

毛细管内空气柱对气泡非线性形貌演化特性影响因素分析

吴玉婷^{1, #} 李秀如^{1, #} 刘雅璐 左馨怡 郭霞杰 马佳昱 雷照康 冯康艺[†] 王成会[‡]

(陕西师范大学, 陕西省超声学重点实验室, 西安 710062)

摘 要

在超声波激励下, 毛细管内液体中的气泡可呈现球形振荡、模态振荡及表面不规则振荡等多种动力学行为。当管内存在气柱时, 气柱与毛细管壁共同约束气泡的运动, 导致气泡平动与径向振荡之间产生强耦合。声压幅值的升高会调节气泡与气柱之间的距离, 使气泡逐渐偏离球形, 并表现出形貌演化特征; 利用圆度、模态主导度及模态熵等参数, 可将气泡形貌划分为球形、规则形貌与不规则形貌三类。实验发现, 声压的起伏变化调制了气泡的稳定模态振动与模态失稳现象的出现: 在稳定模态振动情况下, 气泡半径变化由径向振动和主模态主导; 而在模态失稳情况下, 气泡会表现出明显的非主模态分量。气泡的三阶模态多出现在相对远离气柱的区域, 而四阶和五阶模态则多出现在气柱附近, 在特定条件下, 气泡的四阶与五阶模态之间会发生转换, 气泡的形貌受气柱和声压的共同调控。理论分析发现边界的存在会在一定程度上影响气泡的非线性响应。当气泡半径在 $51\text{ }\mu\text{m}$ 附近时, 其对声场条件和环境压力的敏感性显著增强。修正了气泡模态发声压阈值, 理论阈值曲线与实验预测阈值分布具有很好的一致性。在不同模态气泡平衡半径分布交界区域内, 可能由于声压的起伏波动激发气泡表面振动模态在相邻阶模态间切换。

关键词: 气泡模态, 毛细管, 模态转换

PACS: 43.35.+d, 43.25.+y, 47.55.dp

*国家自然科学基金 (批准号: 12374441, 12534018, 12504538)、中央教育高等学校基本科研业务费 (批准号: GK202406034, GK202601015) 和陕西省自然科学基金基础研究计划 (批准号: 2025JC-YBQN-066) 资助的课题.

#同等贡献作者.

† 通信作者.E-mail: kyfeng0205@snnu.edu.cn

‡ 通信作者.E-mail: wangld001@snnu.edu.cn

吴玉婷: 2987527378@qq.com

1 引言

在超声波作用下, 气泡会经历周期性的膨胀与压缩过程^[1]。当驱动声压较高时, 气泡会发生急剧塌缩, 并伴随射流和冲击波等现象^[2]。这些独特的动力学特性使气泡在微流控技术^[3]、超声辅助药物递送与治疗^[4]、传感^[5]等领域具有广泛应用。例如, 超声驱动的单气泡能够穿透细胞膜, 通过稳定的循环微射流促进药物吸收^[6]; 在毛细管末端, 气泡的射流可将液体泵送至管口^[7]; 在微流控芯片中引入声场, 可利用声辐射力在指定位置形成稳定势阱, 实现对气泡的高效捕获与定位^[8]。上述应用场景多涉及受限几何区域中的气泡行为, 而受限区域的存在会显著改变气泡的形貌及其动力学特性。

为系统认识受限区域气泡的行为特征, 现有研究已从不同角度展开了实验观测。Liu 等^[9]在血管模型中观察了 0.9% NaCl 盐水中空化气泡的形态与破裂时间, 结果表明气泡的破裂时间及射流行为受边界条件显著影响, 具体包括血管壁厚度、气泡位置及血管壁材质等因素。为进一步探究边界对气泡空化行为影响, Li 等^[10]采用高速摄像技术, 观测了不同刚性管长度、直径及气泡与管口距离条件下的气泡形态, 发现气泡从生成至破裂的时间随刚性管直径的增大而减小, 随管长度的

减小而缩短。在上述研究中, 气泡尺寸与管道尺寸相当。针对气泡尺寸小于管径的情形, Li 等^[11]探究了黏性液体中毛细管内气泡的弹跳行为, 揭示了受限气泡动力学中“几何约束-声场驱动-多体耦合”的三元调控机制。此外, 对于部分充液毛细管口的气泡, 其射流行为受边界条件约束, 射流方向由无量纲距离参数控制, 该参数取决于气泡位置、毛细管半径及液体填充情况^[12]。

在外部声场足够强的情况下, 气泡将呈现形状变形, 偏离纯球形的振荡模式。这种非球形行为主要源于瑞利-泰勒不稳定性与参数不稳定性^[13]。为探究气泡表面模态的影响因素, Doinikov^[14]在理论上发现, 当允许所有表面模态存在、不对其固有频率施加任何限制时, 气泡的平动、体积振荡与表面形状模态之间存在强非线性耦合, 三者共同决定了声场中气泡的无规则运动。Shaw^[15]基于共振机制, 研究了在相同驱动频率下两个气泡相邻高阶形状模态之间的转换行为, 揭示了因参数诱导的轴对称形状变形而产生自推进的机制。Guédre 等^[16]观察, 调制声场下气泡的形状和平动行为, 发现由球形振动触发的参数激发模式会呈指数增长, 随后因能量向平动及模态转移而达到饱和。在实验上, Li 等^[17]观察到在调制波声场里, 毛细管内气泡会经历球形振荡, 失稳形变, 表面模态演化恢复到球形振荡一系列演化阶段, 且气泡呈现亚谐波响应, 双泡之间始终保持反相振荡, 该研究为气泡形貌演化机制提供了新的认识。Maksimov^[18]指出气泡表面模态的简并性源于其对球对称形状扰动的平衡机制, 而边界条件的存在则会打破该简并性。声压是影响气泡表面形状模态的关键参数。为阐明声压对气泡表面模态的作用机制, Mekki-Berrada 等^[19]研究了对微流控通道两壁之间受挤压的微气泡的运动特性, 在考虑壁面变形的前提下, 结合二维 Rayleigh-Plesset 方程, 对气泡模态的激发阈值进行预测, 结果与实验相符。然而, 现有研究多集中于气泡的稳定模态振

荡, 对其紊乱阶段的形貌特征缺乏深入认识。因此, 有必要通过实验观测进一步对气泡的形貌进行系统表征。

尽管针对受限空间内气泡的非线性脉动行为及其模态特征已有相关研究, 但对于刚性毛细管内气泡形貌演化过程仍缺乏系统性的探讨。在实验方面, 本文采用高速摄影技术结合图像识别方法, 研究 40 kHz 超声场驱动下毛细管末端气柱下气泡的形貌演化规律, 并定义模态主导度与模态熵, 结合圆度指标对气泡形貌进行分类。在理论方面, 基于 Keller-Miksis 方程, 引入镜像气泡模型, 将气柱等效为一个半径较大的气泡, 建立多气泡耦合动力学模型, 对气泡在球形振荡阶段的非线性脉动进行数值计算, 以探究边界条件对气泡非线性行为的影响。同时, 对气泡模态激发的临界声压进行修正, 确定各模态的激发阈值。上述研究可为超声造影成像、靶向药物递送等领域提供理论支持。

2 毛细管内气泡的实验观察

玻璃毛细管中气泡形貌演化的实验装置, 主要包括: 超声频率为 40 kHz 的超声换能器(深圳嘉源科技有限公司, 最大电功率 360 W)安装在水箱下方。为了便于观察, 在主水箱中放置了一个透明的亚克力水箱(9.42 cm×9.43 cm×29.50 cm), 亚克力水箱一侧装有一节导轨, 将毛细管紧贴于柱形钢棒截面并通过金属管架固定在水箱上。将长度为 10.0 cm 且内径 0.5 mm 的毛细管浸入液体中, 其轴线沿声波传播方向, 具体实验装置细节可参考文献 11。实验中用注射器连接硅胶毛细管向玻璃毛细管注入气泡。采用高速相机(i-SPEED 727, iX Cameras Ltd., 英国)连接长焦显微镜(12× Zoom Core, NAVITAR, 美国)拍摄气泡的形貌照片, 拍摄速度为 10 万帧/秒(每帧大小 216×216 像素)。

