

(2+1) 维广义Caudrey–Dodd–Gibbon–Kotera–Sawada方程的团块链与混合相互作用解*

候慧娟 孟祥花[†]

(北京信息科技大学理学院, 北京 100192)

本文研究了(2+1)维广义Caudrey–Dodd–Gibbon–Kotera–Sawada方程的团块结构和束缚态分子结构解. 基于孤子解中推导出团块链解, 在参数无限趋于零时逐渐退化为具有相同速度的团块解. 两条团块链在退化过程中逐渐形成三个相互作用的团块, 并最终演变为共振三角形结构, 揭示了状态转换过程中解结构的变化. 此外, 在共振条件和参数约束下, 从双曲型 N 孤子解出发, 在不同参数调控下推导得到了混合束缚态分子解, 如单呼吸-单孤子分子、单呼吸-双孤子分子以及单呼吸-单孤子分子与双孤子分子相互作用. 通过图示可观察到分子之间的弹性碰撞.

关键词: 广义CDGKS方程, 团块链, 呼吸-孤子分子, 状态转换

PACS: 05.45.Yv, 02.30.Jr, 02.30.Ik

1 引言

非线性波现象的研究是非线性科学的重要课题之一^[1], 特别是通过可积非线性发展方程进行的相关研究. 人们发展了许多有效的方法来构造局域波解, 包括反散射方法、Darboux变换、双线性方法等^[2]. 其中, 双线性方法被认为是获得孤子解的有效方法之一. 孤子是非线性发展方程的一类基本行波解, 与团块链和束缚态分子结构解等类型的局域波解密切相关. Manakov等给出了KP方程的团块解, 其是在空间各方向衰减的高维局域波^[3]. 文献^[4]首次利用非线性光学系统通过实验观测到KP方程的团块孤子. 在文献^[5]中, 发现了两种类型的团块相互作用, 一种相互作用是具有不同速度和振幅的团块和团块链在相互作用后保持其速度和振幅不变. 另一种相互作用为趋近于相同速度的团块会经历一种特定的散射现象,

* 国家自然科学基金(批准号: 62071053)资助的课题

[†] 通信作者. E-mail: xhmeng@bistu.edu.cn

该现象涉及多个团块和团块链. 团块链由在一条直线上周期性排列且均匀分布的团块组成, 这些团块以相同的速度沿不同方向运动. 在特定参数情形下, 第一种相互作用的团块链可以退化产生第二种相互作用的团块. 文献 [6] 构造了KPI方程的团块链共振解, 并进一步通过团块链构造了多团块结构. 文献 [7-9] 研究了Mel'nikov方程, BKP方程和 (4+1) 维Fokas方程的团块链或退化解, (2+1) 维广义Caudrey-Dodd-Gibbon-Kotera-Sawada (gCDGKS) 方程的团块链结构解尚未见报道.

孤子分子是一种稳定的束缚态, 表现出类似分子的行为 [10,11]. 当两个或多个孤子相互约束时, 会产生一种束缚态, 称为孤子分子 [12]. 孤子分子首次在色散管理光学实验中被观测到 [13,14], 后来扩展到流体系统 [15]. 文献 [16] 提出了速度共振原理形成孤子分子. 文献 [17] 首次通过速度共振在mKdV-sG方程中构造了呼吸-孤子分子束缚态. 文献 [18] 通过高阶非线性薛定谔方程中的参数控制实现了可调控的呼吸-孤子相互作用, 并观察到呼吸碰撞后的孤子放大或压缩, 证实了它们之间的有效能量交换以及耦合强度对参数的敏感性. 文献 [19] 分别揭示了参数变化在变系数Hirota方程和三波共振系统中调节束缚强度和局域特征的作用. 文献 [20] 通过实验证实了单呼吸-单孤子分子在超快光纤激光器中的存在和动力学演化. 由于单呼吸-单孤子分子是在实验室中观测到的具有重要研究价值的束缚态结构 [21], 进一步的理论分析有助于更深入地理解其结构特点.

