cos(n\Theta), \quad (2)$$

其中 μ 为标度化的无量纲驱动强度. 图 1(a) 展示了在 I - Θ 相空间上绘制的哈密顿量 (2) 的 $\mathbb{Z}_n$ 晶格结构, 被分隔线 (白色虚线) 分隔的 n 个稳定点被闭合周期轨道 (白色实线) 包围. 通过定义新的一对共轭变量 $X \equiv \sqrt{2I} \cos \Theta$ 与 $P \equiv \sqrt{2I} \sin \Theta$, 图 1(b) 绘制了在 X - P 相空间中的哈密顿量 (2), 其中 n 个均匀分布在半径为 $\sqrt{2I_0}$ 圆上局域势阱显示了 n 重旋转对称性 [9].

2.1.1.2 余弦驱动简谐振子 考虑一个简谐振子, 受余弦型晶格势驱动 $V(x, t) = 2A \cos(kx + \omega_d t)$, 在光子共振条件下 ($\omega_d/n = \omega_0$, $n \in \mathbb{N}$), 经典极限下用作用量和角变量表示的旋转波近似哈密顿量为 [10]:

$$H_{\text{RWA}}(I, \Theta) = 2\mu J_n(\sqrt{2I}) \cos\left(n\Theta - \frac{n\pi}{2}\right), \quad (3)$$

其中 $J_n(\bullet)$ 是 n 阶贝塞尔函数, μ 是标度后的无量纲驱动强度. 图 1(c) 展示了旋转波近似哈密顿量在 X - P 相空间中的图像. 零线 ($H_{\text{RWA}} = 0$) 将整个相空间晶格分割成许多小的“晶胞”, 每个晶胞的中心是一个稳定点, 对应于存在耗散时的吸引子, 整个晶格展示出 n 重旋转对称性 $\mathbb{Z}_n$ 晶格结构.

2.1.2 二维相空间晶格

相空间晶格也可以具有完整的二维结构, 以周期受击简谐振子模型 (KHO) 为例 [20,48–50], 其含时驱动势为 $V(x, t) = K\tau \cos x \sum_m \delta(t/\tau - m)$, 其中 K 为受击强度、 τ 为周期性脉冲周期. 在共振条件 $\tau = 2\pi/q_0$ ($q_0 \in \mathbb{Z}$) 及弱受击极限 $|K| \ll 1$ 下, 描述正交分量 (X, P) 的旋转波近似哈密顿量为 [1]:

$$H_{\text{RWA}}(X, P) = \frac{K}{q_0} \sum_{j=1}^{q_0} \cos\left[X \cos\left(\frac{2\pi j}{q_0}\right) - P \sin\left(\frac{2\pi j}{q_0}\right)\right]. \quad (4)$$

图 2(a) 展示了 $q_0 = 4$ 时的正方晶格结构. 为了在相空间中合成更加复杂的晶格结构, 还可引入广义的 KHO 模型 [41], 通过多个频闪晶格的组合, 原则上能够在相空间中合成任意的二维晶格结构. 在第 4.1.1 节, 我们将给出蜂窝状相空间晶格的例子.

2.2 相空间能带理论

可以把实空间布洛赫定理扩展到相空间, 为相空间晶格建立一套完整的准数能带理论, 并讨论紧束缚模型、安德森局域化和布洛赫振荡等典型固体晶体现象.

2.2.1 布洛赫定理

从图 1 上观察到, 2.1 小节中多种相空间晶格模型的有效哈密顿量 $\hat{H}_{\text{RWA}}$ 均具有离散对称性 [9,10]. 为了刻画这种离散对称性, 引入么正的离散相位平移算符 $\hat{T}_\tau = e^{-i\tau \hat{a}^\dagger \hat{a}}$, 其中 $\hat{a}$ 为相空间谐振子的湮灭算符.

$\mathbb{Z}_n$ 晶格的有效哈密顿量在此离散变换 $\hat{T}_\tau^\dagger \hat{H}_{\text{RWA}} \hat{T}_\tau = \hat{H}_{\text{RWA}}$ 下保持不变 ($\tau = 2\pi/n$). 根据布洛赫定理, 满足本征方程 $\hat{H}_{\text{RWA}} \psi_m(\Theta) = g(m) \psi_m(\Theta)$ 的准能量 $g(m)$ 和本征态 $\psi_m(\Theta)$ 具有如下形式:

$$\psi_m(\Theta) = e^{-im\Theta} \phi_m(\Theta), \quad \phi_m(\Theta + \tau) = \phi_m(\Theta). \quad (5)$$

类似于实空间晶体中与坐标共轭的“准动量” (quasi-momentum), 整数 m 是相位变量 Θ 的共轭量子化变量, 我们将其称为“准数” (quasi-number) [9].

2.2.2 紧束缚模型

对于 $\mathbb{Z}_n$ 晶格, 如果晶格格点处的势阱足够深, 就可以通过紧束缚模型进行近似分析:

$$H_{\text{TB}} \approx E_l \sum_i \hat{a}_{i,l}^\dagger \hat{a}_{i,l} + \frac{1}{2} \left(J_l \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{a}_{i,l}^\dagger \hat{a}_{j,l} + \text{h.c.} \right). \quad (6)$$

这里, $\hat{a}_{i,l}$ 是第 i 个格点上第 l 个瓦尼尔 (Wannier) 态的湮灭算符, E_l 是该 Wannier 态的能级, J_l 是由 $\langle i,j \rangle$ 标记的最近邻格点之间的隧穿率. 通过紧束缚布洛赫本征态与局域瓦尼尔态的关系, 可推导出第 l 条能带的谱结构表达式:

$$g_l(m) = \int_0^{2\pi} \psi_{lm}^*(\Theta) \hat{H}_{\text{RWA}} \psi_{lm}(\Theta) d\Theta \approx E_l - d_l \cos(m\tau + \delta_l \tau). \quad (7)$$

上式包含三个未知的核心参数: 紧束缚能带中心能量 E_l ; 带宽参数 $d_l = 2|J_l|$; 能带的不对称因子的 δ_l . 这三个参数可通过 WKB 近似方法进行解析计算 [22]. 能级 E_l 由相空间经典闭合轨道的玻尔-索末菲量子化条件决定; 带宽参数 d_l 及隧穿率幅值 $|J_l|$ 可通过沿主导隧穿路径对虚作用量进行积分求得; 不对称因子 δ_l 可在 Θ 表象下利用作用量-角变量的非对易关系 $[\Theta, I] = i\lambda$ (λ 为约化普朗克常数) 求解得出 [10, 21, 22].

2.2.3 安德森局域化

进一步地, 通过在驱动场中引入周期性随机时间微扰 [23-27], 可以在紧束缚模型中产生随机格点势, 从而得到如下有效哈密顿量:

$$H_{\text{eff}} \approx -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (J_j \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j + \text{c. c.}) + \sum_{j=1}^n \epsilon_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j. \quad (8)$$

上式中, ϵ_j 表示随机格点能量, 可通过合理设计微扰函数来调控. 对于 $\mathbb{Z}_n$ 晶格, 式 (8) 等效于圆环上的一维安德森模型, 无论无序多弱均会发生局域化. 在相空间中, 局域态表现为概率随相空间距离增加呈指数衰减的波包叠加; 而在实验室参考系中, 这表现为位形空间固定位置的概率密度在特定时刻附近呈指数级局域化, 即所谓的“时域安德森局域化” [26].

2.2.4 布洛赫振荡

布洛赫振荡指被束缚在周期性晶格势中的粒子在受到微弱恒力作用时所产生的振荡行为。这一现象最初由 Felix Bloch 在研究固体晶体中电子的运动时预言^[28]。实空间中, 可以在被时变磁通穿过的一维环状晶格中实现这种效应。观察 (2) 式描述的相空间晶格哈密顿量, 其等效于一个带有效磁通量的实空间环状晶格, 驱动强度 μ 对应一个有效磁场强度^[41]。由于作用量变量与光子数算符满足 $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{I}/\lambda$, 体系的光子数期望值可以由准能量色散关系: $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2} \frac{\partial E_I(m)}{\partial m} \Big|_{m=m(t)}$ 确定, 将紧束缚能带 (7) 式带入, 采用半经典近似 $\lambda \ll 1$ 以及弱驱动条件 $\mu \ll 1$ 。通过调节驱动强度 μ , 可以得到光子数随时间演化的关系式:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{|J_I|\tau}{\lambda^2} \sin(m\tau + \delta_I\tau) \Big|_{m=m(t)}. \quad (9)$$

其中 $m(t)$ 跟随驱动强度 μ 单调增加, 但根据该演化公式, 光子数并不会一直增加, 而是呈周期振荡, 最大变化量为 $\Delta \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\max} = 2|J_I|\tau/\lambda^2$ 。同时, 体系的能带带宽随着驱动强度的增加呈指数衰减。因此, 作为驱动强度函数的光子数布洛赫振荡, 在相空间中最终表现为一个具有指数衰减包络的正弦曲线, 详细推导参见文献^[41]的第 3.2.5 节。

2.3 相空间非对易几何效应

如图 2(b) 所示, 由于相空间的两个自由度是不对易的 ($[X, P] = i\lambda$), 当相干态 $|\alpha\rangle$ 沿着闭合路径移动一周时, 会获得一个几何相位因子 $e^{iS/\lambda}$, 其中 S 为闭合路径所包围的面积^[51]。在一维 $\mathbb{Z}_n$ 晶格模型中, 这种几何相位类似于外加磁场诱导的 Peierls 相位^[52], 是导致复数隧穿效应以及准能量能带结构不对称的原因, 预期二维相空间晶格中也会出现相应的拓扑现象。以正方晶格 $\hat{H}_{\text{sq}}(X, P) = \frac{1}{2}K(\cos X + \cos P)$ 为例, 给定无量纲参数 $\lambda/2\pi = p/q$ (p 和 q 为互素整数), 整个能带结构分裂为 q 个子带, 每个子带具有 p 重简并度, 并在准能量谱中展现出与量子霍尔系统相同的 Hofstadter 蝴蝶结构^[53,54], 见图 2(c)。特别地, 当 $\lambda/2\pi = 1$ 且 $K < 0$ 时, 可以定义如下正交的等间距位置本征态相干叠加的态:

$$|\bar{0}\rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |X = 2\pi l\rangle, \quad |\bar{1}\rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |X = \pi + 2\pi l\rangle. \quad (10)$$