2.1 气柱附近的三阶模态振动气泡

超声波在毛细管内传输，激励液体中气柱附近的气泡发生径向振动和平动。

由于声波为 10 ms 的调制波，因此，当声压幅值较低时，气泡几乎保持球形，随着声压幅值增加，气泡偏离球形呈现不规则的表面形貌变化或转变为规则的三阶模态振动。调节气柱在毛细管内的位置，并在实验上保持超声波一直存在的情况下，分别设置无量纲功率为 $P = 0.4, 0.5$ 和 0.6 ，观察同一气泡的形貌变化，其时序如图 1 所示。比较气泡在三个不同功率时的形貌变化可看出，气泡的稳定模态均为 $n = 3$ 。当 $P = 0.4$ 时，气泡偏离球形后经历约 0.7 ms 的不稳定表面模态变形，随后逐渐过渡为稳定的三阶表面模态振动，且气泡在不稳定形貌转变的临界时刻发生了显著的朝向气柱平动位移；当 $P = 0.5$ 和 0.6 时，气泡偏离球形后经历短暂的稳定三阶模态变化，随后逐渐过渡到非稳态的表面形貌变化，表现出一定程度的紊乱变形特征；相较而言，在紊乱变形期内， $P = 0.6$ 时气泡向刚性管壁移动更显著。气泡在形貌紊乱过渡期，表面形貌外凸呈三角形状，且外凸部分逐渐拉伸加剧或演变为桃心状，表明气泡三阶模态系数 a_3 幅值较大，而形貌紊乱可能源于三阶模态与相邻模态非线性耦合^[15]。当 $P = 0.6$ 时，在一个 10 ms 声包络周期内，气泡形貌在三种形貌间切换的频次增加，气泡的不稳定性加剧，表现在形貌演化过程中分裂出微小气泡的现象；因气泡靠近管壁且外凸表面曲率大，根据 Young-Laplace 方程^[20]知其局部压力高，且液膜受挤压可能产生很大的流体剪切应力，当这些局部应力超过表面张力所能提供的模态形变恢复力时，尖角处的液膜会迅速变薄并最终断裂，导致气泡发生破碎，进而多数分裂出尺寸相当的三个气泡^[21,22]。

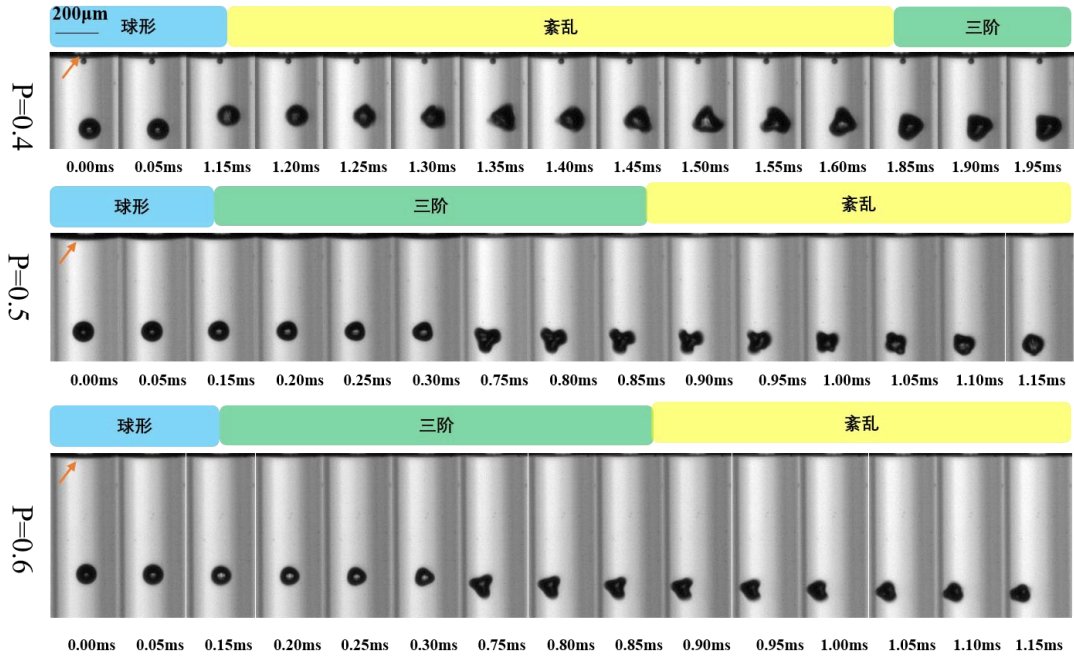


图 1 不同功率下表面模式 $n=3$ 的气泡形貌时序图，箭头指向的位置为气柱下表面
 Fig. 1. Under different powers, time-lapse images of bubble morphology for surface mode $n=3$,
 with the arrow pointing to the lower surface of the gas column.

声压幅值是气泡体积振荡和平动行为的重要影响因素。低声压下气泡接近球形振动，而随着声压的起伏变化可能激发气泡的非球形模态振动。为此，基于 Keller-Miksis^[23]方程拟合图 2 中气泡球形振荡区间的半径-时间曲线^[24]，用于估计驱动气泡振动的声压幅值，发现无量纲功率 0.4，0.5 和 0.6 对应的声压值约为 13.8 kPa，14.8 kPa 和 15.6 kPa。同时，通过不同颜色分类标注了 10 ms 时间段内气泡的球形振动、稳定和 unstable 表面模式振动以及可能发生破碎时间段，如图 2 所示。利用等效圆法^[17]估计气泡的等效半径(图 2(a))，发现气泡的体积振荡表现出与外驱动声场相似的非线性起伏变化特征。此外，三种功率下气泡球形振动平衡半径约为 50.97 μm ，45.89 μm 和 43.63 μm ，即随着声源功率增加，气泡平衡尺寸略有减小。以气柱与左侧管壁交点为坐标原点， x 轴为水平向右， y 轴竖直向下，由此可得气泡平动位移如图 2(b)所示，通过对比分析可知，声源功率增加可

驱动气泡远离气柱且气泡的平动位移起伏变化幅度变大。平动速度分量起伏变化区间主要集中在不稳定表面形变和破碎时段，表明气泡径向振荡对称性破缺是平动迁移的核心原因^[25]，且体积振荡与平动存在强非线性耦合。需要特别说明的是，功率调节过程中未关闭超声电源，因此，图 2(a)展示的是同一气泡随着分阶段功率的增加而平衡半径减小的情形，这可能源于气泡径向振动幅度增大所致的子气泡分裂，还可能与功率变大导致气泡内气体扩散增强有关。随着声压升高，气泡能够保持球状的时间段缩短，即气泡失稳加剧，如无量纲功率 0.5 时近球形振动时间极短。气泡形貌与浮力、黏性阻力、环境流体动力学条件、界面活性物质、温度梯度以及几何约束等多重因素有关。因此，管内非球形表面形貌演化气泡是一个复杂的非稳定系统，其动力学状态受到边界和驱动声场的协同调控。

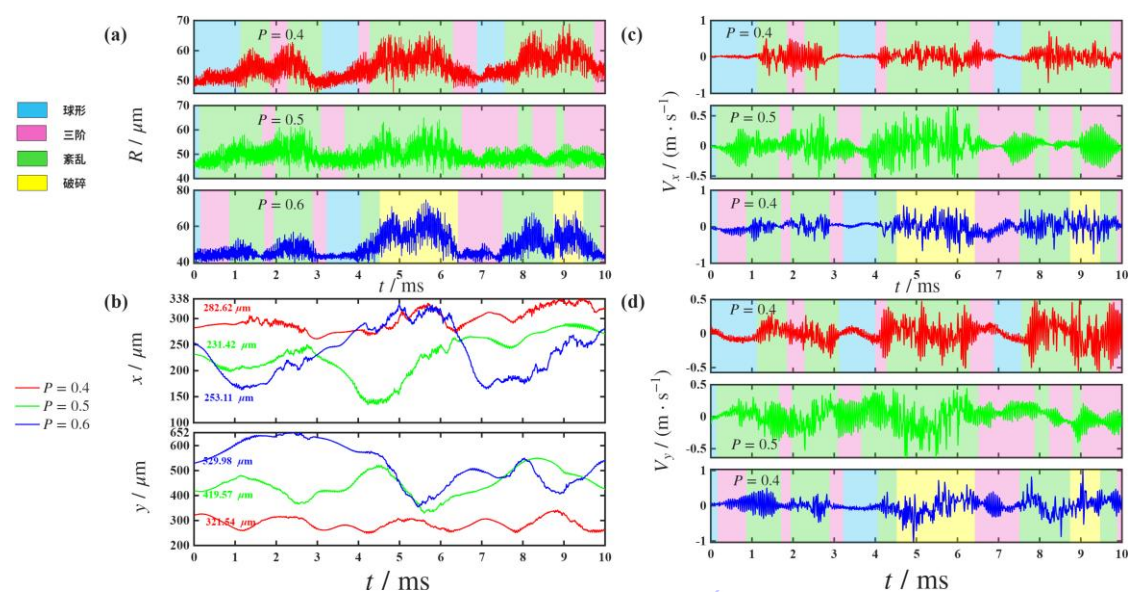


图 2 气泡的径向振动和平动特征。(a) 气泡等效半径随时间的变化；(b) 气泡平动位移的 x 分量和 y 分量；(c) x 方向的分速度；(d) y 方向的分速度。

Fig. 2. Radial oscillation and translational behaviors of bubbles. (a) Equivalent radius of the bubble, (b) translational displacements in x and y directions, (c) x -component of the translational velocity, (d) y -component of the translational velocity.

