

强非局域非线性介质中玫瑰型光束的传输特性*

张孟^{1) #} 张少华^{1) #} 屈军^{1†)}

1) (安徽师范大学物理与电子信息学院, 光电材料科学与技术安徽省重点实验室, 安徽 芜湖 24100)

摘要

本文提出一种新型的玫瑰型光束, 基于非局域非线性薛定谔方程, 结合惠更斯-菲涅耳积分原理, 推导了玫瑰型光束在强非局域非线性介质 (SNNM) 中传输的解析表达式, 数值计算并分析了光束束宽、光强分布及临界功率的演化特性。结果表明, 在不同的光束参数调控下, 玫瑰型光束可演化为空间孤子或呼吸子结构, 且在传输过程中呈现出显著的强度分布反转特性, 其反转节点分布于特定空间位置。此外, 在源平面的角度调制项中引入旋转角, 可实现光强分布的同步旋转, 进而实现光束的定向控制。这种具有独特传输特性的新型玫瑰型光束在光束整形、光束操控及相关领域具有一定的应用潜力。

关键词: 强非局域非线性介质, 玫瑰型光束, 光束传输, 光孤子

PACS: 42.25.-p, 42.60.Jf, 42.65.Tg,

基金: 国家自然科学基金(批准号: 12474289, 12074005).

同等贡献作者.

† 通信作者.E-mail: qujun70@ahnu.edu.cn

第一作者.E-mail: 3046745334@qq.com

1 引言

非线性薛定谔方程 (NLSE) 是非线性科学中最基础的偏微分方程之一, 在表征复杂非线性物理系统的动力学行为方面发挥着核心作用。从数学角度来看, NLSE 属于一类非线性抛物型偏微分方程; 在光学领域, 它是分析非线性光场特性及相关动力学现象的基本理论框架^[1,2]。空间孤子因在传输过程中能够保持空间结构的稳定性, 自其被理论预测以来, 便成为非线性光学领域的核心研究课题, 并引起了广泛的研究兴趣^[3,4]。在非线性介质中, 光束的衍射效应和自诱导非线性效应可实现相互平衡, 进而实现光束的稳定传输^[5]。根据介质的响应特性, 非局域效应可划分为四种不同类型^[6]。其中, SNNM 因其能够抑制光束传输中的不稳定性而备受关注^[7]。强非局域效应不仅增强了光束的传输稳定性, 而且还诱导

出多种新颖的传输现象，例如亮/暗孤子^[8,9]、椭圆孤子^[10,11]、复变孤子^[12-14]和呼吸孤子^[15,16]等。强非局域非线性介质中的光场局域态并不仅限于传统的孤子家族。一类被称为“混沌子”的新型非线性激发态逐渐引起研究者的关注^[17,18]。混沌子是指那些在传输过程中保持局域波包结构，但其内部演化或整体动力学行为呈现出确定性混沌特征的特殊态。此外，非局域光束还展现出独特的动力学行为，包括自诱导模式转换^[19]、光场自重构^[20]和三维尺度变换^[21]。已有实验证实，向列相液晶^[22,23]、铅玻璃^[24]、原子蒸气^[25]等多种光学材料均具有显著的非局域非线性响应，这些特性为新型全光控制器的研发提供了重要的物理基础^[26,27]。

随着激光技术的快速发展，研究人员持续探索并开发具有不同调制特性的新型光束结构，其中含有余弦调制项的光束因其独特的传输动力学特性而备受关注。例如，Sun 等分析了强非局域非线性介质中椭圆正弦高斯交叉相位光束的演化规律，实现了阵列光束和空心光束结构之间的可控转换^[28]。Tong 等提出的指数余弦高斯涡旋光束，可高效实现光学粒子的操控与捕获，有效克服了传统光束固有的可控性局限^[29]。在数学领域，玫瑰曲线因其独特的花瓣状几何形态而得名，其光强分布呈现出花瓣状的旋转对称轮廓，这一特征由角余弦调制和径向分布函数的耦合作用产生，体现了极坐标系固有的三角几何特征。目前，对玫瑰型光束的研究，尤其是在非线性介质中的传输特性研究仍相对匮乏，其在非线性系统中实现光场调控的潜在价值尚未得到充分挖掘。

基于此，本文首次提出了玫瑰曲线调制光束（RCMBs）。通过引入径向和角调制参数进一步扩展理论框架，构建了径向-角复合玫瑰曲线光束（RACRBs）。推导得到了两种玫瑰型光束在 SNNM 中传输的解析解。结合数值模拟，研究了这类光束的传输特性，进而揭示了其独特的传输动力学。该理论框架不仅可扩展至各类玫瑰型光束的变形构型，还为其在光束控制和光学粒子操控等领域的潜在应用提供了坚实的理论基础。

2 解析表达式的推导

2.1 理论模型

光束在非局域非线性介质中的传输可用非线性薛定谔方程来描述^[3,30,31]。

$$2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Phi + 2k^2 \frac{\Delta n}{n_0} \Phi = 0, \quad (1)$$

Φ 是入射场的复振幅包络， $k=2\pi n_0/\lambda$ 是仅考虑线性折射率 n_0 的波数， λ 是真空

中的波长, z 为传输距离, $\Delta_{\perp}$ 是二维横向拉普拉斯算子, 表示横向平面上的衍射。

$$\Delta n = n_2 \iint R(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) |\Phi(\mathbf{r}', z)|^2 d^2 \mathbf{r}', \quad (2)$$

式(2)表示光束引起的折射率非线性扰动 ($\Delta n \ll n_0$), $\mathbf{r}=(x, y)$ 和 $\mathbf{r}'=(x', y')$ 表示横向坐标矢量。 n_2 是介质的非线性折射率, 其中 $n_2 > 0$ ($n_2 < 0$) 对应于聚焦(散焦)特性。 $R(\mathbf{r}) = \exp(-\mathbf{r}^2/2w_R^2)/2\pi w_R^2$ 是满足归一化条件的空间响应函数, 其特征长度

决定了介质的非局域性程度^[32]。当非局域响应消失时, 即 ($R(\mathbf{r}) \equiv 0$), 式(1)

简化为自由空间中的近轴波动方程。我们考虑具有强空间非局域性的非线性介质, 这意味着响应函数的特征宽度远大于光场的空间范围。在强非局域条件下, 光束束宽 w 远小于响应函数特征宽度 w_m (即 $w/w_m \ll 1$), 可将响应函数 $R(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 在 $\mathbf{r}'=0$ 处作泰勒展开并保留至二阶项。对于本文所选用的高斯型响应函数, 一阶导数项为零 ($R'(0)=0$), 令 $R_0=R(0)$, $\gamma=-R''(0)>0$, γ 表示与介质非局域响应相关的常数, 响应函数可近似为 $R(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \approx R_0 - \gamma(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2/2$ 。将其代入 NNLSE 的非线性项, 利用功率守恒 $P_0 = \int |\Phi|^2 d\mathbf{r}'$ 及中心对称条件 $\int \mathbf{r}' |\Phi|^2 d\mathbf{r}' = 0$, 并舍去高阶小量 $\gamma \int \mathbf{r}'^2 |\Phi|^2 d\mathbf{r}'/2$ (其贡献量级为 $O(w^2/w_m^2)$), 可得 $N(I) \approx R_0 P_0 - \gamma P_0 r^2/2$, 则式(1)可简化为式(3)

$$2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Phi - k^2 \gamma^2 P_0 r^2 \Phi + 2k^2 \frac{n_2 R_0 P_0}{n_0} \Phi = 0. \quad (3)$$

