

基于 Keldysh 场论的均匀耦合BCS模型的非平衡动力学*

陈淑华 廖任远[†]

(福建师范大学物理与能源学院, 福建省量子调控与新能源材料重点实验室, 福建省太阳能转换与储能工程技术研究中心, 福建福州 350117)

量子配对体系在参数骤变后可形成不同于热平衡态的预热动力学相。本文利用Keldysh非平衡场论研究均匀耦合BCS系统淬火后的非平衡动力学, 通过闭合路径积分和复辅助配对场构造有效作用量, 在鞍点近似下导出自洽能隙方程, 并利用Dyson方程推导出在平均场下描述配对动力学的类Bloch方程组, 即动量模式占据数和配对振幅的实时演化方程。对具有双峰均匀能谱分布的体系在淬火后的动力学过程进行数值模拟, 以序参量模长在预热化时间窗内的平均值和标准差判定动力学相。结果表明, 体系可进入序参量衰减至零的动力学退相干相(相I)、趋于非零值的非热稳态相(相II)以及保持持续振荡的动力学振荡相(相III); 振荡相还可按复序参量轨迹是否经过原点分为两类, 其中经过原点的情形伴随约为 π 的相位跳变。数值相边界与Lax矢量解析结果一致。本文进一步建立了理论配对场与腔输出光场正交分量的对应关系, 可由实验信号的幅度、相位和频谱特征识别动力学相, 从而形成连接费米子微观演化、宏观动力学相和实验可观测量的统一场论描述。

关键词: Keldysh场论, BCS模型, 非平衡动力学

PACS: 74.40.Gh, 05.70.Ln, 03.75.Ss

[†] 通信作者. E-mail: ryiliao@fjnu.edu.cn

* 国家自然科学基金(批准号: 12174055)资助的课题.

1 引言

巴丁—库珀—施里弗（Bardeen-Cooper-Schrieffer, BCS）配对体系的非平衡动力学是量子多体物理中的重要问题之一^[1-3]。当对量子多体系统施加快速淬火后，体系通常不会立即达到新的热平衡态，而是在短时瞬态消退后进入长寿命的预热化阶段。在一般非可积体系中，非弹性碰撞等过程可驱动系统在更长时间尺度上进一步热化；而在封闭可积体系或平均场近似下，碰撞过程受到抑制，不同能量模式之间的相位混合可使宏观可观测量长期保持非热的渐近行为。在此阶段内涌现出的不同长时行为被称为预热动力学相^[4]。当对BCS配对体系施加快速淬火后所产生的非平衡动力学相正是预热动力学相。理论研究表明，淬火后的序参量可表现出衰减至零、趋于非零稳定值和持续振荡的三类预热动力学相^[5-9]。需要强调的是，本文所提到的“稳态”是指预热化时间窗口内宏观序参量的长时间渐近行为，而非由环境耗散形成的热化稳态。

近些年来，量子模拟技术的快速发展，为研究这种配对体系淬火后的动力学行为提供了途径^[10-13]。超冷费米气体中的BCS型超流为研究量子多体非平衡动力学提供了理想平台，其中光学微腔中的超冷原子系统因其可精确调控和高度可控的量子态制备能力，成为研究非平衡量子相变和量子淬火动力学的重要实验工具^[14-18]。在腔量子电动力学（cavity quantum electrodynamics, 腔QED）模拟方案中，费米子配对态可编码为原子的长寿命内态，原子通过交换虚腔光子产生等效的无限程吸引相互作用，从而实现均匀耦合BCS模型，并利用腔输出光场实时读取集体配对序参量^[19,20]。与此同时，不同量子模拟平台对配对动力学的探测方式并不相同。腔QED系统可利用与集体原子相干直接耦合的腔输出光场实现对宏观序参量的实时读出，而超冷费米气体中常通过射频谱或动量分辨光电子谱获取配对能隙及单粒子谱函数信息^[21,22]。国内学者近年来也围绕冷原子非平衡量子多体物理、接触相互作用费米气体的淬火动力学及关联演化等问题开展了研究，为认识不同相互作用和维度下量子多体体系的非平衡行为提供了重要参考^[23-27]。不同实验可观测量分别与Keldysh场论中的辅助配对场、异常关联函数及单粒子格林函数建立对应，这也构成采用Keldysh方法研究BCS非平衡动力学的实验动机之一。

已有理论工作常采用Anderson赝自旋图像来描述BCS淬火后的动力学行为，将每个动量配对模式映射为在自洽有效场中进动的赝自旋，使BCS淬火动力学可转化为一组闭合的经典运动方程；进一步利用Lax矢量和模型的可积结构，获得序参量的长时行为及不同动力学相之间的解析边界^[4,28-30]。这些方法在求解封闭均匀耦合模型和判定动力学相方面具有明显优势，但其表述主要针对无碰撞平均场极限。当进一步考虑量子涨落、碰撞自能、耗散以及与外部环境的耦合时，仅采用赝自旋语言不易形成统一的理论

框架。Keldysh非平衡场论作为处理非平衡多体量子系统的标准场论工具，从闭合时间路径上的生成泛函出发，可通过格林函数和自能统一描述体系的实时演化，并能够在平均场结果的基础上自然纳入涨落和耗散修正 [31-33]。因此，有必要从Keldysh场论出发重新建立均匀耦合BCS模型的淬火动力学，在再现已有动力学相分类的同时，给出费米子占据、配对振幅和宏观序参量之间的直接联系。

本文采用Keldysh非平衡场论研究均匀耦合BCS模型淬火后的动力学。通过闭合时间路径积分和鞍点近似推导自洽能隙方程及配对动力学方程，并对双峰均匀能谱体系进行数值计算；在获得动力学相图的基础上，从运动方程分析不同动力学行为的微观来源，同时建立理论配对场与腔输出实验信号之间的对应。本文采用的均匀耦合模型主要对应腔QED系统中的无限程配对相互作用。在仅保留零总动量配对通道并采用鞍点平均场近似时，其自洽动力学结构也可作为弱耦合、s波接触相互作用费米超流体的淬火行为提供参考。然而，本文采用鞍点平均场近似，并忽略了配对场的空间涨落、非弹性碰撞、准粒子散射以及环境耗散。因此，本文结果主要描述碰撞时间尺度之前的预热化动力学，不能直接定量推广到BCS-BEC渡越区或么正区域。在这些强耦合区域，配对涨落、有限寿命准粒子和碰撞积分会显著改变序参量的阻尼、预热化寿命以及动力学相边界。将Keldysh有效作用量扩展到高斯涨落阶，并在Dyson方程中引入碰撞和耗散自能，是研究上述问题的自然途径。本文的重点在于以统一的场论语言连接宏观动力学相、费米子微观演化和实验可观测量，并为进一步研究涨落、耗散及超越平均场效应提供理论基础。

本文结构安排如下。第二节介绍模型哈密顿量，构造 Keldysh 路径积分作用量，并展示如何通过场解耦和鞍点方程得到自洽的非平衡能隙方程。第三节利用 Dyson 方程和 Keldysh 格林函数得到非平衡动力学的类Bloch方程组，并基于方程组进行数值模拟和三种动力学相分析，随后建立 Keldysh 经典辅助场与腔 QED 实验可观测量之间的对应关系。第四节给出总结。

2 模型与 Keldysh 作用量构造

我们考虑传统超流体和超导体中零动量配对模的 BCS 哈密顿量 [8]

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma} - \hbar \chi \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{c}_{\mathbf{k} \uparrow}^{\dagger} \hat{c}_{-\mathbf{k} \downarrow}^{\dagger} \hat{c}_{-\mathbf{k}' \downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}' \uparrow}. \quad (1)$$

其中， $\hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma}^{\dagger}$ 和 $\hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma}$ 分别表示动量 $\mathbf{k}$ 、自旋 $\sigma = \uparrow, \downarrow$ 的费米子产生和湮灭算符； $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu$ 为单粒子色散关系，其中 μ 是化学势， m 是粒子质量； $\chi > 0$ 表示有效吸引相互作用强度。在腔QED模拟实验中，BCS吸引相互作用可等效为由虚光子交换诱导的无限范围自旋交换相互作用 [15,34]。本文只考虑Cooper对之间相互作用强度均匀的情形。后续计算令 $\hbar = 1$ 。