2.2 气泡形貌分类

基于气泡的高速摄像时序照片可逐帧提取气泡的质心和形貌轮廓，并利用球谐函数进行模态分解，为便于理解，涉及的物理量定义如表 1 所示：

表 1 符号说明

Table 1 Symbol Description

符号	物理意义
$R(\theta,t)$	气泡轮廓的极径函数
θ	极角
t	时间
n	模态阶数
$a_n(t)$	第 n 阶模态系数
$a_0(t)$	气泡体积模态振荡系数
$a_1(t)$	平移模式系数
$a_i(t)$	第 i 阶模态系数 $i \geq 2$
$P_n(\cos \theta)$	第 n 阶勒让德多项式
A	气泡的三维面积
P	气泡轮廓的周长
C	气泡圆度
Dom	模态主导度
S	模态熵
p_i	第 i 阶模态系数的归一化概率比重

将气泡形貌进行球谐函数展开，即^[26]：

$$R(\theta, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) P_n(\cos \theta), \quad (1)$$

其中模态系数 $a_n(t)$ 表达式为:

$$a_n(t) = -\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 R(\theta, t) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2)$$

其中 $P_n(\cos \theta)$ 为 n 阶勒让德多项式, $a_0(t)$ 代表气泡的体积模态振荡, $a_1(t)$ 与气泡平移模式相关联, $n \geq 2$ 时, $a_n(t)$ 代表形状模态的系数。基于对气泡的模态分解后的模态系数, 利用圆度 $C^{[27]}$, 并引入模态主导度 Dom 和模态熵 S 以区分气泡的形貌特征, 进而标度气泡形貌为球形、规则 (三阶或四阶等) 和紊乱。相关参数定义为:

$$C = 4\pi A / P^2, \quad (3)$$

$$Dom = \max \{|a_i| / \sum |a_i|, i = 2, 3, 4, \dots\} \quad (4)$$

$$S = -\sum p_i \ln p_i, \quad (5)$$

其中 A 代表气泡的面积, P 代表气泡轮廓的周长, a_i 为第 i 阶模态系数, $p_i = |a_i| / \sum |a_i|$ 为第 i 个模态系数绝对值占全部模态系数绝对值总和 ($n \geq 2$ 的模态系数) 的比值。

在区分气泡形貌时分两步: 首先, 基于圆度 C 判定气泡的振荡模式, 将 $C \geq 0.994$ 气泡定义为球形振荡形貌, 该阈值确保仅无显著形变的气泡被归为球形。其次, 引入模态主导度 Dom 与模态熵对非球形气泡的形貌规则度进行量化, 用以区分规则模态 (如二阶、三阶或四阶表面模态) 与紊乱形貌。 Dom 取阈值为 0.5, 其物理含义为最大模态系数绝对值超过其余所有模态系数绝对值之和, 表明单一模态在能量上占据主导地位; S 取阈值为 1.4, 该值基于蒙特卡洛模拟确定, 在 $Dom = 0.5$ 邻域 $[0.49, 0.51]$ 进行随机抽样, 得到对应模态熵最大分布范围

168 [1.3961,1.3996],故取 $S < 1.4$ 作为规则形貌的判据。具体而言,对于圆度 $C \leq 0.994$
169 的非球形气泡,当 $Dom \geq 0.5$ 且 $S \geq 1.4$ 时,视为规则形貌。图 3 展示了表面模态
170 为 $n = 3, 4$ 和 5 时的气泡模态分解结果,发现在确定气泡表面轮廓的对称轴后,
171 分解后气泡主表面模态系数最大,而其他阶模态系数相对小。当气泡表面失稳时,
172 则可能出现多个幅值较大的系数,多种模态彼此耦合进而导致气泡形状不规则。
173 因此,若圆度 C 接近 1 时,气泡呈现球形,而当气泡圆度 C 明显偏离 1 时,利
174 用模态主导度 Dom 确定主导模态和模态熵 S 表征气泡模态分解后模态系数的均
175 匀性,进而利用模态主导度 Dom 和模态熵 S 对气泡表面形貌分类。气泡规则振
176 荡时,半径波动呈现周期性,振幅稳定;气泡形貌失稳时,其径向振荡剧烈且结
177 构不对称。观察不同模态气泡的模态主导度和模态熵分布,发现气泡形貌为球形
178 时,气泡模态主导度低,但是其模态熵高,即气泡变形程度低,各模态系数分布
179 均匀且幅值小。当气泡形貌紊乱时其模态熵高,但模态主导度低;反之,气泡形
180 貌规则时模态主导度高,但模态熵低,说明主导模态的模态系数值远大于其他模
181 态。

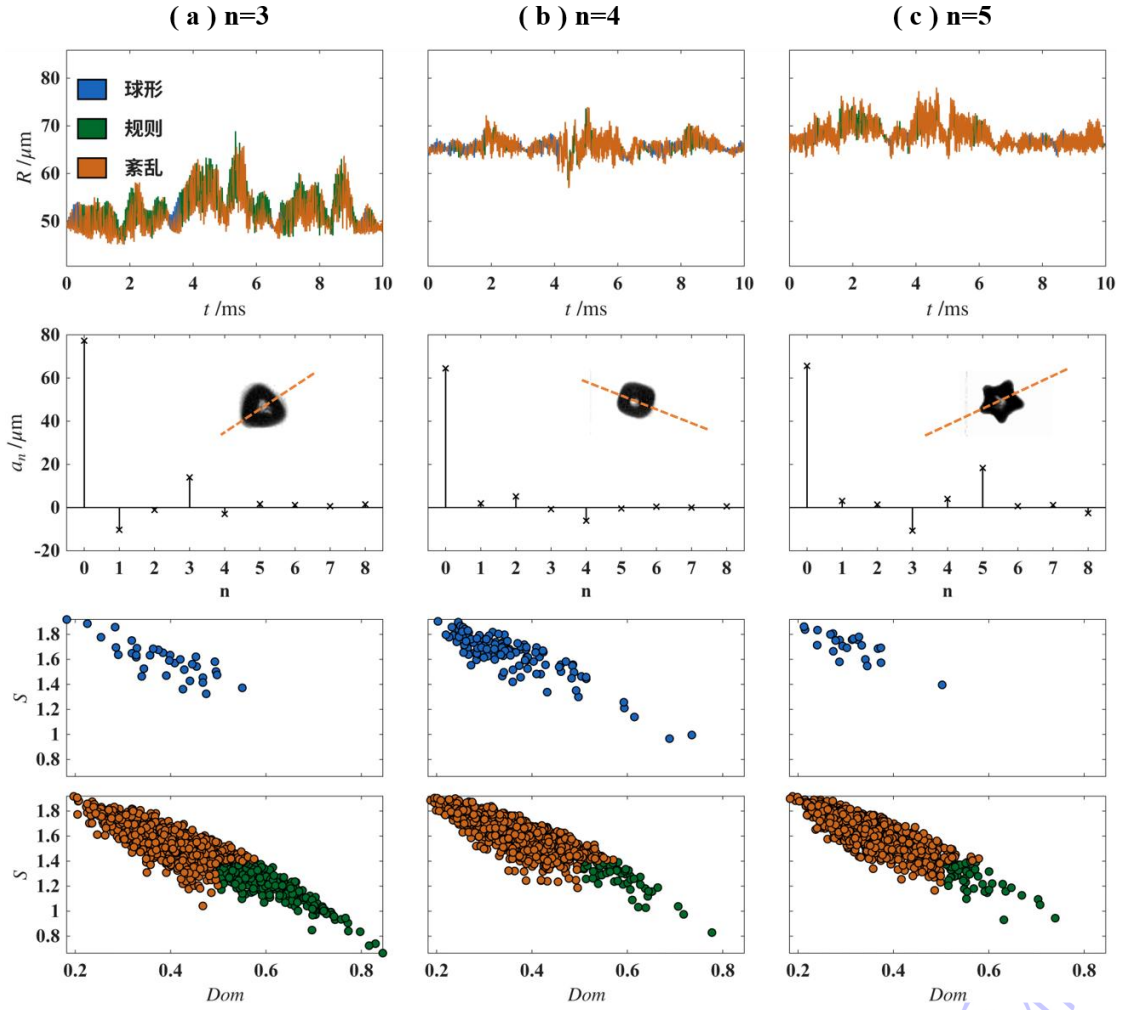


图 3 不同表面模态气泡的形貌分类。(a) $n = 3$, 气泡初始半径 $R = 49.07 \mu\text{m}$; (b) $n = 4$, 气泡初始半径 $R = 65.08 \mu\text{m}$, (c) $n = 5$, 气泡初始半径 $R = 66.07 \mu\text{m}$ 。

Fig. 3. Morphological classification of bubbles with different surface modes. (a) $n = 3$, initial bubble radius $R = 49.07 \mu\text{m}$; (b) $n = 4$, initial bubble radius $R = 65.08 \mu\text{m}$; (c) $n = 5$, initial bubble radius $R = 66.07 \mu\text{m}$.