通过引入以下变量变换进行相位变换消去常数项, 得到 Snyder-Mitchell 线性模型^[28]。

$$\Phi(\mathbf{r}, z) = \psi(\mathbf{r}, z) \exp\left(ik \frac{n_2 R_0 P_0}{n_0} z\right), \quad (4)$$

Snyder-Mitchell 模型在柱坐标下表示为:

$$2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \gamma^2 P_0 r^2 \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (5)$$

在实际物理系统中, 响应函数通常复杂多样, 难以将其精确地表示为理想的对称结构。尽管如此, 强非局域非线性模型仍然能够有效地捕捉非局域系统的核心物理特性。当介质的非局域性足够强时, 系统的物理性质对响应函数的具体形式的依赖性将减弱^[33]。

2.2 玫瑰曲线调制光束 (RCMBs)

在柱坐标系中, RCMBs 在源平面处的复振幅初始分布为

$$\psi_1(r_0, \varphi_0, 0) = A_0 \cos(n\varphi_0) \exp\left(-\frac{r_0^2}{w_0^2}\right), \quad (6)$$

$A_0 = \sqrt{\frac{16nP_0}{w_0^2(4n\pi + \sin(4n\pi))}}$ 为归一化常数, w_0 为光束腰宽, n 为模式阶数。 $\cos(n\varphi_0)$

为角向调制项, 其决定了光束在极角方向的周期性分布, 以产生玫瑰图案, 玫瑰叶片数量为 $2n$ 。

在强非局域非线性极限下, 光束传输可基于矩阵光学和分数傅里叶变换求解^[34,35]。柱坐标系下, 在 SNNM 中传输的光束解析表达式可通过柯林斯积分公式来处理

$$\begin{aligned} \psi(r, \varphi, z) = & -\frac{ik}{2\pi z_p \sin(z/z_p)} \exp\left(\frac{ikr^2}{2z_p \tan(z/z_p)}\right) \exp(-ikz) \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \psi(r_0, \varphi_0, 0) \exp\left\{\frac{ikr_0^2}{2z_p \tan(z/z_p)} - \frac{ikrr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{z_p \sin(z/z_p)}\right\} r_0 dr_0 d\varphi_0. \end{aligned} \quad (7)$$

将式(6)代入(7)中, 利用下列积分公式^[36]

$$\int_0^{2\pi} \exp(-in\theta_1 + ikbr \cos(\theta_1 - \theta_2)) d\theta_1 = 2\pi \exp\left(in\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)\right) J_n(kbr), \quad (8)$$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x) J_\nu(\beta\sqrt{x}) dx = \frac{\beta}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \left[I_{\frac{1}{2}(\nu-1)}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) - I_{\frac{1}{2}(\nu+1)}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \right], \quad (9)$$

$J_n(\cdot)$ 为贝塞尔函数, $I_\nu(\cdot)$ 为第一类虚宗量贝塞尔函数, 经复杂积分可得 RCMBs 的传输表达式

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \varphi, z) = & -\frac{ikA_0M_2}{4z_p \sin(z/z_p)} \exp\left(\frac{ikr^2}{2z_p \tan(z/z_p)} - ikz\right) \\ & \times \left[(-i)^n \exp(in\varphi) + (i)^n \exp(-in\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} M = & \frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z_p \tan(z/z_p)}, \quad M_1 = \frac{\left(-kr/z_p \sin(z/z_p)\right)^2}{8M}, \\ M_2 = & -\frac{kr}{4z_p \sin(z/z_p)} \sqrt{\frac{\pi}{M^3}} \exp(-M_2) \left[I_{\frac{1}{2}(n-1)}(M_1) - I_{\frac{1}{2}(n+1)}(M_1) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

式(10)为传输至 z 处的解析表达式, $z_p = 1/\gamma\sqrt{P_0}$ 是特征长度, 与入射功率 P_0 以及材料常数 γ 有关, z/z_p 是归一化传输距离, 归一化传输距离和光束调制参数共

同调控了 RCMBs 在 SNNM 中的传输特性。随着传输距离 z/z_p 的增加, RCMBs 呈现出以 πz_p 为周期的周期性振荡, 为了方便后续讨论, 我们将高斯光束在 SNNM 中稳定传输时的初始入射功率定义为高斯光束临界功率 $P_{gc} = 1/z_R^2 \gamma^2$, $z_R = k w_0^2 / 2$ 为高斯光束的瑞利长度。基于式(10), 可进一步得到 RCMBs 的传输光强 $I(r, \varphi, z) = |\psi_1(r, \varphi, z)|^2$ 。

2.3 径向-角向复合玫瑰曲线光束 (RACRBs)

在 RCMBs 的基础上, 通过引入径向和角度调制参数, 可以进一步扩展到 RACRBs。光束可以形成更复杂的光场结构, 其光场的源平面分布为

$$\psi_2(r_0, \varphi_0, 0) = A_1 r_0^n \cos\left(m \frac{r_0^2}{w_0^2} + n \varphi_0\right) \exp\left(-\frac{r_0^2}{w_0^2}\right), \quad (12)$$

$A_1 = \sqrt{\frac{16(1+m^2)nP_0}{w_0^2(-m+4(1+m^2)n\pi+m\cos(4n\pi)+\sin(4n\pi))}}$ 为归一化常数, r_0^n 为径向振幅

调制项, 决定了光强在中心处是否为零。 $\cos\left(m \frac{r_0^2}{w_0^2} + n \varphi_0\right)$ 结合了角向调制和径向

调制, 构造出旋转玫瑰的图像, m 为角向调制参数, 玫瑰的花瓣数量与 n 有关。

将式(12)代入(7)中, 并借助下面的积分公式^[36]

$$\int_0^{+\infty} x^{j+\frac{1}{2}-v} \exp(-\alpha x) J_v(2\beta\sqrt{x}) dx = j! \beta^v \exp\left(-\frac{\beta^2}{\alpha}\right) \alpha^{-j-v-1} L_j^v\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right), \quad (13)$$

$L_j^v(\bullet)$ 为广义拉盖尔多项式, 经过积分计算之后, 可获得 RACRBs 在 SNNM 中传输的解析表达式

$$\psi_2(r, \varphi, z) = -\frac{ikA_1}{4z_p \sin(z/z_p)} \exp\left(\frac{ikr^2}{2z_p \tan(z/z_p)} - ikz\right) (N_2)^n \times \left[\begin{aligned} &(-i)^n \exp(in\varphi) \exp\left(-\frac{(N_2)^2}{N}\right) N^{-n-1} \\ &+ (i)^n \exp(-in\varphi) \exp\left(-\frac{(N_2)^2}{N_1}\right) N_1^{-n-1} \end{aligned} \right]. \quad (14)$$