为研究该系统淬火后的非平衡动力学演化，我们采用 Keldysh 闭合时间路径积分形式。Keldysh 场论通过在闭合时间回路（从 $t = -\infty$ 到 $t = +\infty$ ，然后折返）上定义路径积分，将系统的正向与反向时间演化统一纳入生成泛函，从而精确描述非平衡量子多体系统的动力学过程。用 Grassmann 变量 $\bar{\psi}$ 和 ψ 编码对应的费米子产生、湮灭算符，系统的生成泛函为 $Z = \text{Tr} \left[\rho_0 T_C \exp \left(-i \int_C dt \hat{H}(t) \right) \right]$ ，其中 ρ_0 是淬火前初态的密度矩阵， T_C 表示沿闭合时间路径的排序。初态信息等价地进入 Keldysh 格林函数的边界条件；在后续平均场数值计算中，该信息由 $n_{\mathbf{k}}(0)$ 和 $p_{\mathbf{k}}(0)$ 给定。则闭合路径上的作用量 S 为：

$$\begin{aligned} S &= \int_C dt \left[\sum_{\mathbf{k}, \sigma} \bar{\psi}_{\mathbf{k}\sigma}(t) (i\partial_t - \varepsilon_{\mathbf{k}}) \psi_{\mathbf{k}\sigma}(t) + \chi \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \bar{\psi}_{\mathbf{k}\uparrow}(t) \bar{\psi}_{-\mathbf{k}\downarrow}(t) \psi_{-\mathbf{k}\downarrow}(t) \psi_{\mathbf{k}\uparrow}(t) \right] \\ &= \int_C dt \left[\sum_{\mathbf{k}, \sigma} \bar{\psi}_{\mathbf{k}\sigma}(t) (i\partial_t - \varepsilon_{\mathbf{k}}) \psi_{\mathbf{k}\sigma}(t) - \frac{|\Delta(t)|^2}{\chi} \right. \\ &\quad \left. + \Delta^*(t) \sum_{\mathbf{k}'} \psi_{-\mathbf{k}'\downarrow}(t) \psi_{\mathbf{k}'\uparrow}(t) + \Delta(t) \sum_{\mathbf{k}} \bar{\psi}_{\mathbf{k}\uparrow}(t) \bar{\psi}_{-\mathbf{k}\downarrow}(t) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

在第二行中，我们应用了 Hubbard-Stratonovich 变换，引入复辅助场 $\Delta(t)$ 及其复共轭 $\Delta^*(t)$ 去解耦四费米子相互作用项。

将闭合时间回路上的路径积分分解为正向支路（用上标 + 表示）和反向支路（用上标 - 表示）上，并施行 Keldysh 旋转，旋转后对于费米场定义新分量 $\psi_{\mathbf{k}}^1(t)$ 和 $\psi_{\mathbf{k}}^2(t)$ 及其独立共轭 $\bar{\psi}_{\mathbf{k}}^1(t)$ 和 $\bar{\psi}_{\mathbf{k}}^2(t)$ ，对于辅助场定义经典分量 $\Delta_{cl}(t)$ 和 $\Delta_q(t)$

$$\psi_{\mathbf{k}}^{1(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{\mathbf{k}}^+ \pm \psi_{\mathbf{k}}^-)_t, \bar{\psi}_{\mathbf{k}}^{1(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{\mathbf{k}}^+ \mp \bar{\psi}_{\mathbf{k}}^-)_t; \quad (3a)$$

$$\Delta_{cl(q)}(t) = \frac{1}{2} (\Delta^+ \pm \Delta^-)_t. \quad (3b)$$

成对指标 1(2) 和 cl(q) 分别对应式中上方（下方）的符号。Keldysh 旋转变换后会额外引入一个 Keldysh 子空间，因此我们定义 Keldysh-Nambu 旋量

$$\Psi_{\mathbf{k}}(t) = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{k}\uparrow}^1 & \bar{\psi}_{-\mathbf{k}\downarrow}^1 & \psi_{\mathbf{k}\uparrow}^2 & \bar{\psi}_{-\mathbf{k}\downarrow}^2 \end{pmatrix}_t^T, \bar{\Psi}_{\mathbf{k}}(t) = (\bar{\psi}_{\mathbf{k}\uparrow}^1, \psi_{-\mathbf{k}\downarrow}^1, \bar{\psi}_{\mathbf{k}\uparrow}^2, \psi_{-\mathbf{k}\downarrow}^2)_t. \quad (4)$$

为了保持形式的统一，对于配对场定义

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{cl}(t) & \Delta_q(t) \end{pmatrix}^T, \bar{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{cl}^*(t) & \Delta_q^*(t) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

则作用量可表示为

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' \left[\sum_{\mathbf{k}} \left(\bar{\Psi}_{\mathbf{k}}(t) \hat{G}_{\mathbf{k}}^{-1}(t, t') \Psi_{\mathbf{k}}(t') \right) - \bar{\Phi}(t) \hat{D}^{-1}(t, t') \Phi(t') \right]. \quad (6)$$

其中 $\hat{G}_{\mathbf{k}}^{-1}(t, t')$ 是在 4×4 Keldysh-Nambu空间下的逆格林函数, 包含了所有系统参数和场耦合信息, 具有如下结构

$$\hat{G}_{\mathbf{k}}^{-1}(t, t') = \delta(t, t') \begin{pmatrix} i\partial_t - \varepsilon_{\mathbf{k}} & \Delta_{cl}(t) & 0 & \Delta_q(t) \\ \Delta_{cl}^*(t) & i\partial_t + \varepsilon_{\mathbf{k}} & \Delta_q^*(t) & 0 \\ 0 & \Delta_q(t) & i\partial_t - \varepsilon_{\mathbf{k}} & \Delta_{cl}(t) \\ \Delta_q^*(t) & 0 & \Delta_{cl}^*(t) & i\partial_t + \varepsilon_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

以及 $\hat{D}^{-1}(t, t')$ 具有以下结构

$$\hat{D}^{-1}(t, t') = \frac{2}{\chi} \delta(t, t') \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Keldysh旋转后得到的作用量对于费米子场是二次型的, 对 $\bar{\Psi}_{\mathbf{k}}(t)$ 及 $\Psi_{\mathbf{k}}(t')$ 进行高斯积分, 得到仅依赖于辅助场的有效作用量 S_{eff}

$$S_{eff} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' \left[-\bar{\Phi}(t) \hat{D}^{-1}(t, t') \Phi(t') - i \sum_{\mathbf{k}} \text{Tr} \ln \left(\hat{G}_{\mathbf{k}}^{-1}(t, t') \right) \right]. \quad (9)$$

为了提取系统淬火后的动力学行为, 接下来我们应用鞍点方程, 在等时条件下 $t = t'$, 计算 S_{eff} 对辅助场量子分量 $\Delta_q^*(t)$ 的泛函变分并忽略高阶量子涨落项的影响

$$\left. \frac{\delta S_{eff}}{\delta \Delta_q^*(t)} \right|_{\Delta_q=0} = 0. \quad (10)$$

由此可自然得到描述序参量实时演化的自洽能隙方程

$$\Delta_{cl}(t) = -\chi \sum_{\mathbf{k}} \langle \psi_{\mathbf{k}\uparrow} \psi_{-\mathbf{k}\downarrow} \rangle_t. \quad (11)$$

3 非平衡运动方程与动力学相

3.1 类 Bloch 动力学方程

在Keldysh场论中, 系统的动力学信息隐藏在Keldysh格林函数 $\hat{G}^K(t, t')$ 中。在本节我们利用 Dyson 方程导出系统的动力学方程。

在鞍点近似下忽略量子涨落, 得到

$$\hat{G}_0^{-1}(t, t') = \delta(t - t') \begin{pmatrix} [G_0^R]^{-1} & 0 \\ 0 & [G_0^A]^{-1} \end{pmatrix}, [G_0^{R/A}]^{-1} = \begin{pmatrix} i\partial_t - \varepsilon_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & i\partial_t + \varepsilon_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

应用 Dyson 方程 $(\hat{G}_0^{-1} - \Sigma) \circ \hat{G}_{\mathbf{k}} = I$ ，将其展开为 Keldysh 分量，在平均场下忽略碰撞和涨落即令自能项 $\Sigma^K = 0$ ，则有

$$\begin{pmatrix} [G^R]^{-1} & [G^{-1}]^K \\ 0 & [G^A]^{-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} G^R & G^K \\ 0 & G^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(t-t') & 0 \\ 0 & \delta(t-t') \end{pmatrix}. \quad (13)$$