为更好地理解基于模态主导度和模态熵对气泡形貌特征的分类可靠性，我们选取了半径分别为 $49.74 \mu\text{m}$, $61.20 \mu\text{m}$ 和 $66.09 \mu\text{m}$ 的三个气泡的 10ms 动态演化视频，逐帧分析其模态系数、模态主导度和模态熵等，如图 4 所示。当无量纲功率为 0.3 时，由于不同模态气泡尺寸有差异，其到气柱距离也不相同，粗略估计 3 阶、4 阶和 5 阶模态气泡距离气柱初始距离分别为 $367.68 \mu\text{m}$ 、 $224.80 \mu\text{m}$ 和 $108.89 \mu\text{m}$ ，基于球形振动所预测的最低声压幅值分别约为 14.4 kPa ， 10.1 kPa 和

194 9.2 kPa，由此可知，离气柱更近的大尺寸气泡更易激发 5 阶模态振动。比较三个
195 气泡前 8 阶模态分解的时序结果可以看出，随声压的起伏变化，稳定模态振动和
196 模态失稳交替出现，且在稳定模态振动情形下，气泡半径变化由径向振动和主模
197 态主导，其他模态系数值相对较低，几乎可以忽略不计；然而，在模态失稳的情
198 形下，除径向振动和主模态外，还可观察到明显的小于主模态的分量；相比而言，
199 3 阶模态稳定时长占比高，其稳定性更好，而模态阶次越高，稳定时长越短，越
200 容易失稳。此外，还观察到模态混叠现象，即在 $n=4$ 主模态时序的 1.32 ms 时
201 刻，气泡表现出明显的 3 阶模态特征，说明该气泡在外场声压和复杂流场以及边
202 界的共同作用下，可以在 3 阶和 4 阶模态振动间切换，但主要表现为 4 阶模态。

录用稿件，非最终出版稿

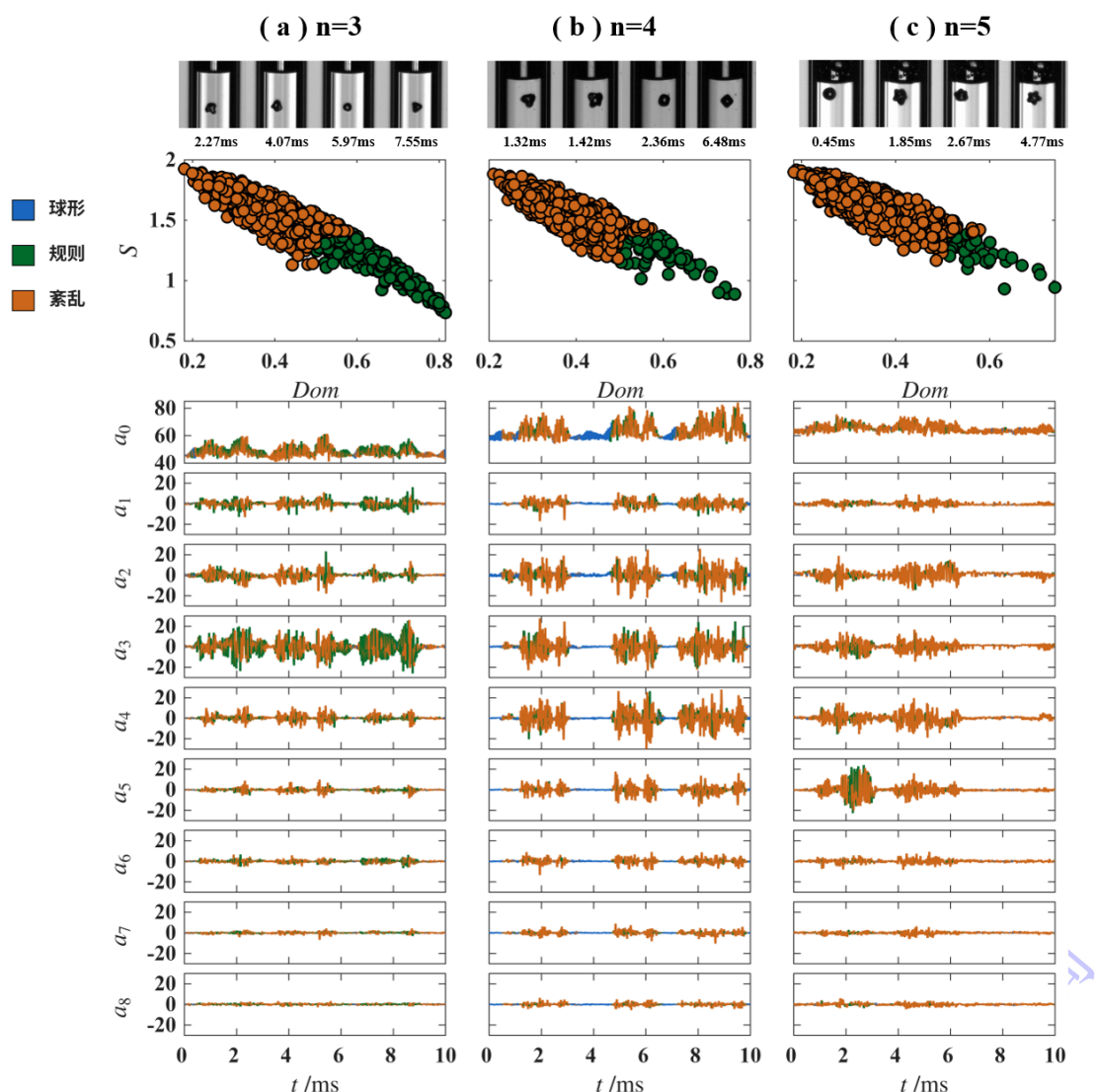


图 4 无量纲功率为 0.3 时不同模态气泡时序模态分解。(a) 初始半径 $49.74 \mu\text{m}$, (b) 初始半径 $61.20 \mu\text{m}$, (c) 初始半径 $66.09 \mu\text{m}$

Fig. 4. Time-series mode decomposition of bubbles with different modes at a dimensionless power of 0.3. (a) Initial radius $49.74 \mu\text{m}$, (b) initial radius $61.20 \mu\text{m}$, (c) initial radius $66.09 \mu\text{m}$.

2.3 气泡模态的转换

为更好地理解声场条件对气泡表面模态的选择效应,我们观察了无量纲功率为 0.6 时,半径为 $72.23 \mu\text{m}$ 的表面振动气泡在 4 阶和 5 阶模态间切换演化行为,如图 5 所示。在一个 10 ms 时间段内,由于气泡距离气柱较近,气柱对气泡的振动行为可能形成显著影响,气泡具有更长时间的球形振动阶段,说明气柱表面附近声压幅值较低。在前 4 ms 内,气泡稳态振动幅值约为 $3 \mu\text{m}$,其形貌保持稳定;

在 4 ms~5 ms 期间，随着声压的起伏波动，气泡偏离球形并转入不稳定形貌演化期，其间也存在短暂的稳定模态振动，但不稳定振动占主导，且气泡位置向边界有小幅漂移；图 5(b)中粉色背景覆盖曲线代表从 4 阶模态向 5 阶模态转化期间的平动位移变化，蓝色背景覆盖曲线代表从 5 阶模态向 4 阶模态转化期间的平动位移变化，各对应约 1 ms 的时间间隔，如图 5(c)所示，在 5.05-6.05 ms 时段 x 位移分量峰值左侧，气泡逐渐向管中心平移是产生了间歇的 4 阶模态振荡，而随着气泡恢复向管壁接近，5 阶模态被间歇激发。此外，我们还发现，气泡振荡过程中存在体积跃变，说明其非线性模态耦合响应可能具有多能级特征，而体积跃变伴随着强平移跃动，调节毛细管内柱形泡与体积振荡气泡间的相对位置。从 5 阶模态向 4 阶模态转化的空间位置特征看，主要表现为气泡向管壁和柱形泡平移，进而影响该区域管内液体流场分布，气泡和流体介质相互作用激发模态转换。从图 5(d)各阶模态系数分量变化趋势可以看出，气泡在整个 10 ms 时段内稳态振动主要表现为 4 阶模态。