(2+1) 维广义Caudrey-Dodd-Gibbon-Kotera-Sawada (gCDGKS) 方程如下所示 [22],

$$36u_t + (u_{4x} + 15uu_{2x} + 15u^3)_x - \alpha \int u_{yy} dx - \beta(u_{xxy} + 3uu_y + 3u_x \int u_y dx) = 0, \quad (1)$$

其中 $u = u(x, y, t)$, α 和 β 均为任意常数. 该方程在流体动力学中展现出丰富的解结构, 包括孤子、团块波、呼吸、怪波、准周期波以及共振Y型孤子. 当 $\alpha = \beta = 5$ 时, 方程 (1) 退化为经典的 (2+1) 维CDGKS方程. 文献 [23] 通过复化方法将CDGKS方程推广至 (3+1) 维和 (3+2) 维, 并利用非局部 $\bar{\partial}$ 方法求解了 (3+2) 维情形的Cauchy问题. 文献 [24] 通过Bäcklund变换给出了 (2+1) 维 CDGKS 方程的丰富的孤子结构以及具有弹性相互作用的呼吸解. 文献 [25] 通过速度共振条件构造了孤子分子与团块波的混合解. 文献 [26] 通过相位约束的长波极限和模共振方法, 构造了 (2+1) 维 gCDGKS 方程的团块波、线波和呼吸波的非相互作用或同向传播的束缚态. 本文在双曲型 N 孤子解和速度共振条件的基础上, 得出 (2+1) 维 gCDGKS方程由呼吸和孤子构成的分子结构相互作用解.

本文结构安排如下: 第 2 节给出了 (2+1) 维gCDGKS方程的双曲型 N 孤子解; 第 3 节讨论了两个相互作用的团块链转变为三个团块的退化过程; 第 4 节建立了参数调控下不同类型的混合相互作用解; 第 5 节给出结论.

2 双曲型 N 孤子解

基于 Hirota 双线性方法, 可以给出方程 (1) 的双曲型 N 孤子解. 在变换

$$u = 2[\ln(f)]_{xx}, \quad (2)$$

下, 其中 $f = f(x, y, t)$ 是实函数, 方程 (1) 的双线性形式为

$$(36D_x D_t + D_x^6 - \alpha D_y^2 - \beta D_x^3 D_y) f \cdot f = 0, \quad (3)$$

其中 D 算子的定义为 $Dx^m D_y^n D_t^l (f \cdot g) = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_y - \partial_{y'})^n (\partial_t - \partial_{t'})^l f(x, y, t) g(x', y', t') \Big|_{x'=x, y'=y, t'=t}$.

对应方程 (1) 的双曲函数形式的 N 孤子解, f 可取为

$$f = \sum_{\nu} K_{\nu} \cosh\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \nu_i \xi_i\right), \quad \xi_i = k_i x + l_i y + \omega_i t + \xi_{i0}, \quad \omega_i = \frac{-k_i^6 + \beta k_i^3 l_i + \alpha l_i^2}{36 k_i}, \quad (4)$$

其中 $K_{\nu} = \prod_{i < j} a_{ij}$, $\nu = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\}$, $\sum_{\nu}$ 表示对 $\nu_i = -1, 1$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 的所有可能排列的求和,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sqrt{-\nu_i \nu_j (k_i - \nu_i \nu_j k_j)^6 + (k_i - \nu_i \nu_j k_j) M_{\nu} - \alpha (l_i - \nu_i \nu_j l_j)^2 - \beta (k_i - \nu_i \nu_j k_j)^3 (l_i - \nu_i \nu_j l_j)}, \\ M_{\nu} &= -k_i^5 + \nu_i \nu_j k_j^5 + \beta (k_i^2 l_i - \nu_i \nu_j k_j^2 l_j) + \alpha \left(\frac{l_i^2}{k_i} - \nu_i \nu_j \frac{l_j^2}{k_j} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