其中“ $\circ$ ”表示时间卷积以Nambu空间中的矩阵乘法，展开上式可得到

$$(i\partial_t - \mathcal{H}_{\text{BdG}}(t))G^K(t, t') = 0. \quad (14)$$

等时 $t = t'$ 条件下，我们得到 Keldysh 格林函数所满足的运动方程：

$$i\partial_t \hat{G}^K(t) = [\hat{\mathcal{H}}_{\text{BdG}}(t), \hat{G}^K(t)]. \quad (15)$$

其中 $\hat{\mathcal{H}}_{\text{BdG}}(t)$ 由 $\hat{G}_{\mathbf{k}}^{-1}(t)$ 左上角的推迟格林函数给出， $\hat{G}^K(t)$ 由 Kamenev 所著书 [32] 中对 Keldysh 格林函数的定义可得

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{BdG}}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}} & -\Delta_{cl} \\ -\Delta_{cl}^* & -\varepsilon_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_t, \hat{G}^K(t) = -i \begin{pmatrix} 1 - 2n_{\mathbf{k}\uparrow} & 2p_{\mathbf{k}} \\ 2p_{-\mathbf{k}}^* & 2n_{-\mathbf{k}\downarrow} - 1 \end{pmatrix}_t. \quad (16)$$

上式中我们定义了动量模式占据数 $n_{\mathbf{k}\uparrow}(t) = \langle \bar{\psi}_{\mathbf{k}\uparrow} \psi_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle_t$ 和配对振幅 $p_{\mathbf{k}}(t) = \langle \psi_{\mathbf{k}\uparrow} \psi_{-\mathbf{k}\downarrow} \rangle_t$ 及其共轭。将 (16) 式代入(15)式并计算对易关系后我们能得到一组类Bloch运动方程

$$i\frac{\partial}{\partial t} n_{\mathbf{k}\uparrow}(t) = \Delta_{cl}(t) p_{-\mathbf{k}}^*(t) - p_{\mathbf{k}}(t) \Delta_{cl}^*(t), \quad (17a)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} n_{-\mathbf{k}\downarrow}(t) = -\Delta_{cl}^*(t) p_{\mathbf{k}}(t) + p_{-\mathbf{k}}^*(t) \Delta_{cl}(t), \quad (17b)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} p_{\mathbf{k}}(t) = 2\varepsilon_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t) + \Delta_{cl}(t) [1 - n_{-\mathbf{k}\downarrow}(t) - n_{\mathbf{k}\uparrow}(t)], \quad (17c)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} p_{-\mathbf{k}}^*(t) = -2\varepsilon_{\mathbf{k}} p_{-\mathbf{k}}^*(t) - \Delta_{cl}^*(t) [1 - n_{-\mathbf{k}\downarrow}(t) - n_{\mathbf{k}\uparrow}(t)]. \quad (17d)$$

考虑自旋对称的情况，可令 $n_{\mathbf{k}\uparrow}(t) = n_{-\mathbf{k}\downarrow}(t) = n_{\mathbf{k}}(t)$ 。 $p_{-\mathbf{k}}^*(t)$ 是 $p_{\mathbf{k}}(t)$ 的复共轭量，不提供新的独立动力学信息。故 (17) 式四个方程可约化为两个独立方程

$$i\frac{\partial}{\partial t} n_{\mathbf{k}}(t) = \Delta_{cl}(t) p_{\mathbf{k}}^*(t) - p_{\mathbf{k}}(t) \Delta_{cl}^*(t), \quad (18a)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} p_{\mathbf{k}}(t) = 2\varepsilon_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t) + \Delta_{cl}(t) [1 - 2n_{\mathbf{k}}(t)]. \quad (18b)$$

这里 $n_{\mathbf{k}}(t)$ 描述淬火后动量模式 $\mathbf{k}$ 上的非平衡占据， $p_{\mathbf{k}}(t)$ 描述 $\mathbf{k}\uparrow$ 与 $-\mathbf{k}\downarrow$ 两个费米子之间的配对振幅。故所引入的辅助场 $\Delta_{cl}(t)$ 是所有动量模式的配对振幅 $p_{\mathbf{k}}(t)$ 相干叠加后形成的宏观配对场。(11) 式和 (18) 式完整描述了封闭 BCS 系统淬火后的非平衡演化。

3.2 动力学相

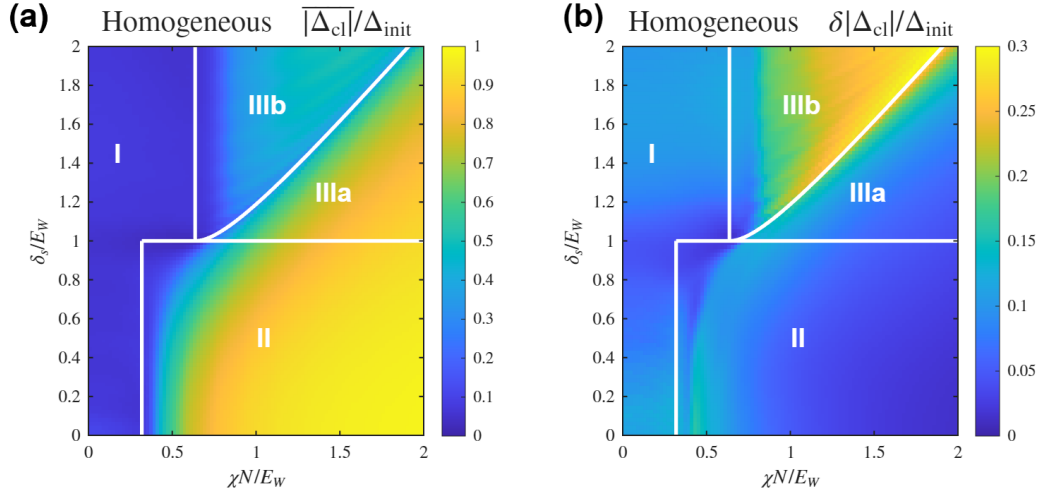


图 1 均匀耦合BCS模型的动力学相图。横、纵坐标分别为无量纲集体相互作用强度 $\chi N/E_W$ 和双峰能谱中心分裂 δ_s/E_W 。(a) 归一化序参量模长在预热化时间窗内的长时间平均值 $\overline{|\Delta_{cl}|}/\Delta_{init}$ ；(b) 同一时间窗内的归一化序参量模长的长时间标准差 $\delta|\Delta_{cl}|/\Delta_{init}$ 。白色实线为Anderson赝自旋表示下由Lax矢量方法得到的解析相边界。

Fig. 1. Dynamical phase diagram of the homogeneously coupled BCS model. The horizontal and vertical axes denote the dimensionless collective interaction $\chi N/E_W$ and the normalized separation δ_s/E_W between the centers of the two spectral subbands, respectively. (a) Long-time average of the normalized order-parameter magnitude over the prethermal window, $\overline{|\Delta_{cl}|}/\Delta_{init}$; (b) Long-time standard deviation of the normalized order-parameter magnitude over the prethermal window, $\delta|\Delta_{cl}|/\Delta_{init}$. The white solid lines are the analytical phase boundaries obtained from the Lax-vector construction in the Anderson-pseudospin representation.

为了系统地研究淬火后的非平衡动力学，我们对上一节Keldysh平均场动力学方程（11）（18）式进行数值模拟。在数值模拟中，我们考虑腔QED实验对应的BCS初态^[19]：该初态是一个具有最大相干配对的BCS初态，可理解为所有动量模式中的Cooper对具有相同相位，由此得到初始条件 $n_{\mathbf{k}}(0) = 1/2, p_{\mathbf{k}}(0) = 1/2$ ，和对应初始能隙 $\Delta_{init} = |\Delta_{cl}(0)| = |-\chi \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(0)| = \chi N/2$ ，其中 N 表示参与配对动力学的离散总动量模式数。通过突然引入有限单粒子色散 $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ 实现淬火过程^[8]。为了清晰展示淬火后产生的三种动力学相的区别，这里采用双峰均匀分布来模拟具有能量分裂和有限带宽的单粒子能谱：

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}/\hbar \in \left[-\frac{\delta_s}{2} - \frac{E_W}{2}, -\frac{\delta_s}{2} + \frac{E_W}{2} \right] \cup \left[\frac{\delta_s}{2} - \frac{E_W}{2}, \frac{\delta_s}{2} + \frac{E_W}{2} \right]. \quad (19)$$