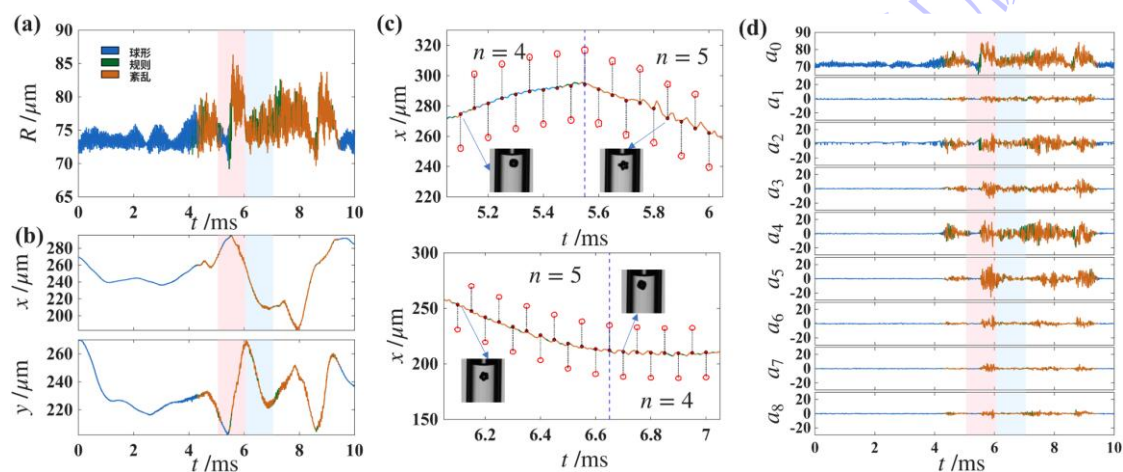


图 5 气泡振动的模态选择特性。(a) 气泡的径向等效半径的时序变化; (b) 气泡在 x 和 y 方向的平动位移分量; (c) 模式转换期间 x 方向的平动位移; (d) 气泡表面轮廓的模态分解。

蓝色区域：表面模态 $n=5$ 向 $n=4$ 转换；红色区域：表面模态 $n=4$ 向 $n=5$ 转换。

Fig. 5. Modal selection characteristics of bubble vibration. (a) Time evolution of the radial

equivalent radius of the bubble; (b) translational displacement components in the x and y directions; (c) translational displacement in the x-direction during mode transition; (d) modal decomposition of the bubble surface contour. Blue region: transition from surface mode $n = 5$ to $n = 4$; red region: transition from surface mode $n = 4$ to $n = 5$.

图 5(c)所展示的模态转换过程是典型的非线性动力学现象。Shaw 发现当气泡受到外部声压激励时, 若驱动频率接近某一表面模态的固有频率或其亚谐波, 可激发参数共振, 导致该模态被指数级放大^[28]。因此, 4 阶和 5 阶模态的相继激发并非偶然, 当系统达到临界驱动声压时, 由基频参数共振激发气泡的 4 阶模态振动, 其振幅因非线性饱和效应达到稳态; 随后因平移运动的影响, 系统在模态间非线性耦合与能量再分配作用下进入新的不稳定区域, 若满足共振条件则 5 阶模态获得足够能量而被激活, 并逐步主导气泡形状演化^[15]。Matthieu Guédra^[26]研究表明, 模态系数的衰减并非单调过程, 而是伴随着能量在不同自由度间的反复转移。当 5 阶模态系数增大并随后衰减时, 部分能量可能通过非线性耦合至球形振荡模式, 最终导致系统整体趋向于更稳定的球形振荡状态^[16]。

3 理论模型

3.1 气泡动力学方程

为研究毛细管里气柱附近气泡的动力学行为, 需考虑圆柱形管壁对气泡振荡的约束作用。如图 6 所示, 对于刚性圆柱壁面, 镜像法应采用圆的反演变换^[29]:

设毛细管半径为 a , 气泡中心偏离管轴的距离 ε , 则根据反演原理, 真实气泡的

镜像气泡位于管外同一径向线上, 距管轴距离为 $O_1D = \frac{a^2}{\varepsilon}$, 由于圆上任意一点到

气泡和镜像点的距离之比恒等于 $\frac{PO_1}{PO} = \frac{a}{\varepsilon}$, 而刚性壁面法向速度为零, 则镜像气

泡的辐射声压应该缩放为气泡辐射声压的 $\frac{a}{\varepsilon}$ 。气柱可近似为垂直于管轴的平面气

液自由界面。自由界面条件下镜像气泡作反相振荡, 等效半径与气泡相同。则镜像气泡 1 和 2 对气泡的影响分别为^[30,31]:

$$T_1 = \frac{1}{O_1 D - \varepsilon} \frac{a}{\varepsilon} \frac{d(r^2 \dot{r})}{dt} = \frac{a}{a^2 - \varepsilon^2} \frac{d(r^2 \dot{r})}{dt}, T_2 = -\frac{1}{d_\gamma} \frac{d(r^2 \dot{r})}{dt}, \quad (6)$$

当气泡位于管轴，此时镜像气泡与气泡距离、镜像源强同步趋于无穷大，二者比值收敛至有限最小值 $\frac{1}{a}$ 。理论分析表明，当气泡平动速度低于约 1.5 m/s 时，平动对径向动力学的反馈可忽略不计^[32]。本研究参数范围内的实测平移速度始终接近零，远低于该阈值，故平动效应在此不予考虑。则气泡动力学方程可近似表示为^[33]

$$r\ddot{r} + \frac{3}{2}\dot{r}^2 - \frac{p_1}{\rho} = T_1 + T_2, \quad (7)$$

式中 r 为气泡瞬时半径。

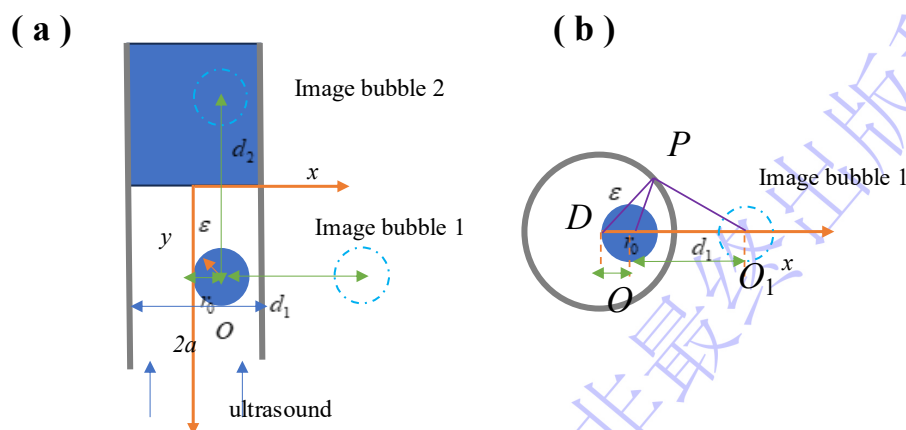


图 6 气泡振动模型示意图。(a)正视图;(b)仰视图

Fig. 6. Schematic diagram of the bubble vibration model.(a)Front view;(b)Top view.