这种梳状态最早由 Gottesman、Kitaev 和 Preskill 引入, 可以作为逻辑量子比特态用于容错量子计算中的玻色码量子纠错, 现在被称为 GKP 态^[31]。

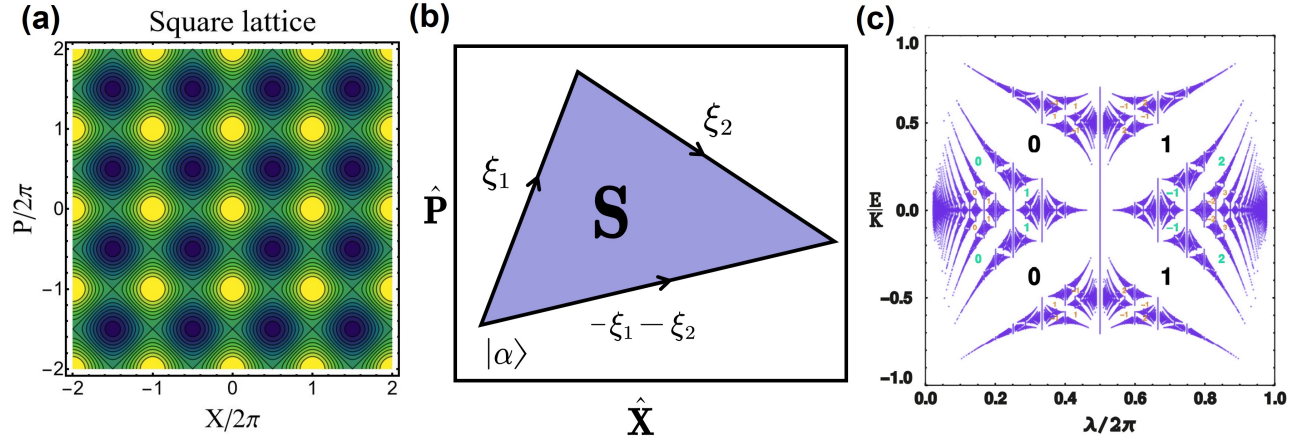


图 2: 二维相空间晶格及非对易几何效应. (a) $q_0 = 4$ 时, KHO 模型的二维正方晶格构型; (b) 非对易几何相位. 相干态 $|\alpha\rangle$ 沿着闭合三角形移动, 并获得由 $e^{iS/\lambda}$ 给出的几何相位因子, S 代表闭合路径的面积 (紫色区域); (c) 霍夫施塔特蝴蝶: $\lambda/2\pi \in [0, 1]$ 时的准能量谱与能隙陈数. (基于文献 [1,44,45] 方法重新生成)

Fig. 2: 2D phase space lattice and the non-commutative geometry effects. (a) 2D square lattice of the KHO model for $q_0 = 4$; (b) Noncommutative geometric phase. A coherent state $|\alpha\rangle$ is moved along a closed triangle and acquires a geometric phase factor given by $e^{iS/\lambda}$, where S represents the area of the closed path (purple region); (c) Hofstadter's butterfly: quasienergy spectrum and gap Chern numbers for $\lambda/2\pi \in [0, 1]$. (Reproduced following references [1,44,45]).

3 相空间晶体

在上一节中, 我们讨论了相空间晶格中的单粒子动力学. 本节将考虑受周期外场驱动的多个相互作用的粒子体系, 讨论其经典多体动力学和量子多体效应. 将建立相空间中有效相互作用与实空间中原始相互作用之间的关系, 并揭示实空间中的短程相互作用在相空间中会演变为长程相互作用. 借助相空间相互作用的特性, 许多强关联模型都可以在相空间中进行模拟, 为在动力学系统中探索凝聚态现象提供新视角.

3.1 相空间多体动力学

3.1.1 经典相空间相互作用

考虑被束缚在一维势阱中并受外场周期驱动的多全同粒子, 假设单粒子哈密顿量记为 $H^s(x, p, t)$, 粒子间的相互作用势 $V(x_i - x_j)$ 是两个粒子间距 $|x_i - x_j|$ 的函数, 其多体哈密顿量可描述为:

$$H = \sum_i H^s(x_i, p_i, t) + \sum_{i < j} V(x_i - x_j). \quad (11)$$

变换到与驱动频率相应的旋转参考系中, 该多体系统在旋转波近似下的有效哈密顿量为

$$H_{\text{RWA}} = \sum_i H_{\text{RWA}}^s(X_i, P_i) + \sum_{i < j} U(X_i, P_i; X_j, P_j). \quad (12)$$

其中, $H_{\text{RWA}}^s(X_i, P_i)$ 是单粒子旋波近似哈密顿量, U 是实空间相互作用势 $V(x_i - x_j)$ 在旋转参考系下时间平均的结果. 若无微扰运动接近简谐振荡, 其有效相互作用势仅依赖于相空间相对距离 R_{ij} :

$$U(R_{ij}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(R_{ij} \sin \tau) d\tau. \quad (13)$$

由于 $U(R_{ij})$ 定义在旋转参考系的相空间中, 并且由相空间距离 R_{ij} 决定, 故将其称为相空间相互作用势. 通过该积分关系, 可以显式计算出几种典型实空间相互作用在相空间中的等效形式^[33]. 对于描述超冷原子 s 波散射的点状接触相互作用 $V(x_i - x_j) = \epsilon \delta(x_i - x_j)$ ^[55], 其等效产生的相空间相互作用为长程类库仑势 $U(R_{ij}) = \pi^{-1} \epsilon / R_{ij}$. 对于排斥幂律相互作用 $V(x_i - x_j) = \epsilon^{2n} / |x_i - x_j|^{2n}$, 重整化积分结果表明, 库仑势 ($n = 1/2$) 会获得对数修正, 硬球势 ($n \rightarrow \infty$) 则演变为随相空间距离线性增加的势能, 类似于量子色动力学中夸克之间的禁闭相互作用^[33]. 最后, 对于分子间的兰纳-琼斯 (Lennard-Jones) 势, 由于近距离碰撞排斥项占主导, 其相空间碰撞因子可直接通过选取对应的反幂律指数进行近似计算^[41].

3.1.2 相空间中的“牛顿”方程

对于一维实空间中包含多个相互作用粒子的系统, 可在二维相空间中利用位置矢量 $\mathbf{Z}_i \equiv (X_i, P_i)^T$ 标记粒子坐标. 类比实空间, 可通过相空间能量梯度定义第 i 个粒子所受的“相空间力” (phase space force) $\mathbf{F}_i \equiv -\nabla_i H$, 并且给出紧凑形式的正则运动方程:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Z}_i = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}_i, \quad (14)$$

其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 为垂直于相空间平面的单位法向量. 对于两体相空间相互作用势 $U(R_{ij})$, 第 j 个粒子对第 i 个粒子的相空间力为 $\mathbf{F}_{ij} \equiv -\nabla_i U(R_{ij})$, 且满足 $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. 由此可以总结二维相平面上的“牛顿”运动定律^[41]:

(1) 除非受到相空间力作用, 粒子在相空间中保持静止; (2) 粒子受到的总相空间力与其相空间速度成正比且方向垂直, 即 $\mathbf{F}_i = \mathbf{V}_i \times \hat{\mathbf{n}}$; (3) 两个粒子间的相空间相互作用力大小相等、方向相反.

注意到在均匀磁场中运动的带电粒子所受洛伦兹力 $\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 与上述相空间力具有相同的叉乘形式, 在荷质比趋于无穷大 ($q/m \rightarrow \infty$) 的极限下, 带电粒子的回旋运动 (cyclotron motion) 半径趋于零, 描述粒子回旋运动中心漂移的磁控运动 (magnetron motion) 的洛伦兹运动方程变为 $\mathbf{v}_i = (qB)^{-1} \mathbf{F}_i \times \hat{\mathbf{n}}$, 与运动方程 (14) 式一致^[41]. 上述类牛顿动力学方程能够描述不同多体系统在相空间中的演化轨迹. 例如, 对

于相空间中的两体问题, 相互作用会导致两个粒子保持固定的相空间距离 R_{12} , 并以依赖于相互作用势的特定角速度 ω_R 绕中心旋转. 而在三体或多体动力学中, 粒子会根据相空间相互作用类型 (如库仑势、硬球势或 Lennard-Jones 势) 的不同, 展现出如层级旋转、不规则扰动或周期性位置交换等丰富的复杂轨迹演化 [13].

3.1.3 相空间晶体的形成

进一步, 通过在相空间中引入背景晶格势, 结合相空间相互作用, 可在驱动场中研究多体动力学. 对于包含多个相互作用的受击谐振子模型, 选取特定的受击共振周期 ($2\pi/\tau = 4$) 并应用正则变换, 可以在相空间中构建处于正方晶格内的多个相互作用粒子 (参见 2.2.1 节), 其多体相空间哈密顿量为:

$$H_{\text{RWA}} = \sum_i \frac{1}{2} K (\cos X_i + \cos P_i) + \sum_{i < j} U(R_{ij}). \quad (15)$$

在合适的相互作用强度下, 相互约束的粒子将稳定在相空间格点附近进行微小振荡, 从而形成规则排列的多体结晶态 [1]. 前文探讨的相空间晶格仅指不考虑粒子间相互作用时, 单粒子有效哈密顿量在相空间中呈现的静态周期性势场结构; 而相空间晶体则是指由相互作用的原子在相空间势场中自发组织、并依靠相空间长程相互作用维持稳定的多体结晶态 [10]. 后者的存在性与结晶态特征, 本质上受到原子总数与有效耦合强度的严格制约. 相空间晶体在开放环境下的稳定性机制与物理相图将在 4.3 节中进行探讨.