其中 E_W 表示每个子带内部的频率宽度， δ_s 表示两个子带中心之间的频率分裂。对于双峰能谱，每个子带分别有 $N/2$ 个等间距离散动量模式。在数值模拟中取 $E_W = 1$ 作为频率单位，并采用无量纲时间 $\tau = E_W t / 2\pi$ 。对运动方程(11)(18)进行无量纲操作后，发现运动方程中独立的无量纲参数为 $\chi N / E_W$ 和 δ_s / E_W 。 $\chi N / E_W$ 表示集体相互作用强度与子带能谱宽度的竞争， δ_s / E_W 表示两个子带中心角频率分裂相对于带内能谱宽度的大小，并决定两子带处于谱重叠还是完全分离状态。故在固定初始条件、能谱形状和每个子带动量模式数后，可通过改变无量纲参数 $\chi N / E_W$ 和 δ_s / E_W 获得系统的非平衡动力学相图。

为获得理想无耗散均匀耦合模型的渐近相图，数值模拟采用较长的无量纲时间区间，对每一个参数点 $(\chi N / E_W, \delta_s / E_W)$ ，序参量 $\Delta_{cl}(t)$ 的演化区间取 $E_W t / 2\pi \in [0, 30]$ 。本文用序参量模长的长时间平均值和标准差来区分不同的动力学相，得到图1所示的相图。图1(a)和图1(b)中的彩色背景由Keldysh平均场动力学方程(11)和(18)的有限时间数值积分得到，白色实线则表示热力学极限下由Anderson膺自旋表示中的Lax矢量构造得到的解析动力学相边界^[19]。两者在有限时间和有限动量模式数所允许的误差范围内吻合良好，表明Keldysh鞍点动力学与Anderson膺自旋动力学在平均场层面给出一致的动力学相分类，也进一步验证了本文方法的正确性。

序参量的长时间平均值和标准差的具体定义为

$$\overline{|\Delta_{cl}|} = \frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T |\Delta_{cl}(t)| dt, \quad (20)$$

$$\delta |\Delta_{cl}| = \left[\frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T \left(|\Delta_{cl}(t)| - \overline{|\Delta_{cl}|} \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

其中 T_0 为去除淬火后短时瞬态后所选取时间窗口的起始时刻， T 为所选取时间窗的终止时刻。在热力学极限和无限长时间极限下，三种动力学相的渐近判据为：相 I: $\overline{|\Delta_{cl}|} = 0, \delta |\Delta_{cl}| = 0$ ；相 II: $\overline{|\Delta_{cl}|} > 0, \delta |\Delta_{cl}| = 0$ ；相 III: $\overline{|\Delta_{cl}|} > 0, \delta |\Delta_{cl}| > 0$ 。图1(a)展示了由 $\overline{|\Delta_{cl}|}$ 得到的相图。可以看到，在较小的 $\chi N / E_W$ 区域，序参量模长的长时间平均值接近零，对应于相 I；当相互作用增强后，系统进入具有非零序参量的区域，对应相 II和相 III。图1(b)给出了序参量模长的长时间标准差 $\delta |\Delta_{cl}|$ 的分布，通过与图1(a)对比可以看出，相 II和相 III都具有非零的长时间序参量，但二者的区别在于：相 II中长时间序参量的振荡幅度趋于零，而相 III中长时间序参量的振荡幅度大于零。因此 $\overline{|\Delta_{cl}|}$ 用于判断宏观配对场是否存在，而 $\delta |\Delta_{cl}|$ 则用于判断该配对场是静态稳定还是周期振荡。

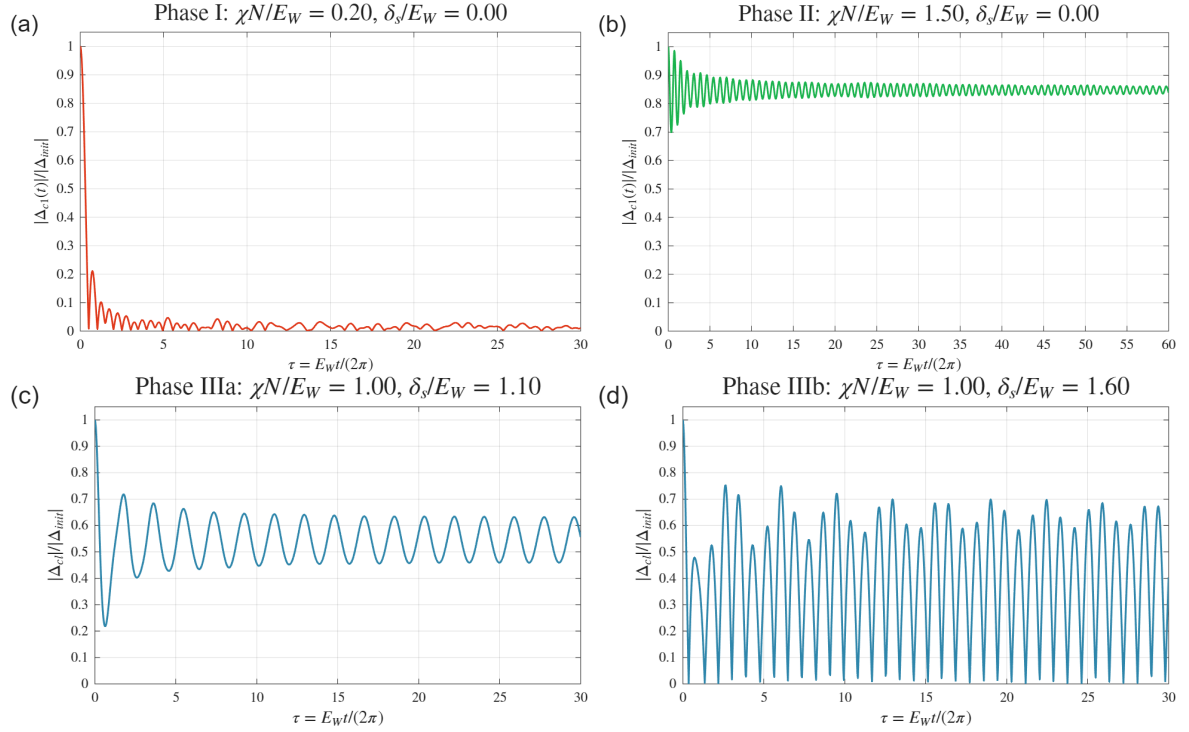


图 2 四个代表性参数点处归一化序参量模长的时间演化。横轴为无量纲时间 $\tau = E_W t / 2\pi$ ，纵轴为 $|\Delta_{cl}| / \Delta_{init}$ 。(a) 相I, $\chi N / E_W = 0.20, \delta_s / E_W = 0.00$: 序参量由于不同动量模式之间的相位混合而衰减至零; (b) 相II, $\chi N / E_W = 1.50, \delta_s / E_W = 0.00$: 序参量在短时阻尼振荡后趋于非零常数, 有限动量模式数会导致弱残余振荡; (c) 相IIIa, $\chi N / E_W = 1.00, \delta_s / E_W = 1.10$: 序参量模长围绕非零值持续振荡且始终不为零; (d) 相IIIb, $\chi N / E_W = 1.00, \delta_s / E_W = 1.60$: 序参量模长持续振荡并周期性到达零点。

Fig. 2. Time evolution of the normalized order-parameter magnitude at four representative parameter points. The horizontal axis is the dimensionless time $\tau = E_W t / 2\pi$, and the vertical axis is $|\Delta_{cl}| / \Delta_{init}$.

(a) Phase I, $\chi N / E_W = 0.20, \delta_s / E_W = 0.00$: the order parameter decays to zero owing to dephasing among different energy modes; (b) Phase II, $\chi N / E_W = 1.50, \delta_s / E_W = 0.00$: after transient damped oscillations, the order parameter approaches a nonzero prethermal plateau, with weak residual oscillations caused by the finite number of modes; (c) Phase IIIa, $\chi N / E_W = 1.00, \delta_s / E_W = 1.10$: the order-parameter magnitude exhibits persistent oscillations about a nonzero value and never vanishes; (d) Phase IIIb, $\chi N / E_W = 1.00, \delta_s / E_W = 1.60$: the order-parameter magnitude exhibits persistent oscillations and periodically reaches zero.