根据 Keller-Miksis 理论^[34], 考虑界面影响后的气泡动力学方程可表示为

$$\begin{aligned} & (1 - \frac{\dot{r}}{c})r\ddot{r} + (\frac{3}{2} - \frac{\dot{r}}{2c})\dot{r}^2 - \frac{1}{\rho}(1 + \frac{\dot{r}}{c})p_1 - \frac{r}{\rho c} \frac{dp_1}{dt} \\ & = T_1 + T_2 \end{aligned} \quad (8)$$

式中 c 是流体声速, r_0 是气泡的初始半径, γ 是多方指数, ρ 是流体密度, P_0 是

静态压力， σ 和 η 分别是液体表面张力系数和黏性系数。泡壁外侧液体压力 p_1 为

$$p_1 = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{r_0} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{r} - \frac{4\eta\dot{r}}{r} - P_0 + P_a \sin(\omega t), \quad (9)$$

式中 P_a 为声压幅值， f 为频率为且有 $\omega = 2\pi f$ 。

数值计算相关参数设置为：毛细管管径 $2a = 500 \mu\text{m}$ ，水介质密度和声速分别为 $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ 和 $c = 1500 \text{ m/s}$ ，气泡表面张力系数 $\sigma = 0.075 \text{ N/m}$ ，粘度系数 $\mu = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ ，环境压力 $P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ ，气体比热比 $\gamma = 1.4$ 。利用 ODE45 求解二阶微分方程，初始条件为 $r(0) = r_0$ ， $\dot{r}(0) = 0$ ，每个声周期等步长取 100 个点。在计算过程中，为确保系统达到稳定，对每组参数模拟 200 个声周期，并剔除前 150 个周期的数据以排除瞬态气泡振荡的影响。

3.2 气泡的非线性行为分析

气泡的非线性声响应行为受驱动声波频率、声压幅值、气泡初始半径及空间位置等多种因素影响。为了在更宽广的参数空间内揭示气泡非线性响应的整体趋势与分岔结构，分析采用远高于实验值的声压。我们设置驱动声压 $P_a = 0.8 \text{ bar}$ 分析初始半径 $r_0 = 50 \mu\text{m}$ 气泡的低频声响应，当驱动频率设置为 30-150 kHz 时，如图 7(a-e)所示，在低频驱动条件下，气泡半径随频率变化的分岔图表明：低频区存在混沌区；随着频率升高，气泡依次经历单周期脉动、双周期脉动，在高频区回归单周期脉动。当气泡远离柱形气泡界面或偏离毛细管中心轴时，其由混沌转为单周期振动的频率呈现微弱左移趋势，表明边界的存在一定程度上抑制了气泡的径向生长，为模态振动的激发提供了能量来源。在频率 $f \approx 41 \text{ kHz}$ 处出现气泡响应幅值的跃变，表明该频率易于激发气泡的非线性共振，且共振响应受边界约束影响较小。此外，频率响应曲线在约 $2.70f$ 处出现第二次跃变，即气泡耦合振动体系基于非线性相互作用，激发了非整数倍频共振响应。由于毛细管与气

柱的共同约束，气泡的平动位移极小，位置变化对共振响应特性的影响微弱，但 Zhang 等^[35]研究发现同相振荡气泡共振频率随距离线性增加，因此，约束的存在可抑制气泡径向振动，但对增强气泡的不稳定非线性声响应，与 Sojahrood 等^[36]发现驱动频率接近共振频率或谐波频率时易于激发混沌现象的结论一致。

固定声波频率为 $f = 40$ kHz，设置驱动声压的范围：0.2-2.5 bar，分析气泡随驱动声压幅值变化的响应图像，从图 7(f-g)可以发现：随着气泡距气柱底面距离的增加，在驱动压力 0.5 bar 附近的分岔现象逐渐消失；而随着气泡偏离中心轴线距离增加（即靠近毛细管壁），0.5 bar 处的二分岔振幅受到小幅抑制，但由二分岔过渡到四分岔的临界压力值略有降低，混沌区呈现增长趋势，这表明气泡靠近硬壁面时进入双周期脉动和混沌状态所需的驱动声压更低。取压力 0.5 bar 分析五个不同位置处的气泡振动相图（图 7(k-o)）可知：随着离液柱距离增加，相图由三环状演变为单环状；而偏离中心轴的距离变化对相图影响不大，说明气柱与气泡间距的变化主要影响其耦合非线性行为。我们将气泡初始半径设置为 $10\text{ }\mu\text{m}$ 至 $90\text{ }\mu\text{m}$ ，进一步分析气柱附近不同初始半径气泡的分岔图（图 7(p-t)）发现：半径小于 $51\text{ }\mu\text{m}$ 的气泡振动非线性特征显著，而半径大于 $51\text{ }\mu\text{m}$ 的气泡主要表现为单周期振动；气泡位置对呈现混沌效应与单周期振动的临界半径值影响不大，因此半径约 $51\text{ }\mu\text{m}$ 的气泡具有优异的声响应调控性能，同时对声场条件及环境压力更为敏感。

录用稿件，

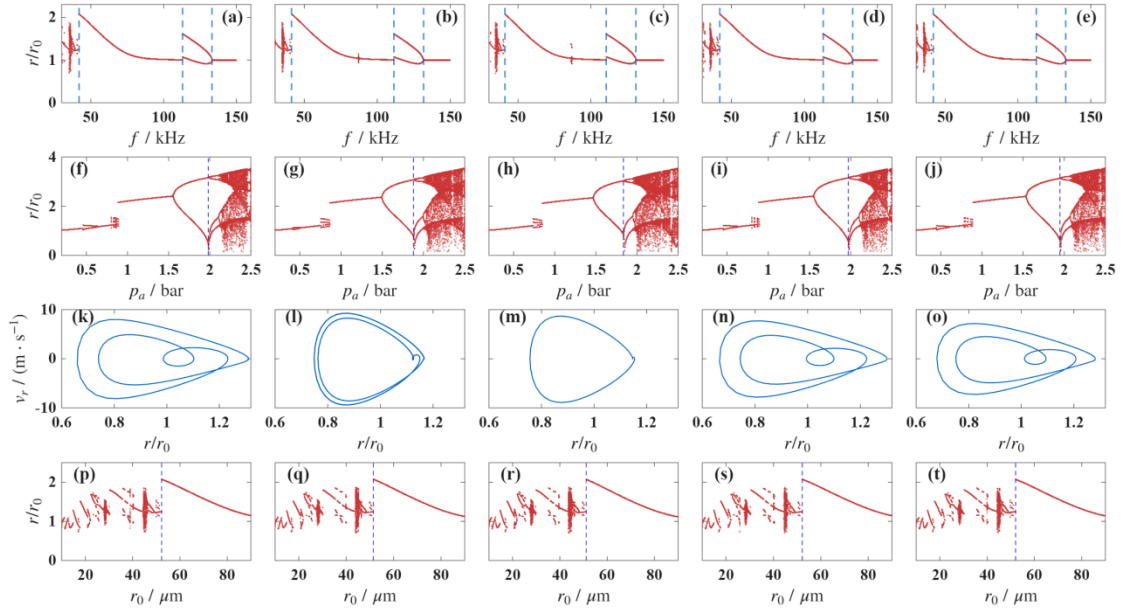


图 7 不同位置 (x, y) 处气泡的相对半径随超声频率(a-e)、驱动声压(f-j)和气泡初始半径(p-t)的分岔图(a-b)以及泡壁速度和相对半径的相图(k-o)。各子图坐标从第一列到第五列均为： $(0,300), (0,450), (0,600), (30,300), (50,300)$ ；坐标单位微米

Fig. 7. Bifurcation diagrams of bubble relative radius versus ultrasonic frequency (a-e), driving acoustic pressure (f-j), and initial bubble radius (p-t) at different positions (x, y) , and phase diagrams of bubble wall velocity versus relative radius (k-o). The coordinates for the subfigures from the first to the fifth column are $(0,300), (0,450), (0,600), (30,300), (50,300)$, respectively; the unit of coordinates is micrometer.

3.3 气泡模态的激发阈值

基于圆度、模态主导度和模态熵可对气泡表面形貌进行分类，因此，可以方便的估计临界压力阈值。我们通过分析气泡球形振荡和稳定模态的临界状态，利用 Keller-Miksis 方程^[23]估计激发稳定模态的阈值声压。已有研究表明，阈值声压由系统惯性、阻尼、共振特性及模态耦合强度共同决定^[19]。基于线性理论， n 阶表面模态的临界声压 P_{ac} 为^[19]：

$$P_{ac} = \frac{h_t \cdot |Z|}{n} \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2, \quad (10)$$

其中 h_t, ω_n 表示为

$$h_t = 2\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{2\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{\omega^2 \delta^2}{4\omega_n^4}}, \quad (11)$$

$$\omega_n = n(n-1)(n+1) \frac{\sigma}{\rho_0 r_0^3}, \quad (12)$$

其中 ω 为驱动声压, ω_n 为模态本征频率, $\delta = \frac{(2n+1)(n+2)\eta}{\rho r_0^2}$ 为阻尼系数^[37]。考虑

气柱和毛细管壁对气泡振动影响后, Z 的表达式为

$$Z = \left[\begin{array}{l} \rho_0 c_0 \omega r_0 \left[-kr_0 - \frac{akr_0^2}{a^2 - \varepsilon^2} e^{-jk(\frac{a^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon} - r_0)} \right. \\ \left. + \frac{kr_0^2}{d_2} e^{-jk(d_2 - r_0)} \right] - \frac{2\sigma}{r_0} + 3\gamma(P_0 + \frac{2\sigma}{r_0}) \end{array} \right] \quad (13)$$