当 $N = 2$ 时, 双孤子解为

$$\begin{aligned} u &= 2 \left[\ln \left(a_{12}^{-} \cosh \left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \right) + a_{12}^{+} \cosh \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{2} \right) \right) \right]_{xx} \\ &= \frac{(a_{12}^{+})^2 (k_1 - k_2)^2 + (a_{12}^{-})^2 (k_1 + k_2)^2 + 2a_{12}^{+} a_{12}^{-} (k_1^2 \cosh \xi_1 + k_2^2 \cosh \xi_2)}{2 \left[\left(a_{12}^{-} \cosh \left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \right) + a_{12}^{+} \cosh \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{2} \right) \right) \right]^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 ξ_i ($i = 1, 2$) 由式 (4) 定义, a_{12}^{+} 和 a_{12}^{-} 对应于 ν_1 和 ν_2 分别取同号和异号.

3 团块链退化

基于式 (4), 由四孤子解可以得到 (2+1) 维 gCDGKS 方程 (1) 的二团块链解, 该解表示为

$$\begin{aligned} f_4(x, y, t) &= 1 + \sum_{i=1}^4 \exp(\xi_i) + \sum_{i < j}^4 \exp(\xi_i + \xi_j + A_{ij}) \\ &\quad + \sum_{i < j < k}^4 \exp(\xi_i + \xi_j + \xi_k + A_{ij} + A_{ik} + A_{jk}) + \exp\left(\sum_{i=1}^4 \xi_i + \sum_{i < j}^4 A_{ij}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\exp A_{ij} = -\frac{(k_i - k_j)^6 + (k_i - k_j)M^{-} - \alpha(l_i - l_j)^2 - \beta(k_i - k_j)^3(l_i - l_j)}{(k_i + k_j)^6 + (k_i + k_j)M^{+} - \alpha(l_i + l_j)^2 - \beta(k_i + k_j)^3(l_i + l_j)}. \quad (8)$$

方程 (7) 中的参数取为

$$\begin{aligned} k_1 &= k_3^* = \lambda_1 \varepsilon, & k_2 &= k_4^* = \lambda_2 \varepsilon, & l_1 &= l_3^* = i\lambda_1 \varepsilon, & l_2 &= l_4^* = i\lambda_2 \varepsilon, \\ \exp(\xi_{10}) &= \exp(\xi_{30}^*) = C_1, & \exp(\xi_{20}) &= \exp(\xi_{40}^*) = C_2, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 λ_1 、 λ_2 和 ε 为实参数, C_1 、 C_2 为待定参数. 将方程 (7) 中的 $f_4(x, y, t)$ 展开为 ε 的幂级数,

$$f_4(x, y, t, C_1, C_2) = f_4^{(0)} + f_4^{(1)} \varepsilon + f_4^{(2)} \varepsilon^2 + f_4^{(3)} \varepsilon^3 + f_4^{(4)} \varepsilon^4 + f_4^{(5)} \varepsilon^5 + f_4^{(6)} \varepsilon^6 + O(\varepsilon^7). \quad (10)$$