为便于与实验参数定量比较，定义带宽、集体相互作用和子带中心分裂所对应的普通频率为

$$f_E = \frac{E_W}{2\pi}, \quad f_\chi = \frac{\chi N}{2\pi}, \quad f_\delta = \frac{\delta_s}{2\pi}. \quad (22)$$

则本文相图的无量纲变量与实验频率之间满足

$$f_\chi = \frac{\chi N}{E_W} f_E, \quad f_\delta = \frac{\delta_s}{E_W} f_E, \quad \tau = \frac{E_W t}{2\pi} = f_E t. \quad (23)$$

因此，当 f_E 以MHz为单位， t 以 μs 为单位，有

$$t(\mu s) = \frac{\tau}{f_E(\text{MHz})}. \quad (24)$$

在给定实验 E_W 后，本文相图中的每一个参数点和时间轨迹均可以转换为实际的MHz和 μs 单位。需要强调的是，本文用于确定理想动力学相的长时间窗口描述无耗散模型的渐近行为，而实验中则需采用有限时间窗的平均量和频谱特征作为相应代理量。在腔QED模拟实验中^[19]，探索相图采用的有限时间窗口为 $3\mu s \sim 8\mu s$ ，则在固定 $f_E = 0.46\text{MHz}$ 时对应无量纲时间 $\tau \in [1.38, 3.68]$ ，这个时间对于本文所不考虑耗散、涨落的均匀耦合BCS模型过短。此外，考虑到实验在实现相II的过程中观测到的最大相干时间约为 $t = 29\mu s$ （固定 $f_E = 0.83\text{MHz}$ ，对应 $\tau \in [2.49, 24.07]$ ）。为同时展示短时瞬态和长时间渐近行为，图1相图计算统一采用 $\tau \in [2, 30]$ ；图2(a)、(c)、(d)采用 $\tau \in [0, 30]$ ，图2(b)延长至 $\tau \in [0, 60]$ ，以检验相II趋于非零值的稳定性。图2采用 $\tau = E_W t / 2\pi$ 作为时间坐标，便于统一比较不同动力学相，并突出能谱展宽所决定的相位混合尺度；图3主要讨论相III中的持续集体振荡，因此采用 $\tau_\chi = \chi N t / 2\pi$ 更能体现相互作用主导的动力学特征。两种标度仅是不同的时间单位选择，其换算关系为 $\tau_\chi = (\chi N / E_W) \tau$ 。图3所取参数满足 $\chi N / E_W = 1.00$ ，故两种无量纲时间在该参数点数值相同。因而采用两种标度并非数值计算所必需，而是为了分别突出由能谱展宽和集体相互作用决定的物理时间尺度。

为了更直观地展示不同区域中的动力学行为，图2给出了四个代表性参数点处 $\Delta_{cl}(t)$ 的演化。图2(a)对应相I。在该区域中，序参量从初始值迅速衰减到零。由式(18b)可见，在较小相互作用强度下， $\chi N \ll E_W$ ，第一项由 $2\varepsilon_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t)$ 主导，第二项中配对驱动项 $\Delta_{cl}(t)[1 - 2n_{\mathbf{k}}(t)]$ 可以忽略，配对振幅近似满足 $i\partial_t p_{\mathbf{k}}(t) \simeq 2\varepsilon_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t)$ ，从而可得到

$$p_{\mathbf{k}}(t) \approx p_{\mathbf{k}}(0) e^{-i2\varepsilon_{\mathbf{k}} t}. \quad (25)$$

在均匀分布的能量展宽 E_W 内，对所有动量模式求和得到序参量

$$\Delta_{cl}(t) \approx -\chi \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(0) e^{-i2\varepsilon_{\mathbf{k}} t} = -\frac{\chi}{2} \frac{N}{E_W} \int_{-E_W/2}^{E_W/2} e^{-i2\varepsilon_{\mathbf{k}} t} d\varepsilon_{\mathbf{k}} = -\frac{\chi}{2} \frac{N}{E_W} \frac{\sin(E_W t)}{t}. \quad (26)$$

将对初始能隙值规范化处理后有

$$\frac{|\Delta_{cl}(t)|}{\Delta_{init}} = \left| \frac{\sin(E_W t)}{E_W t} \right| = |\text{sinc}(E_W t)|. \quad (27)$$

其中 $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ 。分析 (27) 式的长时间行为, 可看出 $\Delta_{cl}(t)$ 按照 sinc 函数衰减, 衰减时标由能量展宽 E_W 决定。同时由 (18a) 可看出, $n_{\mathbf{k}}(t)$ 冻结在初始值 $1/2$, 每个动量模式的费米子占据数保持均匀。这说明淬火后每个动量模式上仍然存在瞬时配对振幅 $p_{\mathbf{k}}(t)$, 但不同动量模式以不同频率进动, 并逐渐失去共同相位 $\sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t) \rightarrow 0$, 导致宏观相干叠加消失。因此, 相I并不意味着每个动量模式上的瞬时配对关联均消失, 而是不同模式之间的相位相干在连续能谱极限下被相位混合消除, 使宏观序参量在预热化时间尺度内渐近衰减至零。

图 2 (b) 对应相II。与相I不同, 序参量在短时阻尼振荡之后不衰减至零, 而是在预热化时间窗口内趋于有限的非零渐近值, 即 $\Delta_{cl}(t) \rightarrow \Delta_{\infty} \neq 0$ 。在有限 N 数值计算中, 离散能级之间的相位混合不完全, 因此仍会保留弱残余振荡; 这些振荡不改变其相II的渐近分类。如图 2 (b) 给出序参量在 $\tau \in [0, 60]$ 区间内的演化。随着相互作用 χN 增强, 配对方程右边两项在数量级上相当, 配对驱动项不能再忽略且与第一项发生非线性竞争。分析 $\Delta_{cl}(t)$ 的稳定性, 系统最终会趋于稳态, 具有有限序参量 Δ_{∞} 。当系统处于稳态, 则有 $i\partial_t n_{\mathbf{k}}(t) = 0$, $i\partial_t p_{\mathbf{k}}(t) = 0$, 计算得到

$$\text{Im}(\Delta_{cl}^* p_{\mathbf{k}}) = 0, \quad (28a)$$

$$p_{\mathbf{k}}^{\infty} = -\frac{\Delta_{\infty}(1 - 2n_{\mathbf{k}}^{\infty})}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (28b)$$

$$\Delta_{\infty} = \chi \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_{\infty}(1 - 2n_{\mathbf{k}}^{\infty})}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (28c)$$

由 (28a) 可知 $p_{\mathbf{k}}$ 与 Δ_{cl} 的相位差只能取 0 或者 π , 非零的 Δ_{∞} 表明每个动量模式 $\mathbf{k}$ 上的费米子不再自由进动, 而是被序参量产生的配对场拉向同一方向, 倾向将每个动量模式锁定在配对场方向。这说明非零的自洽配对场使不同能量模式在平均场演化中保持有限的集体相干, 从而避免宏观序参量像相I那样完全相位混合至零。由 (28c) 式也可看出非热稳态的序参量与平衡BCS能隙方程形式相同, 但 $n_{\mathbf{k}}^{\infty}$ 是通过非平衡演化自然选择的, 一般不等于热平衡分布, 且 Δ_{∞} 一般不等于平衡值 Δ_{eq} (通常 $\Delta_{\infty} < \Delta_{eq}$)。

图 2 (c) 和图 2 (d) 对应相III。该区域中, $\Delta_{cl}(t)$ 既不衰减到零, 也不趋于时间无关的常数, 而是在长时间极限下保持持续振荡。当双峰能谱的两个子带彼此分离时, 每个子带内部的动量模式可以分别形成集体相干; 由于两个子带具有不同的中心频率, 它们对宏观序参量的贡献随时间发生相对运动, 从而产生持续的序参量振荡。

按照式 (19)，将全部动量模式分为两个子带 S_1 和 S_2 ，其中心频率分别为 $\varepsilon_1 = -\delta_s/2$ 和 $\varepsilon_2 = +\delta_s/2$ 。

定义两个子带的集体配对振幅和动量模式占据数为

$$P_j(t) = \sum_{k \in S_j} p_k(t) = R_j(t) e^{-i\phi_j(t)}, \quad N_j(t) = \sum_{k \in S_j} n_k(t), \quad j = 1, 2. \quad (29)$$

其中， $R_j(t) = |P_j(t)|$ 和 $\phi_j(t)$ 分别表示第 j 个子带集体配对振幅的模长和相位。由自洽能隙方程 (11) 可得

$$\Delta_{\text{cl}}(t) = -\chi [P_1(t) + P_2(t)]. \quad (30)$$

定义两个子带的相对相位 $\Delta\phi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$ ，则序参量模长满足

$$|\Delta_{\text{cl}}(t)|^2 = \chi^2 [R_1^2(t) + R_2^2(t) + 2R_1(t)R_2(t) \cos \Delta\phi(t)]. \quad (31)$$