其中 $k = \frac{\omega}{c}$, 其具体的推导过程请参看附录 A。

根据图 7 气泡非线性理论分析知, 平衡半径 40 μm 以上的气泡可表现出更为差异化的非线性声响应特征, 因此, 我们对半径在 40-86 μm 之间的气泡模态激发理论阈值与实验预测阈值进行比较, 选取了 19 组不同表面模式气泡进行了实验声压预测, 如图 8 所示。由于多组数据气泡位置大约处于毛细管的中间位置, 取偏心距离 $\varepsilon = 1 \text{ nm}$, 同时气泡与气柱间的平均距离大约为 250 μm 。因此选择计算参数为 $d_2 = 500 \text{ }\mu\text{m}$ 。同时, 理论预测曲线与 Nabeugoj^[37]估计气泡模态激发阈值进行了对比, 发现引入修正后临界声压曲线有左移的趋势, 即极值点左侧小气泡模态阈值压力减小。实验采用两种气泡声压预测方法: 方法 1 仅选取气泡球形振动阶段的信号; 方法 2 则在球形振荡与模态振荡的临界点两侧截取等长时间。结果表明, 方法 2 预测的声压显著高于方法 1。这一差异可归因于气泡形貌演化与声压波动之间的耦合机制。从实验预测声压值的散点分布可以看出, 两种方法估算的气泡模态振动声压均达到或超过相应的理论激发阈值, 表明理论阈值与实验估测结果高度一致。球形振动($n=0$)预测声压值分布在理论阈值曲线两侧,

只有超过阈值压力方能出现模态振动，因此，我们可以在压力起伏波动的声场中

低于阈值压力的时段观察到气泡的球形振动，由于约束的影响，还存在一些超过

阈值压力后仍然保持球形振动的案例。结果表明，当半径接近 $50\text{ }\mu\text{m}$ 的气泡易于

激发 3 阶模态振动，其激发阈值相对更高，由此实验中观察到它离气柱相对较

远；4 阶模态气泡半径主要分布在 $55\text{ }\mu\text{m}$ 至 $75\text{ }\mu\text{m}$ 之间；5 阶模态激发阈值相对

较低，尽管如此，由于仅在毛细管内柱形气泡表面附近存在，因此，数据量少。

从整体趋势看，预测声压与理论阈值具有较好的一致性。此外，发生模态转换的

气泡半径约为 $72\text{ }\mu\text{m}$ ，位于表面模态 $n=4$ 和 $n=5$ 的交界区域附近，二者发生转

化的主要源于声压调控。

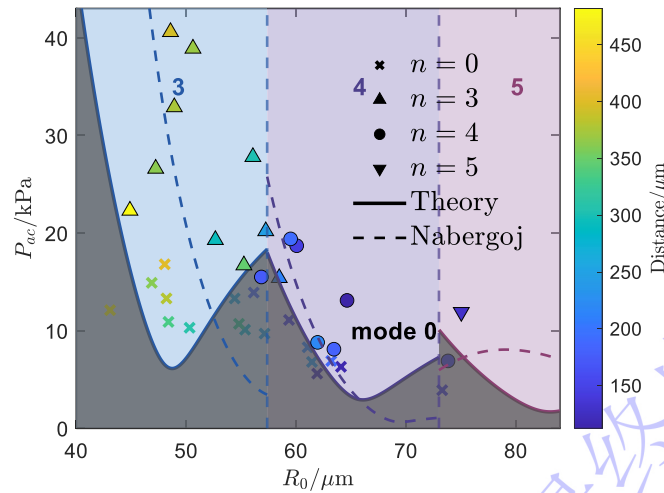


图 8 气泡 3 阶、4 阶、5 阶表面模态激发声压阈值。色阶代表气泡离气柱的平均距离。图中所有散点数据均取自 40 kHz 超声波作用于 0.5 mm 毛细管内气泡振动的等效声压。彩色区域对应不同模式的阈值分布区，虚线是基于 Nabergoj^[37]模型估计气泡模态激发阈值的理论阈值声压曲线

Fig. 8. Bubble surface mode excitation pressure thresholds for modes 3, 4, and 5. The color scale represents the average distance of the bubble from the gas column. All scattered data points in the figure are derived from the equivalent acoustic pressure of bubble vibrations inside a 0.5 mm capillary tube under 40 kHz ultrasound. The colored regions correspond to the threshold distribution ranges for different modes, and the dashed line is the theoretical threshold sound

pressure curve estimated based on the Nabergoj^[37] model for bubble mode excitation thresholds.

4 结论

本研究利用高速摄像实验,观测了 40 kHz 超声场中毛细管内气泡的形貌演化规律。结果表明,在不同声场条件下,气泡的径向振荡与平动行为之间存在强非线性耦合。为描述气泡形貌,引入了模态主导度 (Dom) 和模态熵 (S),并结合圆度 (C) 对气泡形貌进行分类,进而区分气泡的球形、规则形貌和不规则形貌。基于此分类,对比研究气泡的规则形貌与不规则形貌,结果表明:在规则形貌下,气泡半径的变化主要由径向振动与主模态主导,其余模态的系数值相对较低;而在不规则形貌下,除径向振动与主模态外,还可观测到其他虽小于主模态但显著存在的模态分量。气泡的三阶模态集中出现在远离气柱的区域,而四阶和五阶模态则多出现在气柱附近;在特定条件下,气泡的四阶与五阶模态之间会发生转换,气泡的形貌受气柱和声压的共同调控。

理论分析表明,边界的存在会在一定程度上影响气泡的非线性响应。当气泡半径接近 $51\text{ }\mu\text{m}$ 时,其对声场条件和环境压力的敏感性显著增强。通过对模态激发阈值进行修正分析发现,考虑边界效应后,小气泡的模态压力阈值整体左移,而采用球形振动拟合阈值方法所得数据在两侧均有分布。整体预测与实验结果吻合良好,气泡的四阶和五阶模态临界半径约为 $72\text{ }\mu\text{m}$,且在此半径附近易受声压影响而发生模态转变。上述结果明确了边界与声场协同调控气泡非线性行为的物理机制,为超声空化中的模态选择性激发及振动控制提供了关键的理论依据。

附录 A: Z 的表达式的推导

根据气泡动力学理论,泡壁压力平衡满足

$$P_0 + P_\sigma + P_{ac} e^{j\omega t} + P_{rad} = P_g. \quad (A1)$$

气泡振动对声场分布的影响需考虑三方面的贡献：气泡向外辐射的声波、毛细管壁面反射的声波以及气柱边界反射的声波。气泡体积谐振时其半径变化可表示为 $r = r_0(1 + \bar{X}e^{j\omega t})$ ，无量纲振幅 $\bar{X} \ll 1$ ，泡壁速度为 $u_r = u_0 e^{j\omega t}$ ，且有 $r \ll d$ ，则气泡的总辐射声压 P_{rad} 可表示为^[38]

$$P_{rad} = \frac{jkr_0}{1 + jkr_0} \rho c u_0 e^{j\omega t} + \frac{jkr_0}{1 + jkr_0} \rho c u_0 \frac{a}{a^2 - \varepsilon^2} r_0 e^{j[\omega t - k(\frac{a^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon} - r_0)]} - \frac{jkr_0}{1 + jkr_0} \rho c u_0 \frac{r_0}{d_2} e^{j[\omega t - k(d_2 - r_0)]}, \quad (A2)$$

其中 $k = \frac{\omega}{c}$ 。公式 (A2) 第一项是无界液体里气泡壁处的声压，第二项是毛细管壁反射回来的声波以及第三项是气柱界面反射回来的声波。泡壁速度幅值函数满足 $u_0 = j\omega r_0 \bar{X}$ ，且当 $kr_0 \ll 1$ 时， P_{rad} 泰勒的展开式为

$$P_{rad} = \rho c_0 \omega r_0 \bar{X} e^{j\omega t} \left[-kr_0 - kr_0^2 \frac{a}{a^2 - \varepsilon^2} e^{j[-k(\frac{a^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon} - r_0)]} + \frac{kr_0^2}{d_3} e^{j[-k(d_2 - r_0)]} \right]. \quad (A3)$$

气泡表面张力引起的压力响应函数为 $P_\sigma = \frac{2\sigma}{r}$ ，气泡小振幅振动情形下可表示为

$$P_\sigma = \frac{2\sigma}{r_0} (1 - \bar{X}e^{j\omega t}). \quad (A4)$$

假定气泡振动过程中泡内气体处于绝热状态，则有 $P_g = (P_0 + \frac{2\sigma}{r_0})(\frac{r_0}{r})^{3\gamma}$ ，线性化处

理后可表示为

$$P_g = (P_0 + \frac{2\sigma}{r_0})(1 - 3\gamma \bar{X}e^{j\omega t}). \quad (A5)$$