求解方程组 $\{f_4^{(i)} = 0, i = 0, 1, 2, 3\}$ 可得 C_1 和 C_2 如下,

$$C_1 = -\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (11)$$

然后, 将方程 (9) 和 (11) 代入方程 (7) 中得到

$$\begin{aligned} f_4(x, y, t) &= f_4^{(4)} \varepsilon^4 + f_4^{(5)} \varepsilon^5 + f_4^{(6)} \varepsilon^6 + O(\varepsilon^7), \\ f_4^{(4)} &= \frac{100\lambda_1^2\lambda_2^2}{9\beta^2}, \\ f_4^{(5)} &= -\frac{5(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2^2\lambda_1^2[\beta y(X^2 - 432y^2) + 240X - 144t\beta^2]}{1944\beta^2}, \\ f_4^{(6)} &= h(\lambda_1, \lambda_2) \left[41864704\alpha t^2\beta^4 - 3359232\alpha t y(X^2 - 432y^2)\beta^3 \right. \\ &\quad \left. + \beta^2(\alpha((X^2 + 1296y^2)^3 - 1209323520Xt) - 906992640X^2 + 1175462461440y^2) \right. \\ &\quad \left. + 7464960\alpha yX^3\beta + 1343692800\alpha X^2 \right], \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $X = \alpha t - 36x$, 且 $h(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \lambda_2^2 \lambda_1^2}{78364164096\beta^2\alpha}$. 基于方程 (12) 中的 $f_4(x, y, t)$, 通过变换 (2) 可以得到 (2+1) 维 gCDGKS 方程的两个相互作用的团块链解. 基于团块链解, 由参数 k_1 和 l_1 决定的第一个团块链的速度和振幅为

$$(V_{1,x}, V_{1,y}) = \left(\frac{5}{72} + \frac{\lambda_1^4 \varepsilon^4}{36}, 0 \right), \quad A_1 = \frac{2\lambda_1^2 \varepsilon^2}{1 - \sqrt{1 - 6\lambda_1^4 \varepsilon^4}} = \frac{2}{3\lambda_1^2 \varepsilon^2} + o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \quad (13)$$

其中 $V_{1,x}$ 和 $V_{1,y}$ 分别表示团块链沿 x 轴和 y 轴的速度分量, A_1 表示团块链的振幅. 沿 y 方向的空间周期为 $T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1 \varepsilon}$. 第二个团块链的速度和振幅由参数 k_2 和 l_2 决定, 速度分量和振幅表示为

$$(V_{2,x}, V_{2,y}) = \left(\frac{5}{72} + \frac{\lambda_2^4 \varepsilon^4}{36}, 0 \right), \quad A_2 = \frac{2\lambda_2^2 \varepsilon^2}{1 - \sqrt{1 - 6\lambda_2^4 \varepsilon^4}} = \frac{2}{3\lambda_2^2 \varepsilon^2} + o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \quad (14)$$

第二个团块链沿 y 轴的空间周期为 $T_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2 \varepsilon}$.

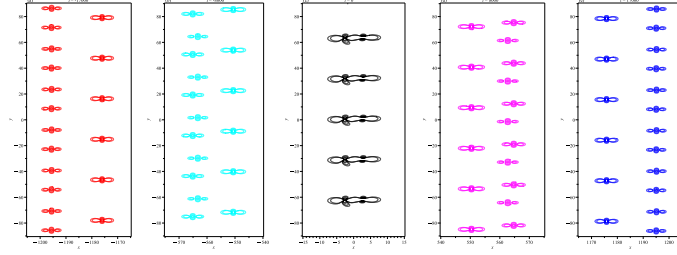


图 1: 两个相互作用团块链, 由方程 (7)-(12) 给出, 参数为 $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{5}$.

Fig. 1: Two interacting lump chains given by Eqs. (7)-(12) with $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ and $\varepsilon = \frac{1}{5}$.

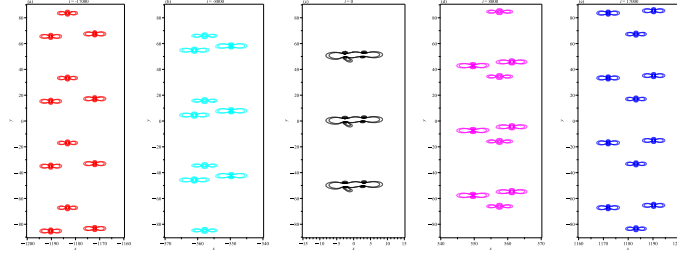


图 2: 两个相互作用团块链, 由方程 (7)-(12) 给出, 参数为 $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

Fig. 2: Two interacting lump chains given by Eqs. (7)-(12) with $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ and $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