其中,

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z_p \tan(z/z_p)} - \frac{im}{w_0^2}, \\
N_1 &= \frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z_p \tan(z/z_p)} + \frac{im}{w_0^2}, \\
N_2 &= -\frac{kr}{2z_p \sin(z/z_p)}.
\end{aligned} \tag{15}$$

在传输过程中玫瑰型光束会发生能量重新分布，导致光束宽度发生变化。为了更好地描述 RCMBs 与 RACRBs 的束宽演化特性，利用二阶矩统计束宽来表征光束束宽的变化规律

$$W^2(z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |E(r, \varphi, z)|^2 r^3 dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |E(r, \varphi, z)|^2 r dr d\varphi}. \tag{16}$$

如果选择合适的初始入射功率，介质的非线性自聚焦可以平衡衍射引起的光束展宽，从而在孤子状态下保持恒定的束宽，此时对应的功率称作临界功率。当初始入射功率高于或低于临界功率时，束宽会出现周期性波动，对应于呼吸态传输。

3 解析解特性分析

图 1 (a)为 RCMBs 的初始光强分布，其空间形态严格遵循数学领域中“玫瑰曲线”的分布规律，通过选取不同的模式阶数 n （正整数或半整数），可生成花瓣数量、对称性不同的玫瑰状光强图像（例如 $n=1.5$ 时呈 3 瓣分布， $n=2$ 时呈 4 瓣分布）。这类光束的光强仅由角向周期性调制决定，因此花瓣边缘平滑且围绕中心轴呈对称分布，无旋转偏移特征。图 1(b)呈现的是不同光束参数 (m, n) 组合下 RACRBs 的初始光强分布。与 RCMBs 相比，RACRBs 的核心差异在于引入了径向二次相位调制，不同于 RCMBs 的纯角向依赖，径向调制使光场的相位随径向距离变化，进而导致生成的玫瑰状光强图像出现明显的旋转趋势，旋转角度与参数 m 的取值相关， m 越大，旋转效应越显著。此外，模式阶数 n 仍决定花瓣的数量，径向调制的引入使 RACRBs 可实现“花瓣数量固定、旋转角度可调”的灵活调控。当 RACRBs 的角向调制消失时，其光强分布会表现为图 1(c)所示的形态，该形态与拉盖尔高斯光束的光强分布高度相似，表现为中心亮斑与环形亮区交替的同心圆结构。图 1(d1)和图 1(d2)中展示了 RACRBs 的初始束宽随参数 m 和 n 的变化。

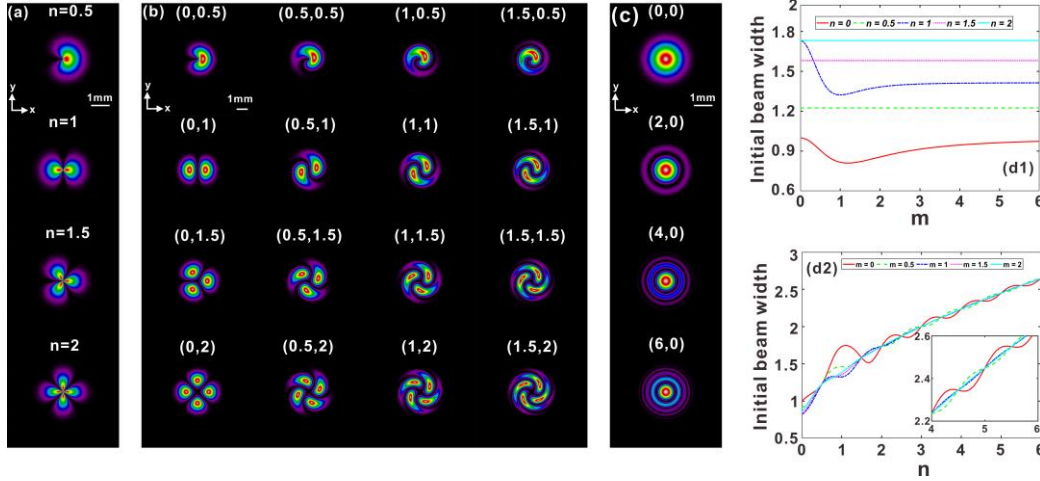


图 1 (a): 不同模式阶数 n 下 RCMBs 的光强分布; (b)和(c): 不同光束参数 (m,n) 组合下 RACRBs 的光强分布; (d1)和(d2): RACRBs 的束宽分别随参数 m 和 n 的变化。

Fig. 1. (a) Intensity distribution of the RCMBs for different mode orders n . (b) and (c) Intensity distribution of the RACRBs for different combinations of beam parameters (m,n) . (d1) and (d2) Variation of the beam width of the RACRBs at the source plane as a function of modulation parameters m and n .

下面分析玫瑰型光束光强模式在传输过程中的演化规律，该规律可通过 RCMBs 与 RACRBs 的传输特性直观呈现，如图 2（RCMBs）与图 3（参数条件 $(0,n)$ 和参数条件 $(m,0)$ 的 RACRBs）所示。从图 2 可见，RCMBs 的光强模式在传输过程中，光束的花瓣形态、亮区分布会随传输距离动态变化，但经过一个传输周期 $Z=\pi$ 后，光强分布会完全恢复至初始状态，形成“变化-复原”的周期性循环。这种对称演化源于 RCMBs 无额外径向相位调制，光场能量仅沿角向均匀重新分配。图 2 (c)展示了 RCMBs 轴上光强的传输变化曲线，RCMBs 传输过程中轴上光强恒为 0，且不随传输距离改变，这一点也可由图 2(b)中的 X-Z 平面的光强分布图验证。对于 RACRBs，其传输演化因参数 (m,n) 的不同呈现出更丰富的特性。当参数取 $(0,2)$ 时，光束的光强分布在整个传输过程中保持恒定，不再随传输距离发生形态变化，形成光强不变的空间光孤子，这是由于此时介质非线性效应与衍射效应达到精确平衡，抵消了光场的扩散趋势，使光束实现无畸变传输，在 RACRBs 条件下，当 $m=0$ 时， n 取任何值均遵循这种传输规律。当参数取 $(6,0)$ 时，RACRBs 的传输演化呈现出的能量扩散特性，在初始位置，光束中心为高斯型亮斑，外围环绕多个同心环形亮区，能量主要集中在中心区域。随着传输距离增加，中心亮斑的能量逐渐向外围环形区域扩散，使外围圆环亮度增强，但始终保持多环形的整体结构，当传输至周期中点时，光束中心不再是亮斑，而是形成一个明

显的光强凹点 (如图 3(b3)所示), 这一凹点是能量扩散至极值的标志。同样, 在 RACRBs 条件下, 当 $n=0$ 时, m 取任何值均遵循这种传输规律。