则上式表明，相 III 中序参量的持续振荡来源于两个子带集体配对振幅的相干叠加。一般而言，序参量过零要求两个子带的集体配对贡献同时满足 $R_1(t) = R_2(t)$ 和 $\Delta\phi(t) = (2m+1)\pi$ ，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 。对于本文采用的对称双峰能谱和对称初态，两个子带在演化中保持对称的集体振幅，因此序参量是否经过原点主要取决于相对相位是否达到奇数倍 π 。

为说明有限带宽对相对相位演化的影响，将子带内各模式的频率写为 $\varepsilon_k = \varepsilon_j + \xi_k$ ，其中 $k \in S_j$ ， ξ_k 表示该模式相对于子带中心的频率偏移。对式 (18a) 和式 (18b) 在每个子带内求和，可得

$$\begin{aligned} i\partial_t P_j &= 2\varepsilon_j P_j + 2Q_j + \Delta_{\text{cl}} Z_j, \\ \partial_t N_j &= 2\text{Im}(\Delta_{\text{cl}} P_j^*), \\ Q_j(t) &= \sum_{k \in S_j} \xi_k p_k(t), \quad Z_j(t) = \sum_{k \in S_j} [1 - 2n_k(t)]. \end{aligned} \quad (32)$$

其中， $Q_j(t)$ 包含同一子带内不同频率模式的相位分布和配对振幅差异，表示有限子带宽度引起的带内动力学贡献。将 $P_j = R_j e^{-i\phi_j}$ 代入 (32) 式，可得到两个子带集体相对相位的演化方程

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta\phi &= 2\delta_s + \frac{1}{R_2} \text{Re}[(2Q_2 + \Delta_{\text{cl}} Z_2) e^{i\phi_2}] \\ &\quad - \frac{1}{R_1} \text{Re}[(2Q_1 + \Delta_{\text{cl}} Z_1) e^{i\phi_1}]. \end{aligned} \quad (33)$$

(33) 式第一项来源于两个子带中心频率的差异，使集体相对相位倾向于随时间累积；其余各项来源于有限带宽内不同动量模式与自洽配对场的共同演化，并对相对相位的变化速率产生动态反馈。因此，对于有限带宽双峰能谱，相对相位的演化取决于 δ_s/E_W 和 $\chi N/E_W$ 的共同作用，而不能仅由 δ_s 与 χN 的简单大小关系确定。

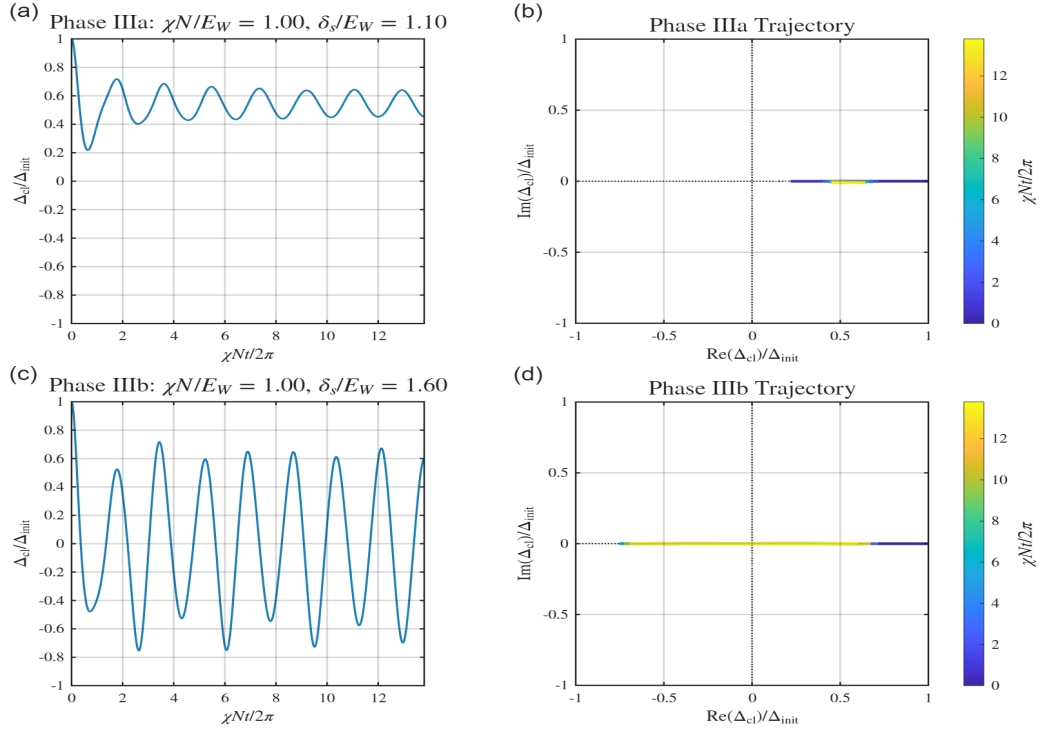


图 3 相IIIa和相IIIb中归一化复序参量的时间演化及其复平面轨迹。(a) 相IIIa, $\chi N/E_W = 1.00, \delta_s/E_W = 1.10$: $\Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$ 随无量纲时间 $\tau_\chi = \chi N t/2\pi$ 的演化, 序参量绕非零振荡; (b) 相IIIa的复平面轨迹, 横、纵坐标分别为 $\text{Re}\Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$ 和 $\text{Im}\Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$, 颜色表示演化时间, 轨迹始终不经过原点; (c) 相IIIb, $\chi N/E_W = 1.00, \delta_s/E_W = 1.60$: $\Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$ 随无量纲时间 $\tau_\chi = \chi N t/2\pi$ 的演化, 序参量围绕零值振荡; (d) 相IIIb的复平面轨迹, 横、纵坐标分别为 $\text{Re}\Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$ 和 $\text{Im}\Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$, 颜色表示演化时间, 轨迹周期性经过原点, 并伴随约为 π 的相位跳变。

Fig. 3. Time evolution of the normalized complex order parameter and its trajectory in the complex plane in phases IIIa and IIIb. (a) Phase IIIa, $\chi N/E_W = 1.00$ and $\delta_s/E_W = 1.10$: evolution of $\Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$ as a function of the dimensionless time $\tau_\chi = \chi N t/(2\pi)$, where the order parameter oscillates around a nonzero value; (b) Complex-plane trajectory in phase IIIa. The horizontal and vertical axes represent $\text{Re} \Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$ and $\text{Im} \Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$, respectively. The color denotes the evolution time, and the trajectory never passes through the origin; (c) Phase IIIb, $\chi N/E_W = 1.00$ and $\delta_s/E_W = 1.60$: evolution of $\Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$ as a function of the dimensionless time $\tau_\chi = \chi N t/(2\pi)$, where the order parameter oscillates around zero; (d) Complex-plane trajectory in phase IIIb. The horizontal and vertical axes represent $\text{Re} \Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$ and $\text{Im} \Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$, respectively. The color denotes the evolution time. The trajectory periodically passes through the origin, accompanied by phase jumps of approximately π .

为给出更直观的物理图像，下面进一步采用两集体模式近似：忽略每个子带内部的频率展宽，即取 $Q_j \simeq 0$ ，并假设同一子带内的动量模式具有近似相同的动量模式占据数和配对相位

$$p_k^{(j)}(t) \simeq \bar{p}_j(t)e^{-i\phi_j(t)}, \quad n_k^{(j)}(t) \simeq n_j(t). \quad (34)$$

对于对称初态，有 $n_1(t) + n_2(t) = 1$ 。利用每个模式的守恒关系 $|\bar{p}_j|^2 = n_j(1 - n_j)$ ，式（18）可近似约化为

$$\partial_t n_1 \simeq \chi N n_1 (1 - n_1) \sin \Delta\phi, \quad (35a)$$

$$\partial_t n_2 \simeq -\chi N n_2 (1 - n_2) \sin \Delta\phi, \quad n_2 = 1 - n_1, \quad (35b)$$

$$\partial_t \Delta\phi \simeq 2\delta_s + \chi N (1 - 2n_1) (1 + \cos \Delta\phi). \quad (35c)$$

（35a）式和（35b）式表明，两个子带的模式占据数作方向相反的变化；（35c）式表明，模式占据数变化和自洽配对场会反过来修正相对相位的变化速率。例如，当 $0 < \Delta\phi < \pi$ 时，式（35a）使 n_1 从初始值 $1/2$ 开始增大，因而 $\chi N (1 - 2n_1) (1 + \cos \Delta\phi) < 0$ ，该反馈项将减小 $\partial_t \Delta\phi$ 。在这一近似图景下，相对相位的增加可以通过模式占据数变化产生反向反馈。需要强调的是，（35a）式–（35c）式忽略了有限带宽项 Q_j ，仅用于说明动量模式占据数变化、集体相对相位和宏观序参量之间的物理联系，不能用于给出有限带宽模型中相IIIa与相IIIb的精确相边界。本文的相边界由完整Keldysh平均场方程（11）、（18）的数值演化以及Anderson赝自旋表示下的Lax矢量分析共同确定。