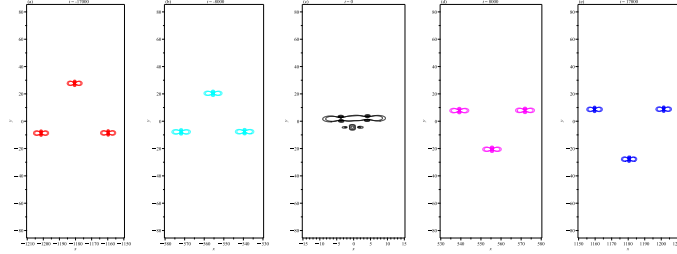


图 3: 两个相互作用的团块链, 由方程 (7)-(12) 给出, 参数为 $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{32}$.

Fig. 3: Two interacting lump chains given by Eqs. (7)-(12) with $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ and $\varepsilon = \frac{1}{32}$.

如图1, 图2, 图4和图5所示, 对于 $\varepsilon = \frac{1}{5}$ 和 $\varepsilon = \frac{1}{8}$ 的情形, 两个相互作用的团块链的基本结构可以看作由三个团块构成. 这些团块随时间从收缩状态逐渐转变为扩张状态. 这种三团块相互作用结构的排列类似于一个三角形. 当 ε 取趋近于零的极限时, 从图4-6可以观察到两个相互作用的团块链转变为三个相互作用的团块的过程. 随着 ε 减小, 两个相互作用的团块链的周期增大, 逐渐形成相互作用的三团块结构, 如图3和图6所示. 从方程 (13) 和 (14) 可以看出, 当 ε 趋于0时, 三角形结构中团块的振幅和速度趋于相等, 它们之间的相互作用不再是普通的弹性碰撞, 而是进入共振状态. 从图1-3和图4-6对比可以看出, λ_i 的不同取值会影响相互作用团块链的形状, 以及相互作用过程中由扩张和收缩产生的相互作用团块的位置和形状. 然而, λ_i 的取值并不影响由团块链退化得到的相互作用团块的三角形结构.

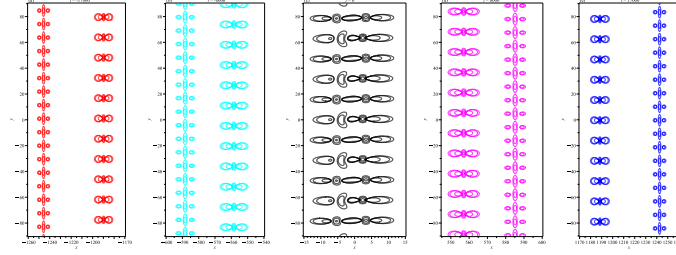


图 4: 两个相互作用的团块链, 由方程 (7)-(12) 给出, 参数为 $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\varepsilon = \frac{1}{5}$.

Fig. 4: Two interacting lump chains given by Eqs. (7)-(12) with $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ and $\varepsilon = \frac{1}{5}$.

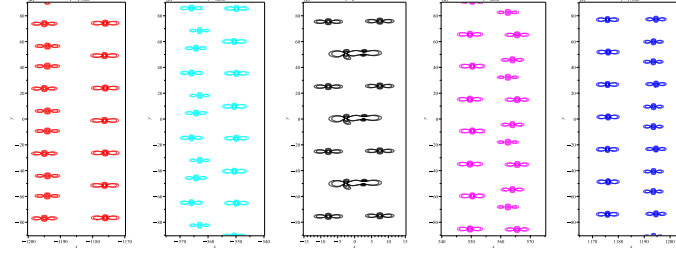


图 5: 两个相互作用的团块链, 由方程 (7)-(12) 给出, 参数为 $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

Fig. 5: Two interacting lump chains given by Eqs. (7)-(12) with $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ and $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

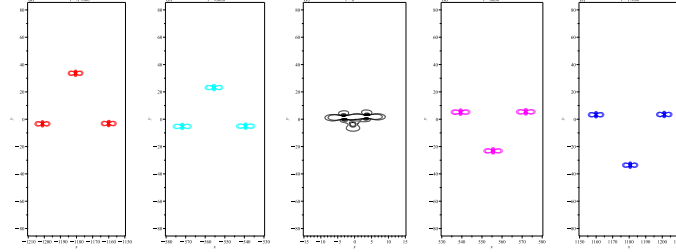


图 6: 两个相互作用团块链, 由方程 (7)-(12) 给出, 参数为 $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\varepsilon = \frac{1}{32}$.