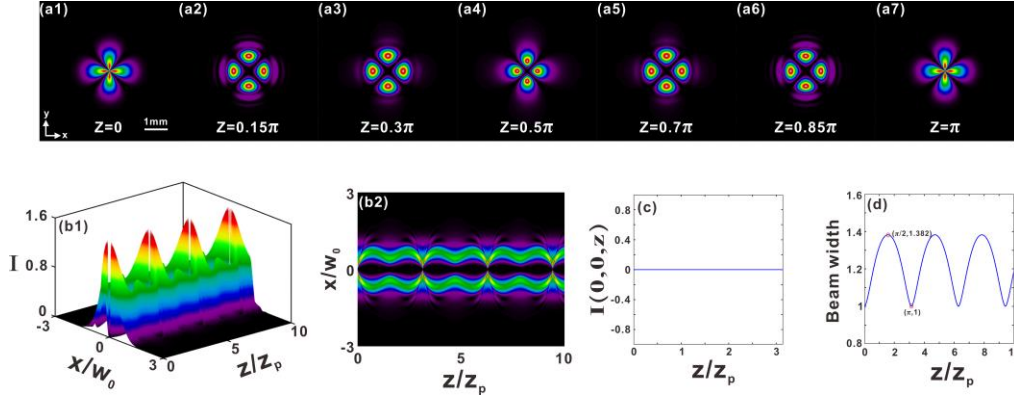


图 2 不同传输距离对应的 RCMBs 的光强模式。参数设置为: $n=2, P_0=10P_{gc}, w_0=1\text{mm}$ 。

Fig. 2. Intensity distribution of the RCMBs at different transmission lengths. Parameter settings: $n=2, P_0=10P_{gc}$

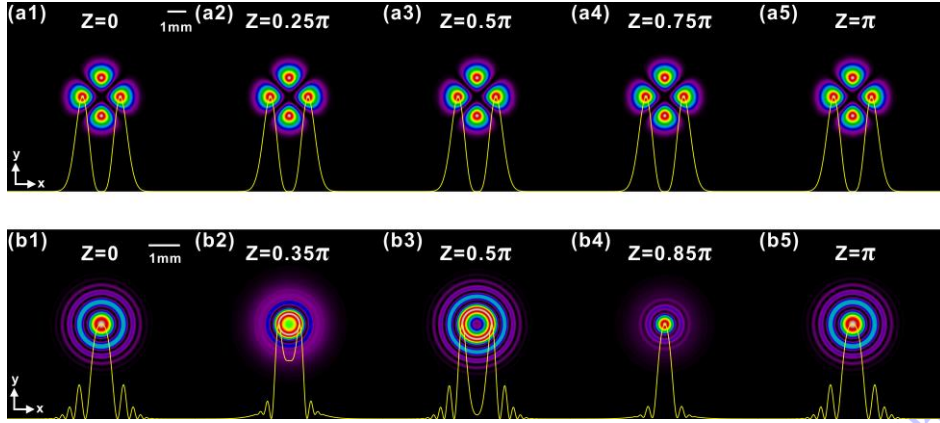


图 3 不同光束参数 (m,n) 条件下 RACRBs 的传输特性。(a): 对应参数 $(m,n)=(0,2)$, $P_0=P_c, w_0=1\text{mm}$; (b): 对应参数 $(m,n)=(6,0)$, $P_0=P_c, w_0=1\text{mm}$ 。

Fig. 3. Propagation characteristics of RACRBs for different beam parameter combinations (m,n) . (a) For parameters $(m,n)=(0,2)$, $P_0=P_c$; (b) For parameters $(m,n)=(6,0)$, $P_0=P_c$.

图 4 为 RACRBs 在参数 m 和 n 均不为 0 时的传输特性, 这类参数组合下, 光束同时具备角向调制与径向调制, 其传输行为较 $(m=0)$ 或 $(n=0)$ 的特殊情况更复杂, 也更具研究价值。本章以光束参数 $(m,n)=(2,1.5)$ 为例展开讨论, 从图中可见, 当 $P_0=P_c$ 时, 光束呈现出独特的“光强分布反转”现象。在传输起点 $Z=0$ 处, 光束光强呈现环形花瓣形态 [图 4 (b1)], 随着传输距离增加, 光强模式逐步旋转并重构; $Z=0.5\pi$ 时, 光强分布完全反转, 形成与初始形态镜像对称的结构 [图 4 (b5)]; $Z=0.25\pi$ 处, 光束恰好处于反转过渡状态, 我们将这一特殊传输位置定义为“反转中心”。对比不同初始功率条件 $P_0=0.5P_c$ 、 $P_0=P_c$ 、 $P_0=2P_c$ 的传输规律可发现, 光强分布反转这一核心现象并未因功率变化消失, 但反转中心的空间位置会随初始功率的改变发生显著偏移。当 $P_0=0.5P_c$ 时, 反转中心前移至 $Z=0.2\pi$ 处, 意味着

光强模式更早进入反转阶段； $P_0=2P_c$ 时，反转中心后移至 $Z=0.3\pi$ 处，光强模式的反转进程明显延迟。光束束宽的演化规律也与初始功率紧密相关，在 $P_0=0.5P_c$ 时，束宽随传输距离呈现周期性展宽；在 $P_0=2P_c$ 时，束宽则表现为周期性压缩；在 $P_0=P_c$ 时，束宽保持稳定，无明显展宽或压缩，这与临界功率下“非线性效应与衍射效应精确平衡”的物理本质一致。对于玫瑰型光束而言，其在 SNNM 中传输时，并非以刚体形式整体平移或保持形状不变，而是伴随着光束内部能量的持续重分布。

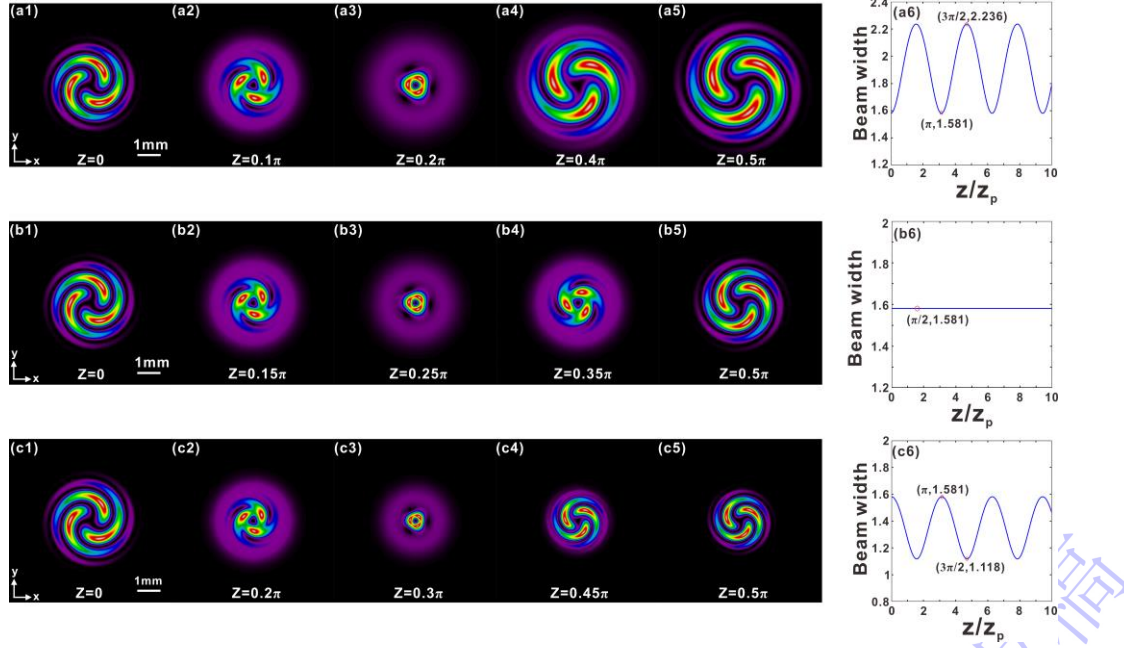


图 4 RACRBs 在光束参数(2,1.5)下的模式变化及其束宽变化。(a): $P_0=0.5P_c$; (b): $P_0=P_c$; (c): $P_0=2P_c$ 。

Fig. 4. Mode and beam width variations of the RACRBs for beam parameters $(m,n)=(2,1.5)$. (a) $P_0=0.5P_c$; (b) $P_0=P_c$; (c) $P_0=2P_c$.