3.2 量子多体效应

3.2.1 量子相空间相互作用

在非对易相空间的框架下, 实空间中“点”的概念失去物理意义, 取而代之的是由相干态表征的最小量子波包. 相应地, 将相空间“距离”严格应被定义为算符: $\hat{R}_{ij}^2 \equiv (\hat{X}_i - \hat{X}_j)^2 + (\hat{P}_i - \hat{P}_j)^2$ [1]. 由于受到非对易关系 $[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\lambda\delta_{ij}$ 的约束, 相空间距离变为了一个存在物理下限 ($\sqrt{2\lambda}$) 的量子化变量. 在多体相互作用系统中, 将系统变换至旋转框架并在旋转波近似下, 可得到有效哈密顿量算符:

$$\hat{H}_{\text{RWA}} = \sum_i \hat{H}_{\text{RWA}}(\hat{X}_i, \hat{P}_i) + \sum_{i < j} \hat{U}(\hat{X}_i, \hat{P}_i; \hat{X}_j, \hat{P}_j), \quad (16)$$

对于给定的实空间相互作用势, 根据玻色 (费米) 子的交换对称性, 全同带自旋粒子平均相空间相互作用可以分解为直接相互作用和交换相互作用之和或差 [1, 10, 56], 即 $\langle U \rangle_{\pm} = U \pm J$. 在 $\hat{R}$ 表象下, 它们的形式为:

$$U = \sum_N U(R_N) I_N, \quad J = \sum_N (-1)^N U(R_N) I_N, \quad (17)$$

其中 I_N 为构成两体波函数两个组份的交叠积分. 如果无微扰运动无法采用简谐运动近似, 亦可将相空间相互作用定义为实空间势两体量子态的时间平均值 $U_{ij} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \langle \Phi(t) | V(x_i - x_j) | \Phi(t) \rangle dt$. 这是经典相空间时间平均相互作用的量子对应版本, 也是 Sacha 等人在研究振荡镜面上反弹粒子时采用的方法 [26,32,34,35,57-60].

3.2.2 碰撞诱导的自旋-自旋相互作用

两个自旋-1/2 全同粒子不考虑相互作用时, 其自旋三重态 $|+\rangle$ 和单重态 $|-\rangle$ 是简并的. 当两个粒子在势阱中发生碰撞时, 相空间相互作用会诱导一个共同的能级频移 U , 并在三重态和单重态之间产生一个大小为 $2J$ 的能级劈裂. 这种量子的交换相互作用 J 可以看成是由碰撞诱导的等效自旋-自旋相互作用. 依靠这种相空间碰撞动力学, 通过控制演化时间 t_g , 可以构建出双量子比特门 $U(t_g) = \sqrt{\text{SWAP}}(R(\theta) \otimes R(\theta))$ [61,62]. 由于 $\sqrt{\text{SWAP}}$ 门已被证明是通用量子门 [61,62], 这种基于相空间碰撞的么正演化机制为实现通用量子算法提供了一条可行的物理途径. 近期, Immanuel Bloch 团队成功在实空间的光学超晶格双孔势阱中实现了这种碰撞诱导的相互作用, 并完成高保真度双量子比特纠缠门的实验制备 [63].

3.2.3 相空间中的强关联模型

借助相空间晶格结构与诱导的长程相互作用, 可以在相空间中模拟强关联凝聚态模型. 例如, 在单体紧束缚模型中引入包含直接与交换相互作用的多体项后, 系统可被推广为 Bose-Hubbard 或 Fermi-Hubbard 模型, 从而为观测 Mott 绝缘体相变等强关联现象提供理论支持 [26,57,60]. 若在周期性驱动场中引入随机的时间无序微扰, 系统将形成等效的随机格点势, 从而复现多体安德森模型, 为探索时域多体局域化现象提供新视角 [34,35]. 此外, 当粒子被相空间深势阱束缚于平衡点时, 其动力学将由长程交换相互作用主导, 系统对应于相空间海森堡模型 [36,37]. 该模型类库仑长程行为, 为检验 Mermin-Wagner 定理 [64] 及探索长程相互作用下的其他现象 (如因果性与量子临界性 [65-71]、非定域序 [72-74] 等) 提供了一个可能的平台.

4 冷原子相空间晶体

本节将探讨二维相空间晶体的线性化动力学及其在含耗散与热噪声的开放环境中的物理行为. 研究表明, 原子间的相空间相互作用能够诱导出具有非平庸陈数和手性边缘态的集体振动能带结构 [45]. 进一步, 通过对动力学系统进行线性分析并定义晶体序参量, 可以确定维持相空间晶体稳定的临界耗散速率、临界相互作用强度与临界温度及物理相图, 这为在冷原子实验体系中实现相空间晶体奠定了理论基础.

4.1 相空间晶格动力学

4.1.1 蜂窝状相空间晶格

如图 3(a) 所示, 为了在冷原子光晶格中制备相空间晶体, 实验上可从磁阱中产生的玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 出发^[75], 通过叠加正交的驻波将 BEC 囚禁在准一维细长谐振势中. 进一步叠加多束以特定角度相交的激光束, 即可产生空间周期受控且以时间间隔为 τ 周期性开启和关闭的可调频闪晶格势^[76]. 此时, 单原子动力学可以由 2.1.2 节中介绍的受击谐振子 (KHO) 的广义模型来描述^[20,48,77-80], 在弱近共振驱动与旋转波近似下, 可以用有效哈密顿量描述. 例如, 通过选取由九个频闪晶格组成的特定受击序列, 能够在相空间中精准构建出蜂窝状晶格^[41]. 定义相空间位置矢量 $\mathbf{Z} \equiv (X, P)^T$ 以及三个辅助矢量: $\mathbf{v}_1 = (1, 1/\sqrt{3})$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1/\sqrt{3})$ 和 $\mathbf{v}_3 = (0, -2/\sqrt{3})$, 蜂窝状晶格单粒子有效哈密顿量由下式给出^[41]:

$$H_s(\mathbf{Z}) = -\frac{1}{2}\delta\omega|\mathbf{Z}|^2 - \frac{16}{9}\omega_0 \prod_{n=1}^3 \sin^2\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{Z}\right) + \frac{2\Delta}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^3 \sin(\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{Z}). \quad (18)$$

上式中的第一项对应相空间中的有效抛物势, $\delta\omega = 1 - 2\pi/\tau$ 为失谐量; 第二项描述由周期驱动产生的蜂窝状相空间晶格结构; 第三项为格点失谐项, 用于调节两个子晶格之间的局域振动频率差. 蜂窝状晶格两个子晶格的“在位频率” (on-site frequency) 分别为 $\omega_0 \pm \Delta$. 在量子情况下, 单粒子最近邻隧穿率可通过 WKB 近似沿主导路径进行估算^[41].

在超冷原子实验中, 低温下的碰撞主要由 s 波散射过程主导. 三维超冷气体的两体相互作用可以用接触函数形式的赝势 $V_{3D}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{2m} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ 描述^[55], 其中 a 是三维 s 波散射长度. 在准一维势阱中, 接触相互作用的强度受横向模式修正, 其有效赝势可近似为 $V_{1D}(x_i - x_j) \approx \gamma \delta(x_i - x_j)$ ^[55], 其中 $\gamma = 2\hbar\omega_{\text{tr}}a$. 这种一维接触相互作用会导致粒子在正交相空间产生有效的类库仑相互作用 $U(R_{ij}) = \pi^{-1}\gamma/R_{ij}$, 适用于彼此分离较远 (即晶格常数远大于波包宽度) 的原子. 最终, 推导出总的多体哈密顿量如下^[45]:

$$H = \sum_L H_s(X_L, P_L) + \frac{1}{2} \sum_{L \neq L'} U(R_{LL'}) \equiv T + \Phi. \quad (19)$$

下标 $L = (l, s)$ 代表 $s \in \{A, B\}$ 子晶格的第 l 个原子, 如图 3(c) 所示. 该多体哈密顿量分解为总单粒子部分 T 和总相互作用部分 Φ , 分别描述原子在相空间晶格中的独立运动和由类库仑长程相互作用耦合的复杂多体关联效应.

4.1.1.1 平衡构型 在晶格势和有效相互作用的共同作用下, 原子在相空间中可形成平衡构型. 平衡点由极值条件 $\partial H / \partial u_L^\alpha = 0$ ($\alpha \in \{X, P\}$) 确定^[41], 其中 u_L^α 为粒子在相空间偏离平衡点的位移. 对于周期性边

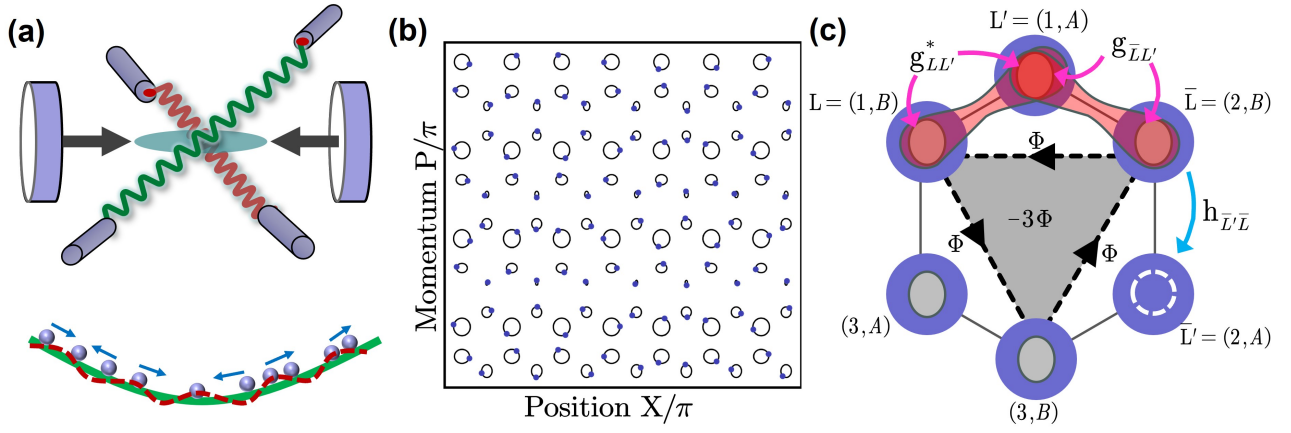


图 3: 冷原子相空间晶体. (a) 上图展示冷原子云被多个激光束囚禁在准一维管状光势阱中并受频闪晶格势驱动的实验示意图, 下图展示原子所受的势场可分为静态谐振势 (绿实线) 加上频闪晶格势 (红色虚线); (b) 相空间晶体振动格波, 原子 (蓝点) 被局域在各自平衡点附近做微小振荡 (黑圈); (c) 单个原胞放大示意, 相空间晶体的格波振动在相邻格点间的跳跃 (蓝色箭头) 和配对 (粉色箭头与红色哑铃图形). 黑色虚线代表由最近邻配对诱导的次近邻跳跃. (基于文献^[45] 重新生成)