Fig. 6: Two interacting lump chains given by Eqs. (7)-(12) with $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ and $\varepsilon = \frac{1}{32}$.

4 混合相互作用解

本节将得到方程 (1) 的多种混合相互作用解, 包括在不同参数调控下的不同类型的分子结构解. 在双孤子解 (6) 中, 若将波参数取为如下复共轭关系,

$$k_2 = k_1^* = k_{1r} - ik_{1i}, \quad l_2 = l_1^* = l_{1r} - il_{1i}, \quad \xi_{20} = \xi_{10}^* = \xi_{10r} - i\xi_{10i}, \quad (15)$$

则可得到双孤子解的另一种表示

$$u = 2[\ln(f)]_{xx}, \quad f = 1 + 2\cos(\eta)e^\xi + \frac{\Delta_{1-}}{\Delta_{1+}}e^{2\xi}, \quad (16)$$

$$\xi = k_{1r}x + l_{1r}y + \omega_{1r}t + \xi_0, \quad \eta = k_{1i}x + l_{1i}y + \omega_{1i}t + \eta_0,$$

$$\omega_{1r} = \frac{k_{1r}A + k_{1i}B + \beta[(k_{1r}^3 - 3k_{1i}^2k_{1r})(k_{1r}l_{1r} + k_{1i}l_{1i}) + (k_{1i}^3 - 3k_{1r}^2k_{1i})(k_{1r}l_{1i} - k_{1i}l_{1r})]}{36(k_{1i}^2 + k_{1r}^2)},$$

$$\begin{aligned}
\omega_{1i} &= \frac{-k_{1i}A + k_{1r}B + \beta[(k_{1r}^3 - 3k_{1i}^2k_{1r})(k_{1r}l_{1i} - k_{1i}l_{1r}) - (k_{1i}^3 - 3k_{1r}^2k_{1i})(k_{1r}l_{1r} + k_{1i}l_{1i})]}{36(k_{1i}^2 + k_{1r}^2)}, \\
\Delta_{1+} &= \alpha(k_{1r}l_{1i} - k_{1i}l_{1r})^2 + \beta(k_{1r}^2 + k_{1i}^2)[2k_{1i}k_{1r}^2l_{1i} + k_{1r}l_{1r}(k_{1i}^2 + 3k_{1r}^2)] + 5k_{1r}^2(k_{1r}^2 + k_{1i}^2)^2(k_{1i}^2 - 3k_{1r}^2), \\
\Delta_{1-} &= \alpha(k_{1r}l_{1i} - k_{1i}l_{1r})^2 - \beta(k_{1r}^2 + k_{1i}^2)[2k_{1r}k_{1i}^2l_{1r} + k_{1i}l_{1i}(k_{1r}^2 + 3k_{1i}^2)] - 5k_{1i}^2(k_{1r}^2 + k_{1i}^2)^2(-k_{1r}^2 + 3k_{1i}^2), \\
A &= (k_{1i}^2 - k_{1r}^2)(k_{1i}^4 - 14k_{1i}^2k_{1r}^2 + k_{1r}^4) + \alpha(l_{1r}^2 - l_{1i}^2), \\
B &= -2k_{1i}k_{1r}(k_{1i}^2 - 3k_{1r}^2)(3k_{1i}^2 - k_{1r}^2) + 2\alpha l_{1r}l_{1i}.
\end{aligned}$$