对于本文采用的双峰均匀能谱，在两个子带完全分离的相III区域，

$$\frac{\delta_s}{E_W} > 1, \quad \frac{\chi N}{E_W} > \frac{2}{\pi}. \quad (36)$$

Lax矢量分析给出的IIIa–IIIb临界线为^[19]

$$\frac{\delta_s}{E_W} = \csc \left(\frac{E_W}{\chi N} \right). \quad (37)$$

因此，不能简单地使用 $\delta_s < \chi N$ 或 $\delta_s > \chi N$ 区分相IIIa和相IIIb。只有在 $E_W/\chi N \ll 1$ 的窄带强相互作用极限下，该临界线才近似退化为 $\delta_s \simeq \chi N$ 。当参数位于上述临界线以下时，两个子带的集体配对振幅随时间作相关变化，但其对宏观序参量的贡献始终不能完全相消，因此 $\min |\Delta_{cl}(t)| > 0$ 序参量在复平面上的轨迹始终不经过原点，对应相IIIa，如图3（b）所示。在两集体模式近似下，这一行为可直观理解为相对相位在到达奇数倍 π 之前发生转向，并在有限范围内作往复变化。当参数位于临界线以上时，两个子带的集体配对贡献在演化中周期性达到完全相消条件，使 $\Delta_{cl}(t_m) = 0$ 序参量在复平面上的轨迹周期性经过原

点；穿过原点后序参量改变符号，在主值相位表示下表现为约为 π 的相位跳变，对应相IIIb，如图 3 (d) 所示。由 (18a) 式

$$\partial_t n_k(t) = 2 \text{Im}[\Delta_{\text{cl}}(t)p_k^*(t)] \quad (38)$$

可知，在序参量过零的瞬间， $\partial_t n_k(t_m) = 0$ 对所有动量模式均成立，动量模式占据数由此瞬时停止变化。需要指出的是， $\Delta_{\text{cl}}(t_m) = 0$ 仅表示两个子带对宏观序参量的集体贡献完全相消，并不要求每个微观配对振幅 $p_k(t_m)$ 同时消失。因此，相IIIb的物理图像是体系在每个振荡周期内经历宏观相干配对场的建立、完全相消和反相重建。

对于本文采用的实数初态和关于零频率对称的双峰能谱，可以选择全局 $U(1)$ 规范使序参量在演化过程中保持为实数。因此，图 3中的复平面轨迹退化为沿实轴的往复运动：相IIIa中的轨迹始终不经过原点，而相IIIb中的轨迹周期性穿过原点并改变符号。

3.3 实验可观测量与理论判据的对应

以往理论常采用 Anderson 赝自旋图像来描述 BCS 淬火后的动力学行为。在Anderson赝自旋映射下，定义每一个动量模式对应的赝自旋算符 $\hat{S}_{\mathbf{k}}^-$ 和集体自旋下降算符 $\hat{S}^-$ 为

$$\hat{S}_{\mathbf{k}}^- = \hat{c}_{\mathbf{k}\uparrow}\hat{c}_{-\mathbf{k}\downarrow}, \quad \hat{S}^- = \sum_{\mathbf{k}} \hat{S}_{\mathbf{k}}^-. \quad (39)$$

相应的BCS序参量定义为

$$\Delta_{\text{BCS}}(t) = \chi \left\langle \sum_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{-\mathbf{k}} \right\rangle = \chi \langle \hat{S}^- \rangle. \quad (40)$$

由费米子反对易关系可知，在本文采用的Keldysh鞍点近似下，得到的自洽能隙方程 (11) 式与在Anderson赝自旋映射下得到的BCS序参量一致，即 $\Delta_{\text{cl}}(t) = \Delta_{\text{BCS}}(t)$ 。

在实际腔 QED 系统中^[19]，原子-腔场耦合可能随原子在腔驻波中的位置而变化，此时实验序参量推广为 $\Delta_{\text{BCS}}(t) = \chi \sum_{\mathbf{k}} \zeta_{\mathbf{k}} \langle \hat{S}_{\mathbf{k}}^- \rangle$ ，其中 $\zeta_{\mathbf{k}}$ 是由原子在腔驻波中的位置及腔模函数决定的无量纲相对耦合权重；而本文研究的均匀耦合模型对应 $\zeta_{\mathbf{k}} = 1$ 。

在远失谐腔极限中，由原子集体相干产生的腔输出光场满足

$$\alpha_{\text{out}}(t) = -\frac{g\sqrt{\kappa_m}}{\delta_c} \langle \hat{S}^- \rangle = -\frac{g\sqrt{\kappa_m}}{\chi\delta_c} \Delta_{\text{BCS}}(t). \quad (41)$$

其中 g 为与腔最大耦合的原子的单光子拉比频率， δ_c 为腔模与原子跃迁的失谐， κ_m 为输出镜对应的光子泄漏率。实验采用平衡外差探测获得两个正交信号 $I(t)$ 和 $Q(t)$ ，得到 $I(t) + iQ(t) \propto \Delta_{\text{BCS}}(t)$ ，故可以同时

重建序参量的模长和相位。对多次实验结果进行平均并扣除真空噪声背景，即外差功率 $P_{sig}(t)$ 扣除真空噪声背景 P_{vac} 后，有

$$P_{sig}(t) = \langle I^2(t) + Q^2(t) \rangle - P_{vac} \propto |\Delta_{BCS}(t)|^2. \quad (42)$$

因此通过对腔泄漏光进行平衡外差探测可以实时获得序参量的复振幅。由此，本文数值计算得到的 $\Delta_{cl}(t)/\Delta_{init}$ 可直接对应于实验归一化后的腔输出场幅度。需要指出的是实际实验受到自发辐射、腔损耗、原子运动、有限观测时间以及技术噪声的限制，因而不能直接实现理论定义中的热力学极限和无限长时间极限。为给出有限时间窗内可操作的判相方法，在去除淬火后短时瞬态之后，实验上通常以有限时间窗内 $|\Delta_{BCS}(t)|$ 的平均值对应式(20)长时间平均序参量；式(21)序参量模长的长时间标准差表示持续振荡，由于直接计算实验曲线的标准差会混入测量噪声，因此利用去除慢变化背景后的 Fourier 谱峰值对应序参量长时间振荡。

除腔 QED 平台外，超冷费米气体中还可利用射频谱测量配对所需的激发能，从而获得配对能隙信息；动量分辨射频谱或原子光电子发射光谱可进一步测量单粒子谱函数及准粒子色散。与腔 QED 中对集体复序参量的实时光学读出不同，这类谱学信号通常需要重复制备体系并扫描淬火后的探测延迟，再结合谱线模型反演瞬时配对能标和非平衡分布。因此，射频谱提供的是与 $|\Delta_{cl}(t)|$ 相关的谱学代理量，而不是对复序参量的直接单次实时测量。Keldysh 框架既给出 $\Delta_{cl}(t)$ ，又可由推迟格林函数和 Keldysh 格林函数构造时间分辨谱函数及非平衡占据，从而能够统一比较不同平台的观测量。

4 结 论

本文从零总动量 Cooper 配对的费米子 BCS 哈密顿量出发，采用 Keldysh 闭合时间路径积分方法，在鞍点平均场近似下推导了描述淬火后动力学的自洽方程组。针对双峰均匀单粒子能谱，我们以序参量模长在预热化时间窗内的平均值和标准差为判据，得到序参量衰减至零的相 I、趋于非零值的相 II 以及保持持续振荡的相 III。相 III 中，两个子带的贡献能否完全相消进一步决定复序参量轨迹是否穿过原点；轨迹穿过原点时伴随约 π 的相位跳变。数值相边界与 Anderson 赝自旋框架下 Lax 矢量方法给出的解析结果相符，说明 Keldysh 鞍点理论在无碰撞平均场极限下正确再现了已知相结构，同时给出了动量模式占据数、配对振幅和宏观序参量之间的直接联系。

理论配对场可由腔输出光场的正交分量重建，因而可利用有限时间窗平均幅度、噪声修正后的频谱峰、零点和相位跳变识别各动力学相。对于弱耦合两分量 s 波费米气体，将接触相互作用限制在费米面附