Fig. 3: Cold atom phase space crystals. (a) Atomic cloud confined in a quasi-1D tube potential and tunable stroboscopic lattices, and particles in a static harmonic trap (green solid curve) driven by stroboscopic lattices; (b) Phase space crystal vibrations, where atoms (blue dots) perform small oscillations on closed equilibrium orbits (black circles) at their respective sites; (c) Magnified unit cell, showing the hopping (blue arrow) and pairing (pink arrows and red dumbbell shapes) processes of lattice modes. Black dashed lines denote next-nearest-neighbor hopping induced by nearest-neighbor pairing. (Reproduced following reference^[45]).

界的情况, 对称方向的相互作用会相互抵消, 平衡点即为蜂窝状晶格的格点. 在实际实验中, 通过引入较强的排斥相互作用, 原子将散布在相空间中并形成圆盘状的晶体态, 如图 3(b). 但是, 原子间的相互作用会使蜂窝状平衡构型产生形变并引起一种平均场势, 从而破坏平衡构型. 由这种圆盘晶体产生的有效势可以近似为均匀带电圆盘平面的库仑势. 考虑高阶项的贡献, 将该有效势拟合为 $\tilde{U}(Z_i) \sim -1.35\pi\sigma R^{-1}|Z_i|^2/2$. 因此, 通过在单粒子哈密顿量 (18) 式中设定全局失谐量 $\delta\omega \sim 1.35\pi\sigma R^{-1}$, 以抵消由相互作用引起的平均场势^[41].

4.1.1.2 线性模式 如图 3(b) 所示, 假设每个原子在其平衡位置 Z_L^0 进行微小振荡, 将多体哈密顿量 (19) 沿平衡位置展开至二阶, 略去常数项后, 在每个格点处引入复数场 $a_L \equiv (u_L^X + iu_L^P)/\sqrt{2\lambda}$. 注意在此物理过

程中, 原子本身被束缚在平衡位置并不发生实际跳跃, 真正在相空间晶格中发生跳跃的是晶格激发, 原子仅在其所属格点的相空间闭合轨道上做局域振荡. 由此可得到如下线性化哈密顿量^[45]:

$$\mathcal{H}/\lambda = \sum_{L,L'} h_{LL'} a_L^\dagger a_{L'} + \frac{1}{2} (g_{LL'} a_L^\dagger a_{L'}^\dagger + g_{LL'}^* a_L a_{L'}). \quad (20)$$

其中, 对角项参数 $h_{LL} \equiv \omega_L$ 与 $g_{LL} \equiv g_L$ 分别代表格点激发能量与局域压缩率. 如图 3(c) 所示, 原胞内非对角格点间的耦合机制由两种物理过程主导: 由实数跳跃系数 $h_{LL'}$ 描述的声子跳跃过程 (蓝色箭头) 和由复数配对系数 (pairing coefficient) $g_{LL'}$ 描述的相空间声子配对过程 (粉色箭头与红色哑铃). 两个连续的最近邻配对过程能够有效诱导出具有非平庸相位的次近邻跳跃 (黑色虚线所示). 对于具有周期性边界条件的蜂窝状晶格, 通过求解相应的系数, 可以得到描述相空间晶体振动的多体哈密顿量^[41,45]:

$$\mathcal{H}/\lambda = \sum_L \omega_L a_L^\dagger a_L + \frac{1}{2} g_L a_L^\dagger{}^2 + \frac{1}{2} g_L^* a_L^2 - \frac{\gamma}{4\pi} \left(\sum_{L \neq L'} \frac{a_L^\dagger a_{L'} + 3e^{i2\varphi_{LL'}} a_L^\dagger a_{L'}}{|Z_L^0 - Z_{L'}^0|^3} + \text{h.c.} \right). \quad (21)$$

上式描述了在蜂窝状相空间晶体中传播的声子, 参数 $\varphi_{LL'}$ 为相位参数, 即连接两个格点矢量的角度. 该物理模型类似石墨烯中电子的紧束缚模型, 但相空间声子可以在任意距离的两个格点间跳跃, 这反映了原子间相空间相互作用的长程本质.

4.1.2 量子反常霍尔效应

为区分长程跳跃与配对效应, 考察配对产生过程处于远失谐区域 ($\gamma \ll \omega_0$) 的情形. 在此情形下, 可通过么正变换有效消除哈密顿量 (20) 中的配对相互作用项, 剩下的是由配对诱导的额外有效跳跃项:

$$\tilde{h}_{LL'} \approx - \sum_{\bar{L}} \frac{2}{\omega_{\bar{L}}} g_{L\bar{L}} g_{\bar{L}L'}^*. \quad (22)$$

配对可以诱导出具有非互易相位的有效跳跃跃迁. 如图 3(c), 在闭合环路 $L(\cdot)$ 上传播的声子 (虚线所包围的三角形环路) 将会获得一个几何相位 $\Phi(L(\cdot))$. 这些几何相位类似于带电粒子在磁场中获得的 Aharonov-Bohm 相位, 常被称为合成磁通量. 事实上, 这种从 γ/ω_0 微扰理论导出的有效粒子数守恒描述, 与量子反常霍尔效应 Haldane 模型^[81] 的区别, 仅在于它包含了长程跳跃跃迁. 这里描述的声子合成规范场与量子原子在准能量表面 $H^s(\mathbf{Z})$ 隧穿的合成规范场^[1,9,21] 并没有直接关联. 对于仅具有最近邻相互作用且包含对称蜂窝状晶格的模型, 可以在弱失谐相互作用区域恢复为类似 Haldane 模型的量子反常霍尔效应^[41].

4.2 拓扑相空间晶格波

对于线性化哈密顿量 (21), 在非微扰区域中, 当玻色子配对相互作用 γ 相较于 ω_0 不再是微扰时, 声子数不再近似守恒, 进而导致单粒子描述失效. 不同于费米子系统, 玻色子占据数不受泡利不相容原理限制,

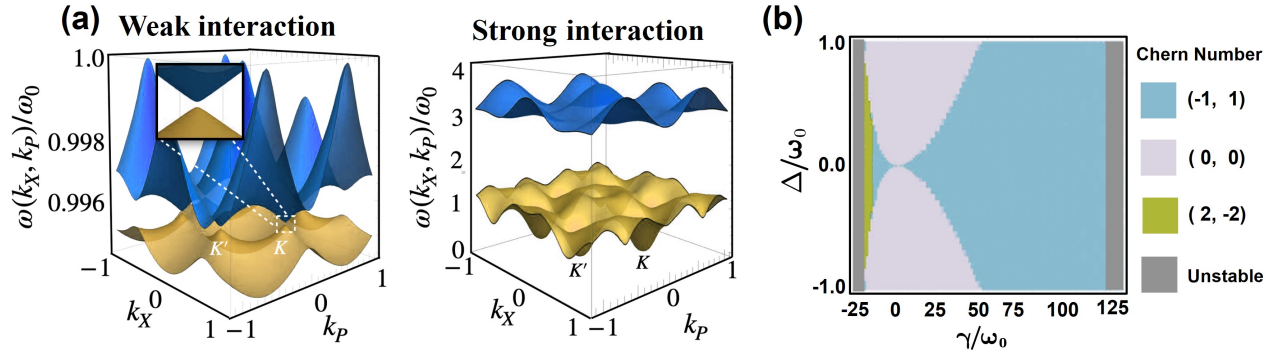


图 4: 相空间晶体拓扑能带. (a) 弱相互作用强度 $\gamma/\omega_0 = -0.2$ (左) 和强相互作用强度 $\gamma/\omega_0 = 100\sqrt{2}$ (右) 的相空间晶格波的体能带结构; (b) 相空间格波拓扑相图, 展示了上下两能带陈数随相互作用强度 γ 和格点失谐 Δ 变化的函数关系. (基于文献^[45] 重新生成)

Fig. 4: Topological bands of phase space crystals. (a) Bulk band structures of phase space lattice waves for weak ($\gamma/\omega_0 = -0.2$, left) and strong ($\gamma/\omega_0 = 100\sqrt{2}$, right) interaction strengths; (b) Topological phase diagram, showing the band Chern number as a function of interaction strength γ/ω_0 and on-site detuning Δ/ω_0 . (Reproduced following reference^[45]).

其涨落极易被放大进而引发系统动力学失稳. 为求解这一复杂的本征问题, 考虑具有周期性边界的相空间晶体, 可将系统转化为玻色子版本的 Bogoliubov-de Gennes (BdG) 哈密顿量^[41], 并通过玻色子玻戈留波夫 (Bogoliubov) 变换, 求得体系的本征频率 $\omega_{\mathbf{k},n}$ 与简正模式 $b_{\mathbf{k},n}$, 将原多体哈密顿量转换为对角化形式 $\mathcal{H}/\lambda = \sum_{\mathbf{k},n} \omega_{\mathbf{k},n} b_{\mathbf{k},n}^\dagger b_{\mathbf{k},n}$, 其中 $\mathbf{k} = (k_X, k_P)$ 是相空间的“倒易空间” (reciprocal space) 矢量.