图 5 展示了不同光束参数 (m,n) 时 RACRBs 反转中心的光强分布特征，从光强分布的参数依赖性来看，角向调制参数 n 的变化对反转中心的光强形态影响最为直接：随着 n 的增大，反转中心光强分布中的“能量汇聚点”数量会同步增加，且汇聚点数量与 n 的定量关系，与玫瑰光束花瓣数量和 n 的关系完全一致，这一对应性表明，反转中心的能量汇聚本质上是玫瑰光束角向调制在反转中心的体现。径向调制参数 m 的增大则会改变反转中心光强分布的整体结构：当 m 较小时，反转中心主要以“离散汇聚点+弱环形背景”为主；随着 m 逐步增大，径向调制的作用增强，使光强分布逐渐形成“内层多边形+外层圆环”的双层结构，其中内层多边形的边数为 $2n$ ，外层则是能量均匀分布的环形亮区，这种结构分化是径向调制与角向调制共同作用的结果，也进一步体现了 RACRBs 参数调控的灵活

性。为探究旋转自由度对反转中心的影响，我们在初始传输面的调制项 $\cos(\bullet)$ 中引入旋转角度，构建 $\cos(\bullet + j\pi)$ 的调制形式（ j 为旋转系数）。研究发现，调整旋转角度的取值时，反转中心的整体光强分布会围绕光束中心轴同步旋转（如图 5 (c) 所示），旋转角度与调制项中的 $(j\pi)$ 呈线性关联，且旋转过程中汇聚点数量、内层结构均保持不变，只有空间方位发生偏移，这一特性为实现反转中心的定向调控提供了可行路径。此外，我们还对反转中心的相位分布展开研究，图 5 (d) 为与图 5 (b)（参数(2,1.5)）对应的相位分布，反转中心的相位呈现典型的“涡旋光束相位特征”，在相位分布图中也存在与光强汇聚点位置对应的“相位汇聚点”（如图 5 (d5) 中标记的 P 点），这些相位汇聚点处的相位梯度最大，是能量在光强分布中形成汇聚的原因。

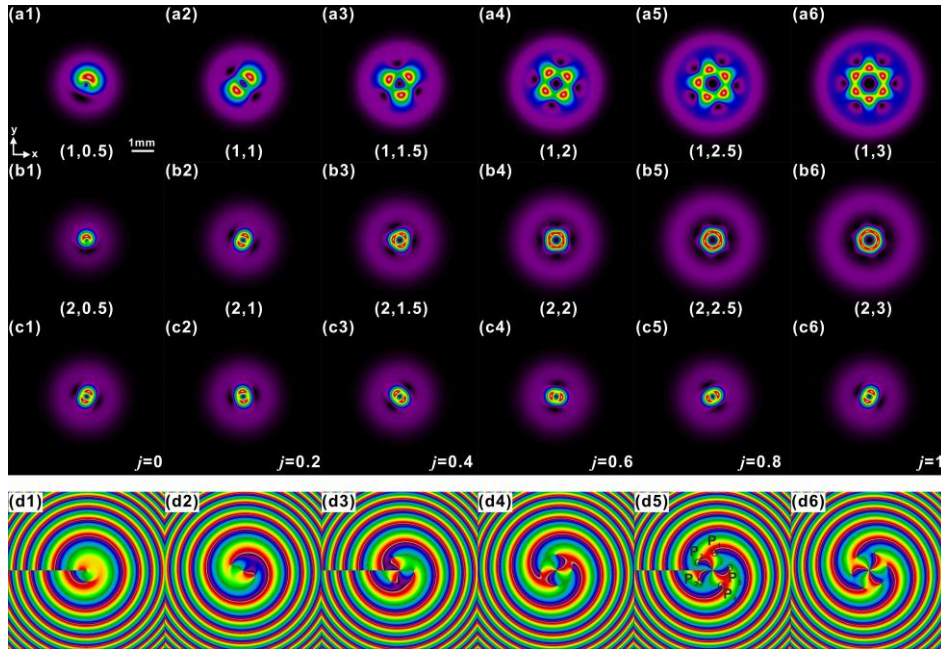


图 5. (a)和(b)为不同光束参数条件下对称点的光强分布。(c)为引入旋转角度后光束的光强变化图。(d)为与图(b)参数对应的相位分布图。

Fig. 5 (a) and (b) Intensity distribution of the inversion node of the RACRBs for different beam parameters (m,n) . (c) Intensity variation of the beam after introducing the rotation angle. (d) Phase distribution corresponding to panel (b).

4 数值模拟

为便于数值模拟，我们分析笛卡尔坐标系下强非局域数学模型，首先引入无

量纲坐标变换 $x' = \frac{x}{w_0}, y' = \frac{y}{w_0}, z' = \frac{z}{2kw_0^2}$ ，代入原方程，可得笛卡尔坐标系下的无量

纲化形式：

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{2} \eta (x^2 + y^2) \psi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = 0, \quad (17)$$

其中 $\eta = 2k^3 w_0^4 \gamma^2 P_0$ ，采用分步傅里叶算法求解上述方程，将方程中的算子分解为线性传播项与势场项两部分

$$\begin{aligned} \hat{T} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\ \hat{V} &= \frac{1}{2} \eta (x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (18)$$

其在 z 方向上传输一个小步长 Δz 的形式解为 $\psi(z + \Delta z) = \exp(-i(\hat{T} + \hat{V})\Delta z) \psi(z)$ ，在

频域中， $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 写为 $k_x^2 + k_y^2$ ，因此线性传播算子可写为

$\exp(-i\hat{T}\Delta z/2) = \exp(-i(k_x^2 + k_y^2)\Delta z/4)$ ，在实际计算中，通过快速傅里叶变换（FFT）

将场从空间域变换到频域，完成线性传播。势场项对应于实空间中的相位调制

$\exp(-i\hat{V}\Delta z) = \exp\left(-i\frac{\eta}{2}(x^2 + y^2)\Delta z\right)$ ，该项直接在空间域进行点乘实现。完整的传输

表达式为

$$\psi(x, y, z + \Delta z) = \mathcal{F}^{-1} \left[\begin{array}{c} \exp(-i(k_x^2 + k_y^2)\Delta z/4) \\ \mathcal{F} \left(\exp\left(-i\frac{\eta}{2}(x^2 + y^2)\Delta z\right) \right) \\ \mathcal{F}^{-1} \left(\exp(-i(k_x^2 + k_y^2)\Delta z/4) \right) \\ \mathcal{F} \{ \psi(x, y, z) \} \end{array} \right] \quad (19)$$