将式(A3)-(A5)代入式(A1)，消去 $e^{j\omega t}$ ，得 $-P_{ac} = Z\bar{X}$ ，其中 Z 的表达式为

$$Z = \left[\begin{array}{l} \rho_0 c_0 \omega r_0 \left[-kr_0 - \frac{akr_0^2}{a^2 - \varepsilon^2} e^{-jk(\frac{a^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon} - r_0)} \right] \\ + \frac{kr_0^2}{d_2} e^{-jk(d_2 - r_0)} \right] - \frac{2\sigma}{r_0} + 3\gamma \left(P_0 + \frac{2\sigma}{r_0} \right) \end{array} \right]. \quad (\text{A6})$$

需要特别说明的是，上述推导基于考虑界面影响修正项后的气泡振动方程(8)式展开，仅适用于气泡偏离毛细管中心轴的情形。然而，将修正后的 Z 表达式代入(10)式并设置气泡无限靠近管轴仍可实现有效的阈值预测，故该修正方法是可行的。

409

参考文献

- [1] Neppiras E A 1980 *Phys. Rep.* **61** 159
- [2] Chahine G L, Kapahi A, Choi J K, Hsiao C T 2016 *Ultrason. Sonochem.* **29** 528
- [3] Li Y Y, Liu X M, Huang Q, Ohta A T, Arai T 2021 *Lab. Chip.* **21** 1016
- [4] Wang J Q, Li Z Z, Pan M, Fiaz M, Hao Y S, Yan Y R, Sun L T, Yan F 2022 *Adv. Drug Deliv. Rev.* **190** 114539
- [5] Luo Y, Fan C, Song Y C, Xu T L, Zhang X J 2022 *Biosens. Bioelectron.* **210** 114297
- [6] Cattaneo M, Guerriero G, Shakya G, Krattiger L A, Paganella L G, Narciso M L, Supponen O 2025 *Nat. Phys.* **21** 590
- [7] Heidary Z, Fan Y, Mojra A, Ohl C D 2024 *Phys. Fluids* **36** 123335
- [8] Dai H Q, Qiu Z C, Liu L B 2024 *Sens. Actuat. A-Phys.* **374** 115514
- [9] Liu Y Y, Luo J 2023 *Ultrason. Sonochem.* **99** 106562
- [10] Li J, Zhou M L, Luo J, Xu W L, Zhai Y W, Qu T, Zou L T 2024 *Ultrason. Sonochem.* **103** 106791
- [11] Li X R, Liu Y L, Ma J Y, Wu Y T, Wang C H, Mo R Y 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 214302(in Chinese)[李秀如, 刘雅璐, 马佳昱, 吴玉婷, 王成会, 莫润阳 2025 物理学报 **74** 214302]
- [12] Sun Y R, Fan Y Z, Yao Z F, Wang F J, Ohl C D 2025 *Ultrason. Sonochem.* **121** 107560

- 430 [13] Brenner M P, Lohse D, Dupont T F 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 954
- 431 [14] Doinikov A A 2004 *J. Fluid Mech.* **501** 1
- 432 [15] Shaw S J 2024 *Phys. Rev. E* **109** 055107
- 433 [16] Guédra M, Inserra C, Mauger C, Gilles B 2016 *Phys. Rev. E* **94** 053115
- 434 [17] Li X R, Mo R Y, Wu Y T, Liu Y L, Ma J Y, Zuo X Y, Lei Z K, Wu Y R, Liang Z
- 435 Y, Han L L, Wang C H 2026 *Ultrason. Sonochem.* **129** 107867
- 436 [18] Maksimov A 2020 *Phys. Fluids* **32** 102104
- 437 [19] Mekki-Berrada F, Thibault P, Marmottant P 2016 *Phys. Fluids* **28** 032004
- 438 [20] Sigveland L M, Skjaeveland S M 2021 *Capillarity* **4** 23
- 439 [21] Shikhmurzaev Y D 2005 *C. R. Mec.* **333** 205
- 440 [22] Versluis M, Goertz D E, Palanchon P, Heitman I L, van der Meer S M, Dollet B,
- 441 de Jong N, Lohse D 2010 *Phys. Rev. E* **82** 026321
- 442 [23] Keller J B, Miksis M 1980 *J. Acoust. Soc. Am.* **68** 628
- 443 [24] Cleve S, Guédra M, Inserra C, Mauger C, Blanc-Benon P 2018 *Phys. Rev. E* **98**
- 444 033115
- 445 [25] Guan J H, Tamim S I, Magoon C W, Stone H A, Sáenz P J 2025 *Nat. Commun.*
- 446 **16** 1572
- 447 [26] Guédra M, Inserra C 2018 *J. Fluid Mech.* **857** 681
- 448 [27] Jo D, Revankar S T 2009 *Chem. Eng. Sci.* **64** 3179
- 449 [28] Shaw S J 2025 *Int. J. Multiphase Flow* **184** 105074
- 450 [29] Protopapas E 2025 *Geometry* **2** 11
- 451 [30] Guo C, Wang J, Li X H, Yang S Q, Li W H 2024 *Chem. Eng. Process.* **199** 109765
- 452 [31] Kou S, Chen W Z, Wu Y R, Zhao G Y 2023 *Ultrason. Sonochem.* **94** 106352
- 453 [32] Sugita N, Sugiura T 2017 *Ultrasonics* **74** 174
- 454 [33] Doinikov A A, Bouakaz A 2013 *Phys. Med. Biol.* **58** 6797
- 455 [34] Ida M 2009 *Phys. Rev. E* **79** 016307
- 456 [35] Zhang L L, Wang X, Liang J F 2025 *Phys. Fluids* **37** 086176
- 457 [36] Sojahrood A J, Haghi H, Karshafian R, Kolios M C 2021 *Ultrason. Sonochem.* **72**
- 458 105405
- 459 [37] Nabergoj R, Francescutto A 1979 *J. Phys. Colloques* **40** C8-306

460 [38] Cui J Y, Hamilton M F, Wilson P S, Zabolotskaya E A 2006 *J. Acoust. Soc. Am.*

461 119 2067

462

录用稿件，非最终出版稿

Analysis of Factors Influencing the Nonlinear Morphological Evolution of Bubbles by an Gas Column in a Capillary

WU Yuting^{1,#} LI Xiuru^{2,#} LIU Yalu ZUO Xinyi GUO Xiajie MA Jiayu LEI

Zhaokang FENG Kangyi[†] WANG Chenghui[‡]

(Institute of Shaanxi Key Laboratory of Ultrasonics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract

Under ultrasonic excitation, bubbles in the liquid within a capillary can exhibit a variety of dynamical behaviors, including spherical oscillation, modal oscillation, and irregular surface oscillation. When a gas column is present in the capillary, the gas column and the capillary wall jointly constrain the bubble motion, leading to strong coupling between the translational motion and the radial oscillation of the bubble. An increase in the acoustic pressure amplitude modulates the distance between the bubble and the gas column, causing the bubble to gradually deviate from sphericity and display characteristic morphological evolution. By employing parameters such as circularity, modal dominance, and modal entropy, the bubble morphologies can be classified into three categories: spherical, regular, and irregular. Experimental observations reveal that fluctuations in the acoustic pressure modulate the onset of both stable modal vibration and modal instability in the bubble. In the case of stable modal vibration, the variation in bubble radius is governed by the radial vibration and the dominant mode; whereas under modal instability, the bubble exhibits pronounced non-dominant mode components. The third-order mode of the bubble predominantly occurs in regions relatively far from the gas column, while the fourth- and fifth-order modes are more

frequently observed in the vicinity of the gas column. Under specific conditions, transitions between the fourth- and fifth-order modes can take place, indicating that the bubble morphology is jointly regulated by the gas column and the acoustic pressure. Theoretical analysis demonstrates that the presence of boundaries influences the nonlinear response of the bubble to a certain extent. When the bubble radius approaches approximately 51 μm , its sensitivity to acoustic field conditions and ambient pressure increases significantly. The acoustic pressure threshold for bubble modal excitation has been revised, and the theoretical threshold curve shows good agreement with the experimentally predicted threshold distribution. Within the transition region of the equilibrium radius distributions for bubbles of different modes, fluctuations in the acoustic pressure may excite switching of the bubble surface vibration mode between adjacent orders.

Keywords: bubble modes, capillary, mode transition

*Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12374441, 12534018, 12504538), the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Education of China (Grant No. GK202406034, GK202601015), and the Natural Science Basic Research Plan of Shaanxi Province, China (Grant No. 2025JC-YBQN-066).

† Corresponding author. E-mail: kufeng0205@snnu.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: wangld001@snnu.edu.cn