4.2.1 拓扑体能带

由于跃迁系数中存在复相位 $\phi_{LL'}$, 哈密顿量 (21) 的能带在准粒子波函数 $|\mathbf{k}, n\rangle$ 中可能具备非平庸的拓扑结构. 与费米子拓扑能带不同, 要计算玻色子第 n 条能带中准粒子的贝里相位 Φ_n 与陈数 C_n , 必须基于更新后的正交归一化条件与贝里联络 $\mathbf{A}_n(\mathbf{k}) = i\langle \mathbf{k}, n | \Sigma_z \nabla_{\mathbf{k}} | \mathbf{k}, n \rangle$ ^[82], 即

$$\Phi_n = i \oint_{\text{BZ}} \langle S_{\mathbf{k}} | b_{\mathbf{k},n} \nabla_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k},n}^\dagger | S_{\mathbf{k}} \rangle \cdot d\mathbf{k} \equiv \oint_{\text{BZ}} \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{k} + \phi_n, \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{BZ}} (\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_n(\mathbf{k})) \cdot \hat{\mathbf{n}} \in \mathbb{Z}. \quad (23)$$

上式中的物理量 C_n 也被称为“辛陈数” (symplectic Chern number). 在该模型中不存在净几何相位 (合成磁场的总磁通量), 因此遍及所有粒子能带的陈数之和为零. 单个能带的陈数可能会在发生相变后改变, 但它们的总和保持不变, 因此可将 $C = |C_n|$ 定义为系统的陈数^[41].

图 4(b) 展示了相空间晶体的拓扑相图, 给出了陈数随相互作用强度 γ/ω_0 和格点失谐量 Δ/ω_0 变化的函数关系. 在格点失谐 $\Delta = 0$ 时, 广泛的吸引和排斥相互作用 ($-5 \lesssim \gamma/\omega_0 \lesssim 115$) 均使相空间晶体

处于 $C = 1$ 的拓扑态;但在中等相互作用强度区域 ($-20 \lesssim \gamma/\omega_0 \lesssim -5$), 陈数会变为 $C = 2$, 这在反常量子霍尔效应的标准 Haldane 模型^[81]中是不存在的. 在弱相互作用 $\gamma = 0$ 近邻, 能带边缘呈现锥形结构, 且能带间隙与 γ^2/ω_0 成正比. 然而, 拓扑相的稳定存在是有物理边界的. 对于过大的吸引相互作用 ($\gamma < \gamma_- \approx -20\omega_0$) 或排斥相互作用 ($\gamma > \gamma_c^+ \approx 115\omega_0$), 相空间晶体将变得不稳定, 如相图中灰色区域所示. 图 4(a) 的右图中展示了具有较强相互作用的体能带结构. 在存在玻色子配对相互作用的情况下, 准能量可以被视为产生一对 Bogoliubov 激发的能量代价. 当 K 和 K' 点处的能带结构的准能量趋于零时, 相空间晶体将失去稳定性, 从而在相空间中导致一种无序的类气体相^[41].

4.2.2 手征边缘态

这一小节将讨论条带状边界和圆盘状边界下的能带结构. 研究表明, 相空间晶体拓扑边缘态具有手征特性, 对边界上的缺陷具有鲁棒性, 并且在非局域时间反演变换下保持不变.

4.2.2.1 条带状边界 考虑在 X 方向具有周期性边界, 但在 P 方向具有开边界的系统. 通过在 X 方向上进行傅里叶变换, 图 5(a) 展示了所得的本征模式能带结构. 图 5(b) 展示了具有手征性拓扑边缘态和原子在稳定点附近的运动轨道, 位于正 (负) P 边界上的边缘态向左 (右) 传播, 且原子以不同的运动相位在椭圆轨道上运动. 单个边界上拓扑边缘态的数量由体-边对应关系决定, 即对于给定的两个带隙能量处, 其净手征边缘态数量之差等于这两个能量之间所有能带的陈数之和. 由于对于稳定的相空间晶体, 粒子能带无法与空穴能带接触, 零能量附近不存在拓扑边缘态, 因此能带的陈数就可以确定拓扑边缘态的数量^[83].

4.2.2.2 反常陈氏绝缘体 在实空间中, 陈氏绝缘体的“手性” (chiral) 传输态需要打破时间反演对称性, 包括量子霍尔效应和反常量子霍尔效应. 而拓扑绝缘体的“螺旋” (helical) 传输态则保持时间反演对称性, 如量子自旋霍尔效应. 相空间晶体的格波声子是无自旋的玻色子, 图 5(b) 中所展示的边缘态属于手性传输态, 然而相空间晶体哈密顿量 (19) 在时间反演对称操作下 $(X_i, P_i) \rightarrow (X_i, -P_i)$ 却保持不变. 这表明相空间晶体支持时间反演对称性的手性传输态存在, 可以看成是一种“反常陈氏绝缘体”. 在相空间中, 时间反演操作是非局域的变换, 上下边缘处的两个手性传输态是分开的, 因而可以互不影响传播.

4.2.2.3 圆盘状边界与实验实现 为了证明相空间晶体手性态的鲁棒性, 考虑如图 5(c) 所示边缘上有若干随机缺陷的圆盘状相空间晶体, 通过对角化哈密顿量 (20) 可求得能谱和本征态. 选取带隙中间的高斯波包作为初始态进行时间演化, 结果表明波包在传播过程中对边缘缺陷具有鲁棒性. 需要注意的是, 该模型在

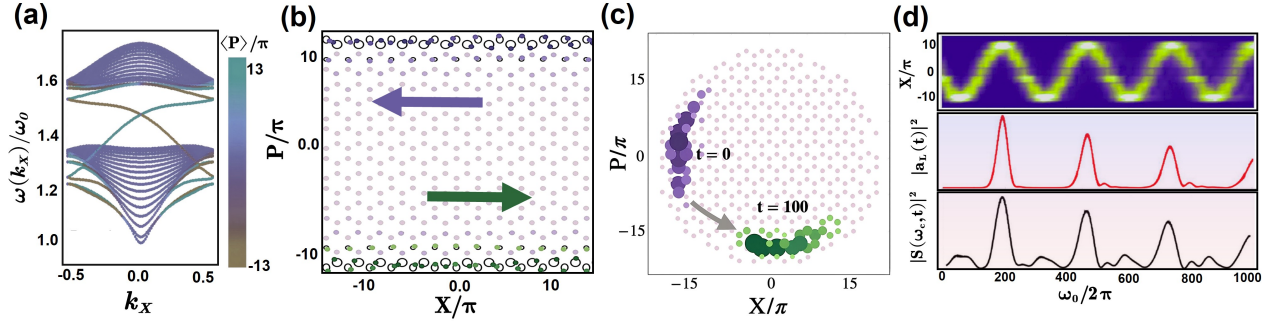


图 5: 相空间晶体拓扑边缘态. (a) 条形带状 (沿坐标方向周期边界, 动量方向有边界) 相空间晶体的能带结构; (b) 在动量上下边界传播方向相反的拓扑边缘态; (c) 边缘带有随机缺陷的圆盘状相空间晶体中不同演化时刻的两个波包; (d) 波包投影至实空间维度的时空图 (上)、单个原子的振动 (中) 以及所有原子的有限时窗功率谱 (下). (基于文献 [45] 的方法重新生成)

Fig. 5: Topological edge states of phase space crystals. (a) Band structure of a phase space crystal with strip-shaped boundaries; (b) Two topological edge states propagating on the P boundaries; (c) Two topological wave packets at different times in a disk-shaped phase space crystal with random edge defects; (d) Spacetime plot of the topological wave packet projected onto the X spatial dimension (top), vibration of a single atom (middle), and finite-window power spectrum of all atoms (bottom). (Reproduced following methods in reference [45]).

实空间中实际上是一个一维物理系统, 我们将传播的波包 $\Psi(X_i, P_i, t)$ 投影到空间维度上, 并定义平滑后的一维强度分布 $\rho(X, t) = \sum_{X_i \in \sigma} |\Psi(X_i, P_i, t)|^2$. 图 5(d) 的上方图表展示了 $\rho(X, t)$ 的时空图, 可以看出拓扑波包在传播过程中对缺陷具有鲁棒性. 在 5(d) 的中间图表绘制了圆盘边缘上某个固定原子 (图 5(c) 中的红圈) 的振动随时间的演化. 在实际实验中, 难以直接测量单个原子的振动, 可以通过附加的探测频闪晶格来检测原子的集体运动, 并测量有限时间窗口的功率谱 $S(\omega_c, t)$. 如图 5(d) 的下方图所示, 功率谱的峰值对应于拓扑波包的手征运动. 我们将在 4.4 节对超冷 ^{87}Rb 原子的具体实验参数进行了探讨.