$\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 分别表示傅里叶变换及其逆变换。上述数值模拟以笛卡尔坐标系下的方程为示例展开，若要开展柱坐标系下光束传输的数值模拟，无需调整模拟的核心逻辑，仅需对源平面光场表达式进行相应的坐标变换即可实现。

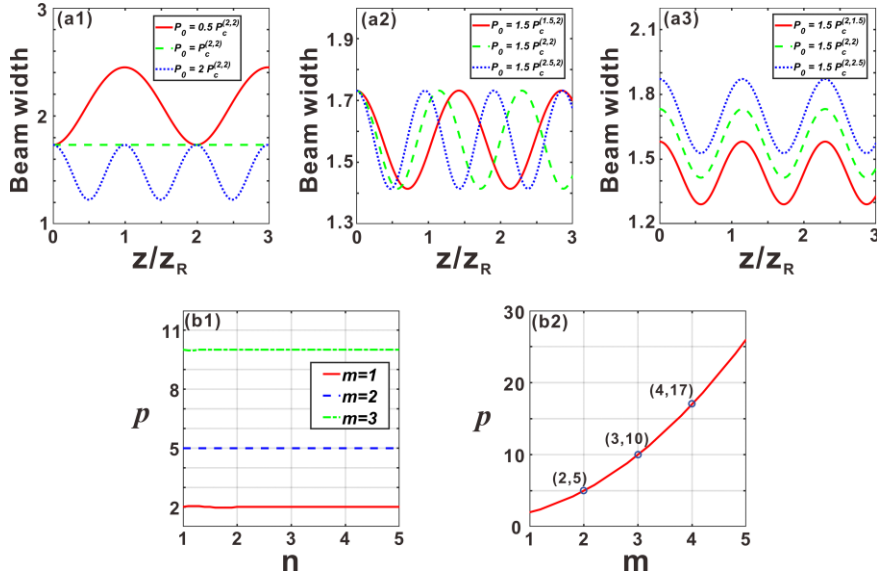


图 6 (a1) 不同初始功率条件下光束宽度的演化；(a2)和(a3) 分别展示了在固定功率比条件下, 光束宽度随光束参数 m 与 n 的变化关系；(b1) 不同光束参数 m 下, 临界功率随参数 n 的变化曲线；(b2) 在 $n=2$ 条件下, 临界功率随光束参数 m 的变化。

Fig. 6 (a1) Evolution of beam width at various initial power levels. (a2) and (a3) illustrate the relationship between beam width and beam parameters m and n , respectively, at a fixed power ratio. (b1) Variation of critical power as a function of parameter n for different values of m . (b2) Dependence of critical power on parameter m when $n=2$.

图 6 研究了不同初始入射功率下, RACRBs 在传输过程中的束宽变化规律。结果表明: 当初始入射功率不等于临界功率时, 束宽呈现显著的周期性演化特征, 且初始入射功率越大, 演化周期越短; 依据束宽演化周期的理论表达式 $\Delta z = \pi z_R \sqrt{P_{gc}/P_0}$ [37], $P_0 = 0.5 P_c$ 时的演化周期为 $P_0 = 2 P_c$ 时的两倍。当 $P_0 = P_c$ 时, 束宽在整个传输过程中保持恒定, 光束处于稳定传输状态 (如图 6(a1) 所示)。当 $P_0 = 1.5 P_c$ 时: 若光束参数 n 固定, 随参数 m 增大, 束宽演化周期减小 (见图 5.6(a2)); 若参数 m 固定, 随参数 n 增大, 束宽演化周期无明显变化, 但初始束宽的差异会导致演化过程不同。图 6(b1)、(b2) 给出了 SNNM 中 RACRBs 临界功率的计算结果, 其中 $p = P_c/P_{gc}$, 当光束参数 m 固定时, 临界功率不随参数 n 变化; 当光束参数 n 固定时, 光束临界功率会随着光束参数 m 的增加而增大, 功率的变化直接决定了束宽的演化特性。

图 7 直观呈现了 X-Z 平面光强分布的变化特征。当 $P_0 = P_c$ 时, RACRBs 可形成光孤子 (如图 7(a2)、(b2) 所示), 此时光强反转节点呈均匀分布, 直观印证了图 4 中光强反转节点的变化规律; 当 $P_0 \neq P_c$ 时, RACRBs 会形成展宽或压缩形态的呼吸子 (如图 7(a1)、(a3)), 且光强反转节点会随功率变化提前或延后出现 (如图 7(b1)、(b3))。上述不同功率条件下束宽随传输距离的演化分别由图 7(c) 和图 7(d) 给出。为了验证 RACRBs 在强非局域介质中的传输稳定性, 基于 NNLSE

进行了相应的数值模拟^[38]。在非局域响应函数中，将响应宽度设置为 RACRBs 宽度的十倍，通过对比数值模拟的光强演化图像与解析解的光强演化图像(图 8(a)与(b), 图 8(c)与(d))，可知数值模拟结果与解析结果吻合良好。

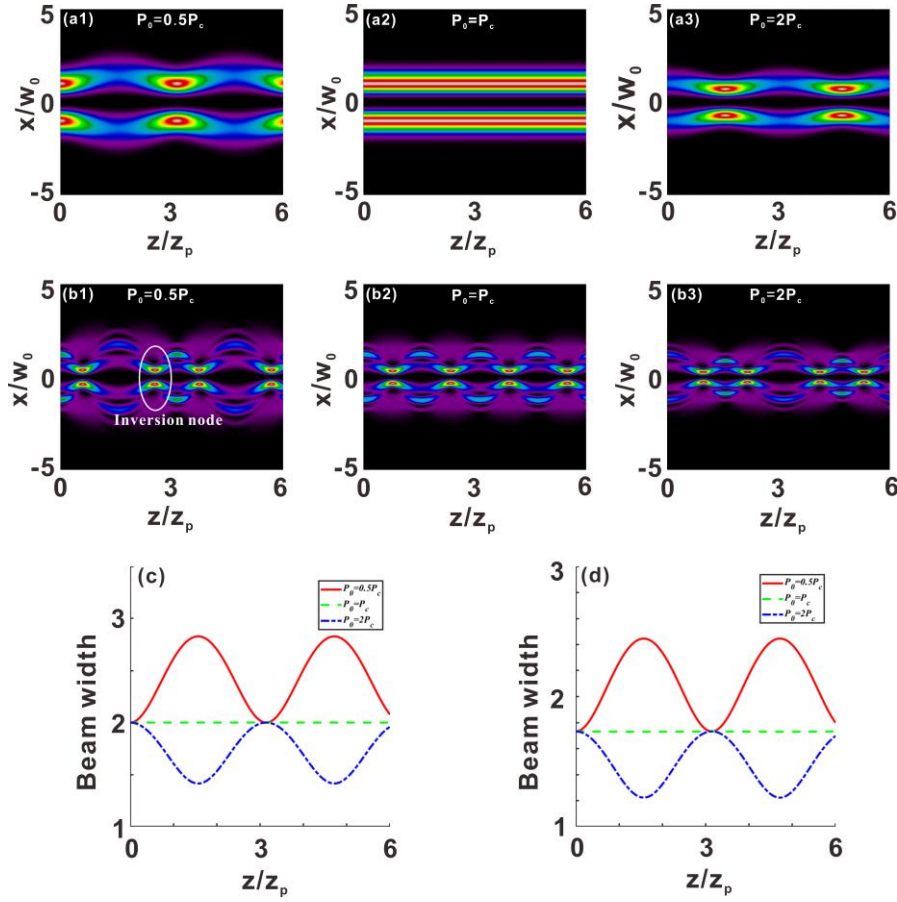


图 7 (a) 光束参数为(0,3)时，RACRBs 在 X-Z 平面上的光强分布；(b) 光束参数为 (2,2)时，RACRBs 在 X-Z 平面上的光强分布。(c)和(d) 不同功率条件下束宽的演化，图(c)和图(d) 分别对应图(a)和图(b)