近零总动量配对通道并作平均场处理后，所得自洽动力学方程与本文均匀耦合模型具有同构形式，因此上述判据在该范围内具有参考意义。需要强调的是，图1中的具体相边界依赖本文采用的双峰均匀单粒子能谱、均匀耦合矩阵元和特定淬火协议，不能直接定量套用于一般接触相互作用费米气体。本文忽略了空间涨落、碰撞自能、相互作用矩阵元的动量依赖以及强配对涨落，所得动力学相边界不能直接推广至BCS-BEC渡越区或么正区域。Keldysh框架的优势在于可在现有鞍点结果上系统加入涨落^[35]、自能、耗散^[16,36,37]和非均匀耦合^[38]，为研究这些超越平均场效应^[33]提供统一的理论起点。

参考文献

- [1] Barankov R A, Levitov L S, Spivak B Z 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 160401
- [2] Polkovnikov A, Sengupta K, Silva A, Vengalattore M 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 863
- [3] Eisert J, Friesdorf M, Gogolin C 2015 *Nat. Phys.* **11** 124
- [4] Marino J, Eckstein M, Foster M S, Rey A M 2022 *Rep. Prog. Phys.* **85** 116001
- [5] Barankov R A, Levitov L S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 230403
- [6] Keeling J, Bhaseen M J, Simons B D 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 043001
- [7] Nandkishore R, Huse D A 2015 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **6** 15
- [8] Lewis-Swan R J, Barberena D, Cline J R K, Young D J, Thompson J K, Rey A M 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 173601
- [9] Kurkjian H, Colussi V E, Dyke P, Vale C, Musolino S 2024 *Phys. Rev. A* **109** L041302
- [10] Bloch I, Dalibard J, Zwirger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [11] Georgescu I M, Ashhab S, Nori F 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 153
- [12] Mivehvar F, Piazza F, Donner T, Ritsch H 2021 *Adv. Phys.* **70** 1
- [13] Defenu N, Donner T, Macrì T, Pagano G, Ruffo S, Trombettoni A 2023 *Rev. Mod. Phys.* **95** 035002
- [14] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature* **464** 1301

- [15] Muniz J A, Barberena D, Lewis-Swan R J, Young D J, Cline J R K, Rey A M, Thompson J K 2020 *Nature* **580** 602
- [16] Helson V, Zwettler T, Mivehvar F, Colella E, Roux K, Konishi H, Ritsch H, Brantut J P 2023 *Nature* **618** 716
- [17] Zwettler T, Del Pace G, Marijanovic F, Chattopadhyay S, Bühler T, Halati C M, Skolc L, Tolle L, Helson V, Bolognini G, Fabre A, Uchino S, Giamarchi T, Demler E, Brantut J P 2025 *Phys. Rev. X* **15** 021089
- [18] Song E Y, Barberena D, Young D J, Chaparro E, Chu A, Agarwal S, Niu Z, Young J T, Rey A M, Thompson J K 2025 *Sci. Adv.* **11** eadu5799
- [19] Young D J, Chu A, Song E Y, Barberena D, Wellnitz D, Niu Z, Schäfer V M, Lewis-Swan R J, Rey A M, Thompson J K 2024 *Nature* **625** 679
- [20] Young D J, Song E Y, Chu A, Barberena D, Niu Z, Schäfer V M, Lewis-Swan R J, Rey A M, Thompson J K 2025 *Phys. Rev. Lett.* **134** 183404
- [21] Brown P T, Guardado-Sanchez E, Spar B M, Huang E W, Devereaux T P, Bakr W S 2020 *Nat. Phys.* **16** 26
- [22] Dizer E, Horak J, Pawlowski J M 2024 *Phys. Rev. A* **109** 063311
- [23] Yin X G, Yu H R, Hao Y J, Zhang Y B 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 020302 (in Chinese) [尹相国, 于海如, 郝亚江, 张云波 2024 物理学报 73 020302]
- [24] Luo Y C, Li X P 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 226701 (in Chinese) [罗雨晨, 李晓鹏 2022 物理学报 71 226701]
- [25] Zhai H 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 230701 (in Chinese) [翟荟 2023 物理学报 72 230701]
- [26] Li B J, Lu T X, Wang J, Jing H 2026 *Acta Phys. Sin.* **75** 110301 (in Chinese) [李柏军, 卢天祥, 王婕, 景辉 2026 物理学报 75 110301]

- [27] Yin X G, Zhao S L 2026 *Acta Phys. Sin.* **75** 110305 (in Chinese) [尹相国, 赵书龙 2026 物理学报 75 110305]
- [28] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **112** 1900
- [29] Yuzbashyan E A, Altshuler B L, Kuznetsov V B, Enolskii V Z 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 7831
- [30] Faribault A, Calabrese P, Caux J S 2009 *J. Stat. Mech.* **2009** P03018
- [31] Sieberer L M, Buchhold M, Diehl S 2016 *Rep. Prog. Phys.* **79** 096001
- [32] Kamenev A 2023 *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*. 2nd edn. (Cambridge: Cambridge University Press)
- [33] Sieberer L M, Buchhold M, Marino J, Diehl S 2025 *Rev. Mod. Phys.* **97** 025004
- [34] Norcia M A, Lewis-Swan R J, Cline J R K, Zhu B, Rey A M, Thompson J K 2018 *Science* **361** 259
- [35] Fan B, Cai Z, García-García A M 2024 *Phys. Rev. B* **110** 134307
- [36] Filice P, Schirò M, Mazza G 2026 *Phys. Rev. B* **113** 184512
- [37] Zwettler T, Marijanovic F, Bühler T, Chattopadhyay S, Del Pace G, Skolc L, Helson V, Uchino S, Demler E, Brantut J P 2026 *Nat. Commun.* **17** 496
- [38] Collado H P O, Usaj G, Balseiro C A, Zanette D H, Lorenzana J 2023 *Phys. Rev. Res.* **5** 023014

Nonequilibrium dynamics of a homogeneously coupled BCS model based on Keldysh field theory*

CHEN Shuhua LIAO Renyuan[†]

(*College of Physics and Energy, Fujian Normal University, Fujian Provincial Key Laboratory
of Quantum Manipulation and New Energy Materials, Fujian Provincial Engineering
Technology Research Center of Solar Energy Conversion and Energy Storage, Fuzhou 350117,
China*)

Abstract

Quantum pairing systems subjected to a sudden parameter quench can exhibit long-lived prethermal dynamical phases that are distinct from thermal equilibrium states. We investigate the post-quench nonequilibrium dynamics of a Bardeen–Cooper–Schrieffer (BCS) model with homogeneous pairing interactions using Keldysh nonequilibrium field theory. Starting from the closed-time-path functional integral, we introduce a complex auxiliary pairing field to decouple the four-fermion interaction and derive the effective action. Within the saddle-point approximation, the stationarity condition yields the self-consistent time-dependent gap equation. Using the Dyson equation in Keldysh–Nambu space, we further obtain a closed set of Bloch-type mean-field equations for the real-time evolution of momentum-mode occupations and anomalous pairing amplitudes. For a single-particle spectrum consisting of two subbands with homogeneous density of states, the dynamical phases are identified from the long-time average and standard deviation of the order-parameter magnitude over a prethermal time window after the transient regime. Three prethermal phases are found: phase I, in which the macroscopic order parameter decays to zero through dephasing among different energy modes; phase II, in which it approaches a nonzero nonthermal plateau; and phase III, characterized by persistent collective oscillations. The oscillatory phase is further

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12174055).

[†] Corresponding author. E-mail: ryliao@fjnu.edu.cn

divided according to the trajectory of the complex order parameter. In phase IIIa, the trajectory does not cross the origin and the order-parameter magnitude remains finite, whereas in phase IIIb it periodically passes through the origin, producing zero crossings accompanied by phase jumps close to π . The numerical phase boundaries agree with the analytical Lax-vector results in the Anderson-pseudospin representation. We also establish the correspondence between the theoretical pairing field and experimentally measurable cavity-output quadratures. The amplitude, phase, and spectrum of the output signal provide operational signatures for distinguishing the dynamical phases. At the mean-field level, the same self-consistent dynamical structure applies to weakly interacting two-component Fermi gases in the BCS regime, while quantitative applications to the BCS–BEC crossover and the unitary regime require the inclusion of fluctuations and collision effects. These results provide a unified framework connecting microscopic fermionic evolution, macroscopic dynamical phases, and experimental observables.

Keywords: Keldysh field theory, BCS model, nonequilibrium dynamics

录用稿件，非最终出版稿