4.3 相空间晶体的存在性

基于旋转波近似下的多体动力学方程, 可通过线性分析估计相空间晶体稳定存在的参数临界值 [84]. 考虑零温无相互作用的纯耗散情形, 耗散会导致晶格收缩旋转与边缘原子率先逃逸. 理论估算容纳 N 个原子的耗散速率要满足 $\kappa < \kappa_c \equiv 4|\Lambda|/\sqrt{2\pi N}$, 其中 Λ 代表无量纲驱动强度. 这表明系统原子总数越多, 对环境耗散的容忍度越低. 对于有限温度的热噪声效应, 长时极限下的热扩散宽度必须远小于原胞特征长度, 可以

推导出临界温度条件为 $T \ll \pi^2/8$. 最后, 对于相互作用效应, 考虑类库仑相互作用势 $U(R_{ij}) = \pi^{-1}\beta/R_{ij}$, 假设原子均匀分布于密度为 ρ 的圆盘区域内, 边缘原子的受力平衡给出了相空间晶体的存在条件:

$$\left(\frac{4\beta\rho}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \left[\frac{(4\Lambda)^2 Z_i^0 + 4(4\Lambda)\frac{\beta\rho}{\pi}}{(4\Lambda)^2 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} \right]^2 \leq (2\Lambda)^2. \quad (24)$$

式中 Z_i^0 为原始平衡点距原点的距离, 对于大尺寸晶格 ($|Z_i^0| \gg 1$). 通过适当地引入临界相互作用强度 $\beta_c \equiv \pi^3|\Lambda|$, 稳定性约束可简化为 $(\beta/\beta_c)^2 + (\kappa/\kappa_c)^2 \lesssim 1$. 此线性分析得出的条件可用于估计相变边界. 当该条件被破坏时, 边缘原子首先逃离稳定点, 导致晶体从边缘开始熔化, 过程见图 6 所示. 为了标识相空间晶体的存在, 定义如下晶体序参量:

$$C(k_X, k_P, t) \equiv \left| \frac{1}{N} \sum_j e^{ik_X X_j(t) + ik_P P_j(t)} \right|^2. \quad (25)$$

基于该序参量, 图 6 绘制了不同参数下的相图演化. 图 6(a)-(c) 展示了无耗散 ($\kappa = 0$) 且相互作用超临界 ($\beta = 1.5\beta_c$) 时完美晶体态的动力学演化: 初始周期的规则峰 (图 6(a)) 随时间推移因晶体从边缘熔化而显著减弱 (图 6(b)), 最终原子完全散布为无序类气态, 导致非平凡峰彻底消失 (图 6(c)). 计入有限耗散且保持零温时, 通过追踪特征弛豫时刻的序参量峰值, 图 6(d) 在参数空间中界定出了稳定的相空间晶体区域. 固定耗散下的序参量随相互作用强度 β 的突变则表明晶体熔化属于不连续相变 (图 6(e)), 且随原子数趋近热力学极限, 该相变点逐渐逼近理论预测的临界值 β_c . 此外, 计入热噪声影响的统计演化表明, 相空间晶体在高温下将完全瓦解, 且序参量的统计涨落 (标准差) 仅在晶体熔化的相变温度区间内出现显著增加 [84].

4.4 冷原子相空间晶体的实验参数

我们讨论在真实冷原子实验中, 实现经典相空间晶体的条件能否得到满足. 首先考察旋波近似条件, 即驱动强度 Λ 、耗散速率 κ 以及相互作用强度 β 在所取单位下应远小于 1 [1,33]. 恢复各参数的量纲后, 旋波近似条件为 $|\Lambda|, \beta/l_0 \ll \epsilon_0 = m\omega_0^2(l_0/2\pi)^2$ 且 $\kappa \ll \omega_0$. 对于冷 ^{87}Rb 原子, 选择驱动晶格势的特征长度为轴向囚禁长度 ω_{tr} 的 50 倍时, 驱动强度的旋波近似条件为 $|\Lambda| \ll \epsilon_0$. 在准一维势阱中, 有效的接触相互作用由 $V_{\text{ID}}(x) \approx 2\hbar\omega_{\text{tr}}a_0\delta(x)$ 给出 [55] (a_0 为三维 s 波散射长度), 由此可得相互作用强度的旋波近似条件为 $\beta/l_0 = 2\hbar\omega_{\text{tr}}a_0/l_0 \ll \epsilon_0$. 通过选取三维散射长度 a_0 , 相互作用强度满足旋波近似条件.

接下来估计相图的临界参数. 恢复量纲后的临界相互作用强度与临界耗散速率分别为 $\frac{\beta_c}{\epsilon_0 l_0} = \frac{\pi^3|\Lambda|}{\epsilon_0}$ 和 $\kappa_c = \frac{4|\Lambda|}{\sqrt{2\pi N}} \frac{\omega_0}{\epsilon_0}$. 采用驱动强度 $|\Lambda| = 0.01\epsilon_0$ 及原子数 $N = 225$, 可得临界值 $\beta_c \approx 0.31\epsilon_0 l_0$ 与 $\kappa_c \approx 0.0038\omega_0$. 实验中原子的耗散 (阻尼) 系数 κ/ω_0 可通过激光相对于原子频率的失谐进行调节, 并在共振处设 $\kappa = 0$ [85].

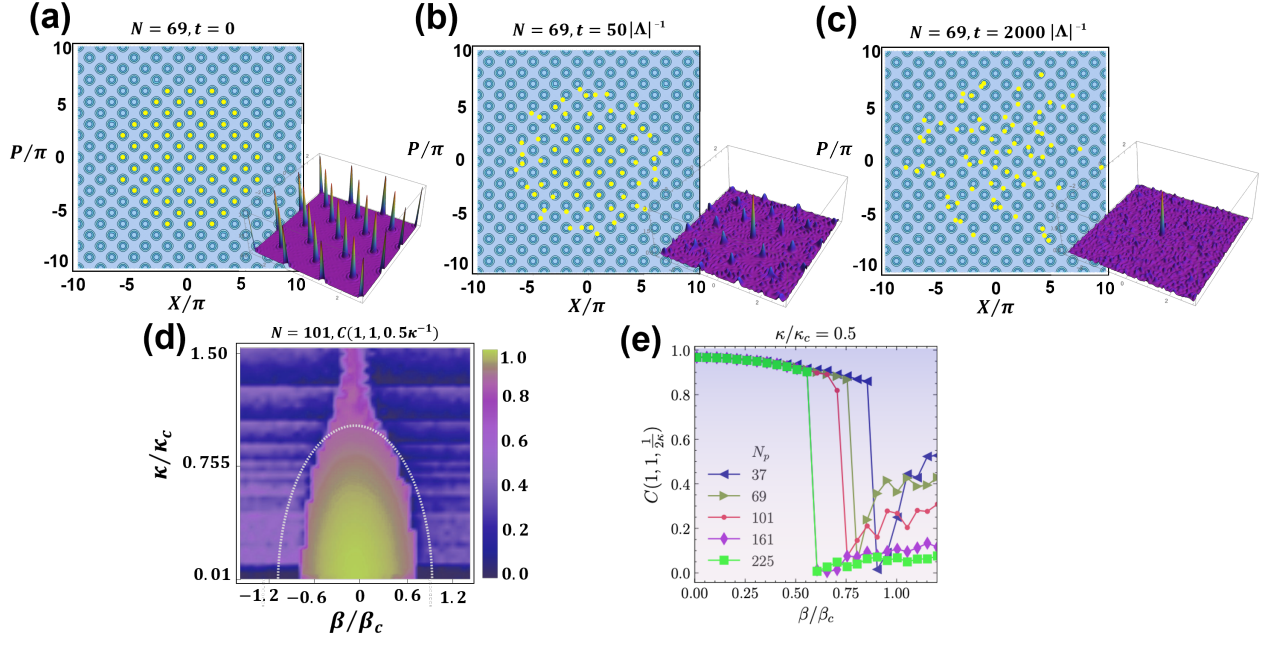


图 6: 晶体序参量与相图. [(a)-(c)] 当相互作用强度 $\beta = 1.5\beta_c$ 及 $\kappa = 0$ 时, 69 个冷原子在 $t = 0$ (a), $t = 50|\Lambda|^{-1}$ (b) 及 $t = 2000|\Lambda|^{-1}$ (c) 的相空间构型与晶体序参量在 (k_X, k_P) 空间分布 (右下); (d) 零温相图: 晶体序参量随 β/β_c 和 κ/κ_c 的变化; (e) 不同原子数对应的晶体序参量随相互作用强度的变化关系. (基于文献 [84] 重新生成)

Fig. 6: Crystal order parameter and phase diagram. [(a)-(c)] Atomic configurations in phase space and crystal order parameters in (k_X, k_P) space (bottom right) at time $t = 0$ (a), $t = 50|\Lambda|^{-1}$ (b), and $t = 2000|\Lambda|^{-1}$ (c) for interaction strength $\beta = 1.5\beta_c$ and $\kappa = 0$; (d) Phase diagram at $T = 0$, showing the crystal order parameter as a function of β/β_c and κ/κ_c ; (e) Crystal order parameter as a function of interaction strength for different atom numbers N . (Reproduced following reference [84]).

此外, 为获得稳定的相空间晶体, 必须满足相应的温度条件 $T \ll \frac{\pi^2 \epsilon_0}{8k_B} \approx 179 \text{ nK}$, 该温度完全处于冷原子实验中从纳开尔文到微开尔文的典型温区范围之内 [55].

进一步估计观测边缘态的物理限制. 假设纵向囚禁频率 $\omega_{\text{ax}} = 2\pi \times 50 \text{ Hz}$, 选取 $k^{-1} = 45 \mu\text{m}$ 可确保系统工作在半经典区域 ($\lambda = 0.04$). 实验中横向囚禁频率可达 $\omega_{\text{tr}} \approx 2\pi \times 1.0 \text{ MHz}$ [55], 为避免在碰撞过程中激发横向模式, 相空间晶体的半径存在物理限制 $R < k\sqrt{\hbar\omega_{\text{tr}}/(m\omega_{\text{ax}}^2)} \approx 9.2$. 通过选取 $\omega_0 = 0.1$ (以保证在旋转参考系中的振动足够缓慢), 波包沿圆盘边缘往返一圈的传播时间大约为 $100\pi/(\omega_0\omega_{\text{ax}}) \approx 20 \text{ s}$, 短于原子云的典型寿命 [86–88]. 考虑散射长度 $a_0 = 5.3 \text{ nm}$, 无量纲相互作用强度为 $\gamma = 2\hbar\omega_{\text{tr}}ak^3/(m\omega_{\text{ax}}^2) \approx 1.25$. 该相互作用强度还可以通过 Feshbach 共振或调节晶格波矢 k 作进一步微调.