Fig. 7 (a) Intensity distribution of RACRBs in the X-Z plane for the beam parameters (0, 3); (b) intensity distribution of RACRBs in the X-Z plane for the beam parameters (2, 2); (c) and (d) beam width evolution under different power conditions, corresponding to the cases shown in (a) and (b), respectively.

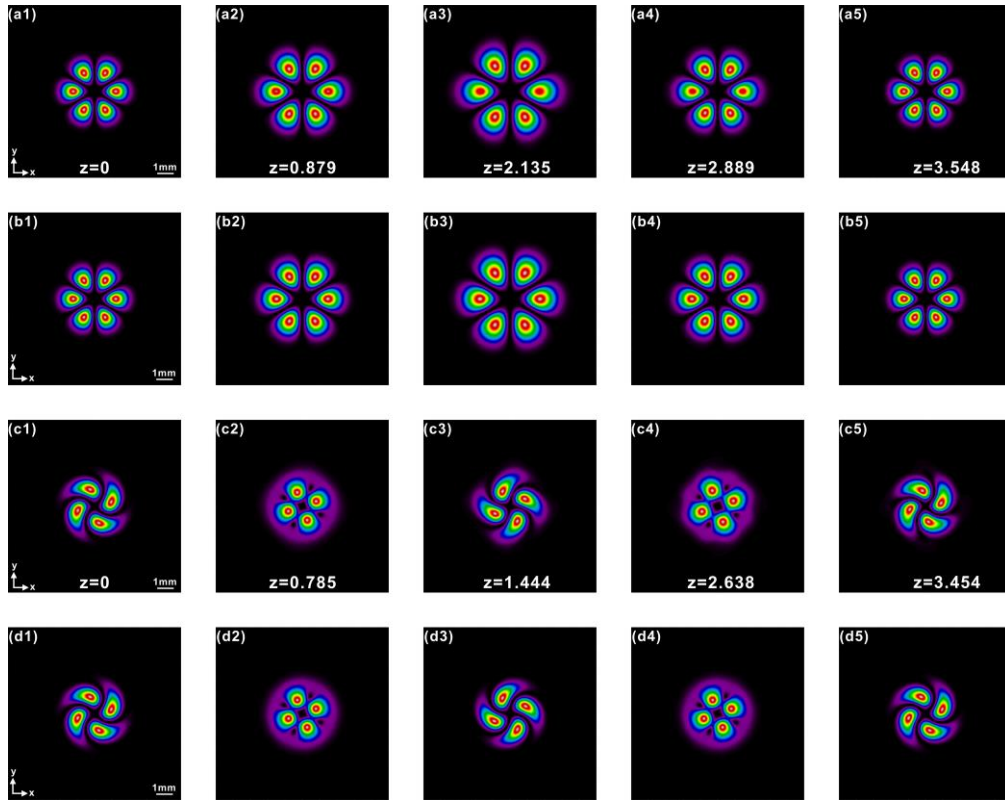


图 8 基于 NNLSE 的数值模拟的演化图像与解析解的演化图像。(a)和(b) 分别为数值模拟与解析解，参数为 $m=0$, $n=3$, $P_0=0.5P_c$; (c)和(d) 分别为数值模拟与解析解，参数为 $m=0.5$, $n=2$, $P_0=P_c$

Fig. 8 Evolution images obtained from numerical simulations based on the NNLSE and those derived from analytical solutions. (a) and (b) present the numerical simulation and analytical solution, respectively, for parameters $m=0$, $n=3$, $P_0=0.5P_c$; (c) and (d) present the numerical simulation and analytical solution, respectively, for parameters $m=0.5$, $n=2$, $P_0=P_c$.

5 结 论

本文分析了 RCMBs 和 RACRBs 在 SNNM 中的传输规律与结构演化特性。研究表明：通过调控光束参数，可有效改变源平面光强分布，进而实现多样化的传输行为；当 RACRBs 的参数条件为 $(0,n)$ 时，可形成花瓣数量可调的空间光孤子；当 RACRBs 的参数 m 和 n 均不为 0 时，会出现光强分布反转现象，并在传输中形成光强反转节点，改变功率可调节光强反转节点出现的位置，这是玫瑰型光束区别于其他光束的一个特点；引入旋转角度可驱动光强反转节点绕光束中心轴同步旋转，同时保持光束结构稳定；光束的初始入射功率影响介质的折射率，进而影响演化周期，初始入射功率越大，演化周期越短；基于 NNLSE 的数值模拟结果表明，玫瑰型光束能够实现稳定传输。这些发现为进一步研究玫瑰型光束提供了理论参考，并在光束整形、光束操控及相关领域具有应用价值。