5 相空间晶体与时间晶体

2012 年, Frank Wilczek 提出了时间晶体的物理构想 [89,90], 探讨了在一个封闭且与时间无关的量子力学系统中连续时间平移对称性发生自发破缺的可能性, 并理论构造了一个由具有接触吸引相互作用的粒子在穿有 Aharonov-Bohm 磁通圆环上组成的多体模型. 然而, 这一平衡态时间晶体的存在性被 Bruno [91,92] 以及 Watanabe 和 Oshikawa(WO) [93] 等人提出的 No-go 定理否定, 排除了在热力学平衡态或孤立系统基态中发生连续时间平移对称性自发破缺的可能性. 由于 No-go 定理的严格限制, 研究转向了远离平衡态的周期性驱动 (Floquet) 系统, 在此系统中离散时间平移对称性可以发生自发破缺, 从而形成了 Floquet 时间晶体 (或离散时间晶体) [27,42–44]. 目前, Floquet 时间晶体已在囚禁离子 [94]、金刚石氮-空位 (NV) 色心 [95]、核自旋 [96–98]、超流体以及超冷原子 [99] 等多种实验平台上得以实现.

时间晶体与相空间晶体是两个密切相关却又立足点各异的物理概念. 两者均关注周期性驱动系统中的次谐波响应模式, 但大多数关于时间晶体的研究集中于量子多体系统中离散时间平移对称性的自发破缺机制以及次谐波模式的稳定保护机理上. 作为对比, 相空间晶体则侧重于研究周期驱动体系中基本响应模式之间的相互作用. 根据是否考虑相互作用, 相空间晶体可分为单粒子相空间晶体与多体相空间晶体 [41,46]. 相空间晶体不必要求打破离散时间平移对称性, 对于单粒子系统而言, 相空间晶体态指的是哈密顿量或刘维尔算符在相空间中具有离散旋转或平移对称性的本征态 [9,103]; 多体相空间晶体则被定义为相空间内由相互作用维持的类固体晶态 [1,41,45]. 相空间的非互易几何效应 (辛几何结构) 能够赋予原子相空间振动声子模式之间具有内禀复相位, 使得相空间声子的手性输运可在不破坏物理时间反演对称性的条件下出现, 这与实空间中多数手性输运的情形截然不同 [45]. 当前, 探究两个或多个时间晶体之间相互作用的研究趋势

也日益凸显^[100], 并推动了“时间晶体中的凝聚态物理学”这一前沿领域的发展^[27,34,44,46].

相空间晶体与时间晶体在周期驱动体系中具有相似的晶体化机制^[27,46], 且相空间晶体的集体声子激发理论揭示了由原子间相互作用诱导的非平庸陈数与手性边缘态等集体振动能带结构。因此, 借助相空间晶体集体声子激发理论的研究思路, 将为探究时间晶体多体动力学系统中的集体相互作用提供理论思路。

6 总 结

本文系统地综述了相空间晶体这一动力学系统中的新型有序非平衡多体态^[1]. 我们从单粒子动力学出发, 探讨了周期性驱动在相空间中产生的有效晶格势场^[3-6]及其内禀的非对易几何效应^[29]. 在此基础上引入多体机制, 阐明了实空间短程碰撞向相空间类库仑长程相互作用的映射^[1,26,27,32-34], 为模拟强关联凝聚态现象提供了全新理论途径^[35-37]. 针对集体激发动力学, 研究表明相空间配对过程可使复杂晶格在不破坏物理时间反演对称性的前提下, 展现出支持手性边缘态的反常陈氏绝缘体相^[45]. 此外, 针对实际的开放环境, 本文通过定义晶体序参量及线性动力学分析, 明确了维持晶体稳定存在的耗散、相互作用及温度临界条件与相图, 验证了利用当前超冷原子实验平台^[7,8]制备相空间晶体的可行性^[41]. 最后, 本文简要回顾与对比了时间晶体发展脉络及二者异同。

实验上, 单粒子相空间晶体现象已经在超导电路实验上得到验证^[101,102]. 相空间晶体的概念已经被从封闭量子系统推广至开放耗散的量子系统, 发展出了“耗散相空间晶体”的概念和研究^[103]. 展望未来, 理论预言的相界条件为冷原子实验制备相空间晶体指明了具体方向: 实验上可将原子团初始化于驱动与相互作用低于临界值、但温度相对较高的状态中; 此时热噪声使原子散布于相空间, 随后在有限的环境耗散作用下, 原子将向附近的稳定吸引子弛豫, 进而自发形成相空间晶体^[1].

作为一种新颖的非平衡物态, 相空间晶体在概念上与时间晶体^[27,42-44]形成了补充与对比, 为探索不受时间平移对称性破缺限制的复杂动力学提供了更广阔的视角. 目前, 关于相空间晶体振动及拓扑特性的研究多局限于经典或半经典区域. 未来, 将该多体动力学框架全面拓展至量子区域, 探究其在量子极限下衍生的强关联拓扑物态, 将是探索远离平衡态量子多体物理的广阔且极具潜力的研究方向^[9,10].

本文讨论的任意类型的相空间晶格哈密顿量都可以通过恰当的离散形式的周期驱动场来产生, 结合由冷原子碰撞诱导的相空间相互作用, 为模拟凝聚态物理模型提供了新的研究思路^[41]. 实际上, 把“非对易傅立叶变换”(non-commutative Fourier transformation) 数学技术引入到弗洛凯工程 (Floquet engineering), 任意形式的相空间哈密顿量都可以由特定的周期驱动场产生并由最低阶的弗洛凯-马格努斯 (Floquet-

Magnus) 展开项给出^[104], 更高阶的弗洛凯-马格努斯误差可以通过引入额外的驱动项来消除^[105]. 基于此种方法, 学者们已经发展出了制备玻色码态的新方法^[106,107] 以及用于玻色码容错量子计算的新型“量子格子门” (quantum lattice gates)^[108].

参考文献

- [1] Liang P F, Marthaler M, Guo L Z 2018 *New J. Phys.* **20** 023043
- [2] Zheng Z G, Hu G 2016 *From Dynamics to Statistical Physics* (Vol. 48) (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [郑志刚, 胡岗 2016 从动力学到统计物理学 Vol.48 (北京: 北京大学出版社)]
- [3] Birkhoff G D 1913 *Trans. Am. Math. Soc.* **14** 14
- [4] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (Colloquium Publications Vol. 9) (New York: American Mathematical Society)
- [5] Birkhoff G D 1931 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **17** 656
- [6] Birkhoff G D 1932 *Bull. Am. Math. Soc.* **38** 361
- [7] Eckardt A 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 011004
- [8] Goldman N, Dalibard J 2014 *Phys. Rev. X* **4** 031027
- [9] Guo L Z, Marthaler M, Schön G 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 205303
- [10] Guo L Z, Marthaler M 2016 *New J. Phys.* **18** 023006
- [11] von Neumann J 1955 *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton: Princeton University Press)
- [12] Gabor D 1946 *J. Inst. Electr. Eng. III* **93** 429
- [13] Daubechies I 1990 *IEEE Trans. Inf. Theory* **36** 961
- [14] Zak J 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1385
- [15] Perelomov A M 1971 *Theor. Math. Phys.* **6** 156
- [16] Sullivan D J, Rehr J J, Wilkins J W, Wilson K G 2010 arXiv:1007.3522v1 [cond-mat.other]
- [17] Daubechies I, Jaffard S, Journé J L 1991 *SIAM J. Math. Anal.* **22** 554
- [18] Zak J 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** L369

- [19] Zak J 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** L553
- [20] Zaslavsky G M 2004 *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics* (Oxford: Oxford University Press)
- [21] Zhang Y X, Gosner J, Girvin S M, Ankerhold J, Dykman M I 2017 *Phys. Rev. A* **96** 052124
- [22] Landau L D, Lifshitz E M 1977 *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Course of Theoretical Physics Vol. 3, 3rd edn) (Oxford: Pergamon Press)
- [23] Sacha K, Delande D 2016 *Phys. Rev. A* **94** 023633
- [24] Delande D, Morales-Molina L, Sacha K 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 230404
- [25] Giergiel K, Sacha K 2017 *Phys. Rev. A* **95** 063402
- [26] Sacha K 2015 *Sci. Rep.* **5** 10787
- [27] Sacha K, Zakrzewski J 2018 *Rep. Prog. Phys.* **81** 016401
- [28] Bloch F 1929 *Z. Phys.* **52** 555
- [29] Zak J 1992 *EPL* **17** 443
- [30] Chen Z J, Pan X X, Hua Z Y, Wang W T, Ma Y W, Li M, Zou X B, Sun L Y, Zou C L 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 240305 (in Chinese) [陈子杰, 潘啸轩, 华子越, 王伟婷, 马雨玮, 李明, 邹旭波, 孙麓岩, 邹长铃 2022 物理学报 **71** 240305]
- [31] Gottesman D, Kitaev A, Preskill J 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012310
- [32] Sacha K 2015 *Phys. Rev. A* **91** 033617
- [33] Guo L Z, Liu M D, Marthaler M 2016 *Phys. Rev. A* **93** 053616
- [34] Giergiel K, Miroszewski A, Sacha K 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 140401
- [35] Mierzejewski M, Giergiel K, Sacha K 2017 *Phys. Rev. B* **96** 140201
- [36] Claeys P W, De Baerdemacker S, Araby O E, Caux J S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 080401
- [37] Ashida Y, Shi T, Schmidt R, Sadeghpour H R, Cirac J I, Demler E 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 183001
- [38] Lazarides A, Das A, Moessner R 2014 *Phys. Rev. E* **90** 012110
- [39] D'Alessio L, Rigol M 2014 *Phys. Rev. X* **4** 041048
- [40] Ponte P, Chandran A, Papić Z, Abanin D A 2015 *Ann. Phys.* **353** 196

- [41] Guo L Z 2021 *Phase Space Crystals: Condensed matter in dynamical systems* (Bristol: IOP Publishing)
- [42] Khemani V, Moessner R, Sondhi S L 2019 arXiv:1910.10745v1 [cond-mat.str-el]
- [43] Else D V, Monroe C, Nayak C, Yao N Y 2020 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **11** 467
- [44] Guo L Z, Liang P F 2020 *New J. Phys.* **22** 075003
- [45] Guo L Z, Peano V, Marquardt F 2022 *Phys. Rev. B* **105** 094301
- [46] Hannaford P, Sacha K 2022 *AAPPS Bull.* **32** 1
- [47] Peano V, Thorwart M 2006 *Chem. Phys.* **322** 135
- [48] Zaslavsky G M, Zakharov M Y, Sagdeev R Z, Usikov D A, Chernikov A A 1986 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **91** 500 (English translation: 1986 *Sov. Phys. JETP* **64** 294)
- [49] Berman G P, Rubaev V Y, Zaslavsky G M 1991 *Nonlinearity* **4** 543
- [50] Carvalho A R R, Buchleitner A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 204101
- [51] Pechal M, Berger S, Abdumalikov A A, Fink J M, Mlynek J A, Steffen L, Wallraff A, Filipp S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 170401
- [52] Hofstadter D R 1976 *Phys. Rev. B* **14** 2239
- [53] Zak J 1972 *Solid State Physics* (Vol. 27) (New York: Academic Press) pp1-62
- [54] Dana I 1995 *Phys. Rev. E* **52** 466
- [55] Bloch I, Dalibard J, Zwirger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [56] Wunsche A 1991 *Quantum Opt.* **3** 359
- [57] Giergiel K, Dauphin A, Lewenstein M, Zakrzewski J, Sacha K 2019 *New J. Phys.* **21** 052003
- [58] Kosior A, Sacha K 2018 *Phys. Rev. A* **97** 053621
- [59] Giergiel K, Kosior A, Hannaford P, Sacha K 2018 *Phys. Rev. A* **98** 013613
- [60] Giergiel K, Kuroś A, Sacha K 2019 *Phys. Rev. B* **99** 220303
- [61] Loss D, DiVincenzo D P 1998 *Phys. Rev. A* **57** 120
- [62] Schuch N, Siewert J 2003 *Phys. Rev. A* **67** 032301

- [63] Bojović P, Hilker T, Wang S, Obermeyer J, Barendregt M, Tell D, Chalopin T, Preiss P M, Bloch I, Franz T 2026 *Nature* **652** 602
- [64] Mermin N D, Wagner H 1966 *Phys. Rev. Lett.* **17** 1133
- [65] Hauke P, Tagliacozzo L 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 207202
- [66] Richerme P, Gong Z X, Lee A, Senko C, Smith J, Foss-Feig M, Michalakis S, Gorshkov A V, Monroe C 2014 *Nature* **511** 198
- [67] Gong Z X, Foss-Feig M, Michalakis S, Gorshkov A V 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 030602
- [68] Métivier D, Bachelard R, Kastner M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 210601
- [69] Foss-Feig M, Gong Z X, Clark C W, Gorshkov A V 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 157201
- [70] Maghrebi M F, Gong Z X, Foss-Feig M, Gorshkov A V 2016 *Phys. Rev. B* **93** 125128
- [71] Buyskikh A S, Fagotti M, Schachenmayer J, Essler F, Daley A J 2016 *Phys. Rev. A* **93** 053620
- [72] Dalla Torre E G, Berg E, Altman E 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 260401
- [73] Berg E, Dalla Torre E G, Giamarchi T, Altman E 2008 *Phys. Rev. B* **77** 245119
- [74] Endres M, Cheneau M, Fukuhara T, Weitenberg C, Schauß P, Gross C, Mazza L, Bañuls M C, Pollet L, Bloch I, Kuhr S 2011 *Science* **334** 200
- [75] Paredes B, Widera A, Murg V, Mandel O, Fölling S, Cirac I, Shlyapnikov G V, Hänsch T W, Bloch I 2004 *Nature* **429** 277
- [76] Hadzibabic Z, Stock S, Battelier B, Bretin V, Dalibard J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 180403
- [77] Moore F L, Robinson J C, Bharucha C F, Sundaram B, Raizen M G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4598
- [78] Chabé J, Lemarié G, Grémaud B, Delande D, Szriftgiser P, Garreau J C 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 255702
- [79] Manai I, Clément J F, Chicireanu R, Hainaut C, Garreau J C, Szriftgiser P, Delande D 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 240603
- [80] Lemos G B, Gomes R M, Walborn S P, Souto Ribeiro P H, Toscano F 2012 *Nat. Commun.* **3** 1211
- [81] Haldane F D M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015
- [82] Peano V, Houde M, Brendel C, Marquardt F, Clerk A A 2016 *Nat. Commun.* **7** 10779

- [83] Rudner M S, Lindner N H, Berg E, Levin M 2013 *Phys. Rev. X* **3** 031005
- [84] Kopaei A E, Sacha K, Guo L Z 2023 *Phys. Rev. B* **107** 214302
- [85] Metcalf H J, van der Straten P 2007 *Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms* (New York: John Wiley & Sons, Ltd)
- [86] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [87] Greif D G 2007 *Evaporative Cooling and Bose-Einstein Condensation of Rb-87 in a Moving-Coil TOP Trap Geometry* M.S. Thesis (Stony Brook: Stony Brook University)
- [88] Cornell E A, Wieman C E 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 875
- [89] Wilczek F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 160401
- [90] Shapere A, Wilczek F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 160402
- [91] Bruno P 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 118901
- [92] Kanamoto R, Saito H, Ueda M 2003 *Phys. Rev. A* **68** 043619
- [93] Watanabe H, Oshikawa M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 251603
- [94] Zhang J, Hess P W, Kyprianidis A, Becker P, Lee A, Smith J, Pagano G, Potirniche I D, Potter A C, Vishwanath A, Yao N Y, Monroe C 2017 *Nature* **543** 217
- [95] Choi J, Landig R, Kucsko G, Zhou H Y, Isoya J, Jelezko F, Onoda S, Sumiya H, Khemani V, von Keyserlingk C, Yao N Y, Demler E, Lukin M D 2017 *Nature* **543** 221
- [96] Rovny J, Blum R L, Barrett S E 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 180603
- [97] Rovny J, Blum R L, Barrett S E 2018 *Phys. Rev. B* **97** 184301
- [98] Pal S, Nishad N, Mahesh T S, Sreejith G J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 180602
- [99] Smits J, Liao L, Stoof H T C, van der Straten P 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 185301
- [100] Autti S, Heikkinen P J, Mäkinen J T, Volovik G E, Zavjalov V V, Eltsov V B 2021 *Nat. Mater.* **20** 171
- [101] Svensson I M, Bengtsson A, Krantz P, Bylander J, Shumeiko V, Delsing P 2017 *Phys. Rev. B* **96** 174503

- [102] Svensson I M, Bengtsson A, Bylander J, Shumeiko V, Delsing P 2018 *Appl. Phys. Lett.* **113** 022602
- [103] Lang B, Armour A D 2021 *New J. Phys.* **23** 033021
- [104] Guo L Z, Peano V 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 023602
- [105] Xu Y D, Guo L Z 2025 *Rep. Prog. Phys.* **88** 037602
- [106] Wu Z P, Guo L Z, Shi H B, Zhang W W 2025 arXiv:2510.22227 [quant-ph]
- [107] Huang T Y, Du L, Guo L Z 2026 *Phys. Rev. Lett.* **136** 120401
- [108] Guo L Z, Huang T Y, Du L 2025 *Commun. Phys.* **8** 414

录用稿件，非最终出版稿

Phase Space Crystals with Cold Atoms*

LUO Fan¹⁾ GUO Lingzhen^{2)†}

1) (*Center for Joint Quantum studies and Department of Physics, School of Science, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

2) (*College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*)

Abstract

Phase-space crystals (PSCs) represent a novel class of nonequilibrium ordered many-body states in which atoms form periodic structures in phase space under periodic driving. This review systematically introduces the theoretical framework of PSCs, the mechanisms of many-body interactions, and the topological dynamics of PSCs, with particular emphasis on their realization in ultracold atomic systems.

Any target Hamiltonian with an arbitrary lattice structure in phase space can, in principle, be synthesized by appropriately designing a time-periodic driving field. The eigenstates of the target Hamiltonian can be bosonic code states, such as Gottesman-Kitaev-Preskill (GKP) states. Thus, PSCs realized with cold atoms in optical lattices may provide a platform for fault-tolerant bosonic quantum computation.

From the perspective of stroboscopic dynamics, the effective interaction between two atoms can be obtained by averaging their interaction over one driving period. This mapping shows that the short-range contact interaction between cold atoms in real space can be transformed into a long-range, Coulomb-like interaction in phase space. Combined with the underlying lattice structure, this long-range interaction makes PSCs a promising platform for simulating strongly correlated many-body models relevant to condensed-matter physics, including the Bose-Hubbard and Heisenberg models, as well as many-body localization.

Unlike conventional crystals in real space, PSCs possess an intrinsically noncommutative geometry,

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12475025).

† Corresponding author. E-mail: guolingzhen26@nudt.edu.cn (Corresponding author)

analogous to that experienced by the magnetron motion of charged particles in a magnetic field. Consequently, the collective vibrational modes of PSCs, analogous to phonons in conventional crystals, can exhibit novel topological transport phenomena. In particular, these modes can support chiral edge states without explicitly breaking time-reversal symmetry, giving rise to an “anomalous Chern insulator” that differs from both conventional Chern insulators and topological insulators.

To assess the experimental feasibility of realizing PSCs with cold atoms, we analyze their stability in open environments subject to thermal noise. By introducing a crystal-order parameter and performing a linear stability analysis, we estimate critical thresholds for the dissipation rate, interaction strength, and temperature. The resulting stability conditions indicate that, although experimentally challenging, the realization of PSCs remains feasible with state-of-the-art ultracold-atom platforms.

Time crystals (TCs) and PSCs are closely related but distinct concepts. Both concern subharmonic modes that emerge in periodically driven systems. Unlike TCs, which require the spontaneous breaking of discrete time-translation symmetry (DTTS), PSCs do not necessarily require such DTTS breaking; instead, they focus on the many-body physics arising from interacting subharmonic modes. Extending this many-body framework into the fully quantum regime opens promising opportunities for exploring strongly correlated topological phases of matter. Together, TCs and PSCs provide complementary perspectives on nonequilibrium many-body physics in periodically driven systems.

Keywords: Phase space crystals, Floquet systems, Chern insulators, Time crystals