参考文献

- [1] Guo Q, Luo B R, Yi F H, Chi S E 2004 *Phys. Rev. E*. **69** 016602
- [2] Zhang S H, Zhang M, Qu J 2025 *Chaos Soliton. Fract.* **199** 116830
- [3] Snyder A W, Mitchell D J 1997 *Science* **276** 1538
- [4] Dai J H, Guo Q, Shi X R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4642 (in Chinese) [戴继慧, 郭旗, 史信荣 2007 物理学报 **56** 4642]
- [5] Xu S Y, Zhou Q, Liu W, 2023 *Nonlinear. Dyn.* **111** 18401
- [6] Mitchell D J, Snyder A W 1999 *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 236
- [7] Parola A, Salasnich L, Reatto L 1998 *Phys. Rev. A*. **57** R3180
- [8] Chen C D, Zhang L P, Yang S, Deng D M 2024 *Opt. Lett.* **49** 2681
- [9] Chenui E A, Dikandé A M 2022 *Opt. Express*. **30** 10999
- [10] Gao M M, Chen Y, Shen M 2020 *J. Opt.* **22** 025502
- [11] Rotschild C, Cohen O, Manela O, Segev M, Carmon T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 213904
- [12] Deng D M, Guo Q, Hu W 2009 *Opt. Lett.* **34** 43
- [13] Shen S, Yang Z J, Pang Z G, Ge Y R 2022 *Appl. Math. Lett.* **125** 107755
- [14] Yang Z J, Zhang S M, Li X L, Pang Z G, Bu H X 2018 *Nonlinear Dyn.* **94** 2563
- [15] Zhang S H, Zhou Z L, Zhou Y, Xu H F, Yuan Y S, Han Y S, Zhou Z X, Yao B L, Qu J 2022 *Opt. Express*. **30** 32019
- [16] Li J, Yang Z J, Zhang S M 2025 *Nonlinear. Dyn.* **113** 1591
- [17] Wang Z X, Li J J, Fu X Y, Zhao Y, Zhang H C 2025 *Chaos Soliton. Fract.* **199** 116698
- [18] Li J J, Zhang H C 2024 *Chaos Soliton. Fract.* **182** 114829
- [19] Izdebskaya Y V, Desyatnikov A S, Kivshar Y S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 123902
- [20] Maucher F, Pohl T, Skupin S, Krolikowski W 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 163902
- [21] Lu D Q, Zhan Q, Duan Q L, Hu W 2013 *Phys. Rev. A*. **87** 023815
- [22] Wang H R, Zhang Y C, Hu W, Guo Q 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 074204 (in Chinese) [汪浩然, 张银川, 胡巍, 郭旗 2023 物理学报 **72** 074204]
- [23] Jung P S, Izdebskaya Y V, Shvedov V G, Christodoulides D N, Krolikowski W 2021 *Opt. Lett.* **46** 62
- [24] Rotschild C, Alfassi B, Cohen O, Segev M 2006 *Nat. Phys.* **2** 769
- [25] Shahmoon E, Grišins P, Stimming H P, Mazets I, Kurizki G 2016 *Optica*. **3** 725
- [26] Sánchez C J, Chamorro P P 2017 *Phys. Rev. A*. **95** 053810

- [27] Dai Z, Guo Q 2011 *J. Opt. Soc. Am. B.* **28** 134
- [28] Sun Z, Deng D, Pang Z G, Yang Z J 2024 *Chaos Soliton. Fract.* **178** 114398
- [29] Tong X, Zhao D 2021 *Chin. Phys. Lett.* **38** 084202
- [30] Ma X, Egorov O A, Schumacher S 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 157401
- [31] Song L M, Yang Z J, Zhang S M, Li X L 2019 *Phys. Rev. A.* **99** 063817
- [32] Song L M, Yang Z J, Li X L, Zhang S M 2018 *Opt. Express.* **26** 19182
- [33] Wyller J, Krolkowski W, Bang O, Rasmussen J J 2002 *Phys. Rev. E.* **66** 066615
- [34] Yang Z J, Lu D Q, Hu W, Zheng Y Z, Gao X H, Guo Q 2010 *Phys. Lett. A.* **374** 4007
- [35] Zhang M, Zhang S, Zhou Z, Qu J 2025 *Opt. Express* **33** 19022
- [36] Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F 1954 *Tables of Integral Transforms*
- [37] Yang Z J, Lu D Q, Hu W, Zheng Y Z, Gao X H 2010 *Chin. Phys. B.* **19** 124212
- [38] Wang Q, Mihalache D, Belić M R, Zeng L W, Lin J 2023 *Opt. Lett.* **48** 4233

Propagation characteristics of rose-shaped beams in strongly nonlocal nonlinear media *

Zhang Meng¹⁾# Zhang Shao-Hua¹⁾ # Qu Jun¹⁾ †

1) (Anhui Province Key Laboratory for Control and Applications of Optoelectronic Information Materials, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000, China)

Abstract

The nonlinear Schrödinger equation (NLSE), one of the most fundamental partial differential equations in nonlinear science, plays a central role in characterizing the dynamic behavior of complex nonlinear physical systems. Mathematically, it is considered a form of nonlinear parabolic partial differential equation. In optics, it serves as a fundamental theoretical framework for analyzing nonlinear optical field properties and related dynamical phenomena. Spatial solitons, owing to their self-preserving spatial structure during propagation, have emerged as a central topic in nonlinear optics since their theoretical prediction, attracting extensive research interest. In nonlinear media, diffraction and self-induced nonlinear effects can be balanced, leading to stable propagation of optical beams. In mathematics, the rose curve is named for its petal-like geometrical appearance. Its light intensity distribution exhibits a petal-shaped rotationally symmetric profile arising from the coupling between the angular cosine modulation and radial distribution functions, which exemplifies the trigonometric geometrical characteristics inherent to the polar coordinate system. However, current research on rose-shaped beams, particularly in nonlinear media, remains relatively limited, and their potential for advanced light-field modulation in nonlinear systems has not yet been fully explored.

This paper presents, for the first time, the concept of rose curve modulated beams (RCMBs) and further extends the theoretical framework by introducing radial and angular modulation parameters to construct radial-angular composite rose curve beams (RACRBs) with enhanced structural flexibility. This model not only inherits the unique geometric characteristics of conventional rose curve beams but also significantly enriches the spatial structure of the optical field through the coupling of multiple modulation parameters, providing a novel theoretical framework for the design of complex structured light fields. Based on the nonlocal nonlinear Schrödinger equation in conjunction with the Huygens–Fresnel integral, an analytical expression describing the propagation of rose curve beams in strongly nonlocal nonlinear media (SNNM) is derived, establishing a solid theoretical foundation for investigating their propagation dynamics. Numerical simulations are performed to systematically analyze the evolution of the beam width, intensity distribution, and critical power. The results demonstrate that the spatial intensity profile at the source plane can be precisely tailored by appropriately adjusting the radial modulation parameter, angular modulation parameter, and rotation angle, thereby enabling the generation of a variety of beam configurations with distinct spatial characteristics. When the RACRBs parameters are set to $(0, n)$, the beam evolves into a stable spatial soliton with a tunable petal number and spatial arrangement. The petal morphology can be continuously manipulated through parameter variation, highlighting the high degree of structural controllability and design flexibility of the proposed beam.

When both the radial modulation parameter m and the angular modulation parameter n are nonzero, indicating the simultaneous presence of radial and angular modulation, the proposed beam exhibits propagation behaviors that are absent in conventional structured beams. Numerical results reveal the emergence of a pronounced intensity inversion phenomenon, leading to the formation of multiple stable intensity inversion nodes during propagation. The positions of these nodes evolve periodically with the propagation distance. Furthermore, variations in the optical power effectively modulate the locations of the inversion nodes while preserving the overall structural stability of the optical field. This distinctive behavior represents a key characteristic of rose curve beams and clearly distinguishes them from conventional Gaussian, Airy, and Bessel beams. In addition, the introduction of a rotation angle causes the inversion nodes to rotate synchronously about the beam propagation axis while maintaining the integrity of the beam profile, thereby enabling coordinated control of both the beam structure and the inversion nodes. The initial incident power of the beam affects the refractive index of the medium, thereby influencing the evolution period; higher initial power results in a shorter evolution cycle. Numerical simulations confirm that rosette beams exhibit stable long-distance propagation in strongly nonlocal media. These findings provide valuable insights for future research on rosette beams and demonstrate their potential applications in optical communication and optical particle manipulation.

Keywords: strongly nonlocal nonlinear media, rose-shaped beam, beam propagation, optical soliton

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12474289, 12074005)

These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: qujun70@ahnu.edu.cn
The first author. E-mail: 3046745334@qq.com

录用稿件，非最终出版稿