当 $\Delta_{1+} < 0$ 且 $\Delta_{1+} > 0$, $\frac{\Delta_{1-}}{\Delta_{1+}} \leq 1$ 时, 解 (16) 是一个奇异解. 若 $\Delta_{1+} > 0$, $\frac{\Delta_{1-}}{\Delta_{1+}} > 1$, 则解 (16) 变为解析呼吸子. 若解 (6) 中的波动参数满足速度共振条件,

$$l_1 = \frac{k_1^2 + k_2^2}{\beta}k_1, \quad l_2 = \frac{k_1^2 + k_2^2}{\beta}k_2, \quad (17)$$

则可以从双曲双孤子解 (6) 得到双孤子分子解.

4.1 单呼吸-单孤子分子

在共振条件下, 当参数选择适当时, 三孤子解可能产生不同的共振模式. 当三孤子解中的参数使其满足共振条件,

$$k_1 = k_2^* = k_{1r} + ik_{1i}, \quad l_1 = l_2^* = l_{1r} + il_{1i}, \quad \frac{\omega_{1r}}{k_{1r}} = \frac{\omega_3}{k_3}, \quad \frac{\omega_{1r}}{l_{1r}} = \frac{\omega_3}{l_3}, \quad (18)$$

且 $\Delta_{1+} > 0$ 和 $\frac{\Delta_{1-}}{\Delta_{1+}} > 1$, 将形成一个单呼吸-单孤子分子. 图7 是在特定参数选择下单呼吸-单孤子分子图像.

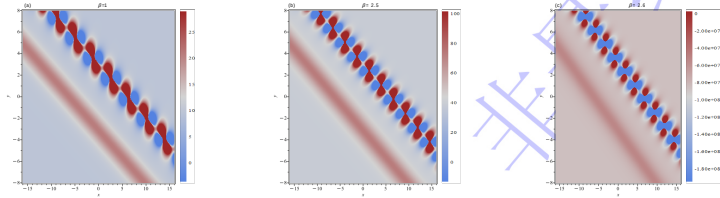


图 7: 单呼吸-单孤子分子解在 $t = 0$ 时的密度图, 参数为 $k_1 = 1.2 + 1.2i$, $l_{1r} = 2.4$, $k_3 = \frac{1}{2}$, $l_3 = 1.6$, $\xi_{10} = \xi_{20} = -5$, $\xi_{30} = 5$, $\alpha = 2.5$; (a) $\beta = 1$; (b) $\beta = 2.5$; (c) $\beta = 2.6$.

Fig. 7: Density plots for one-breather-one-soliton molecular solution at $t = 0$ with the parameters $k_1 = 1.2 + 1.2i$, $l_{1r} = 2.4$, $k_3 = \frac{1}{2}$, $l_3 = 1.6$, $\xi_{10} = \xi_{20} = -5$, $\xi_{30} = 5$, $\alpha = 2.5$; (a) $\beta = 1$; (b) $\beta = 2.5$; (c) $\beta = 2.6$.

图7 展示了在共振条件下, 固定 α , 随着参数 β 逐渐增大单呼吸-单孤子分子的演化. 根据共振条件 (18), β 的增大会导致 $|l_{1i}|$ 的绝对值单调增加, 孤子与呼吸子之间的吸引相互作用增强.

4.2 单呼吸-双孤子分子

四孤子解参数满足以下速度共振条件时可得到单呼吸-双孤子分子,

$$\begin{aligned} k_1 = k_2^* &= k_{1r} + ik_{1i}, \quad l_1 = l_2^* = l_{1r} + il_{1i}, \\ \frac{\omega_{1r}}{k_{1r}} &= \frac{\omega_3}{k_3} = \frac{\omega_4}{k_4}, \quad \frac{\omega_{1r}}{l_{1r}} = \frac{\omega_3}{l_3} = \frac{\omega_4}{l_4}. \end{aligned} \quad (19)$$

图8 是在特定参数选择下单呼吸-双孤子分子图像.

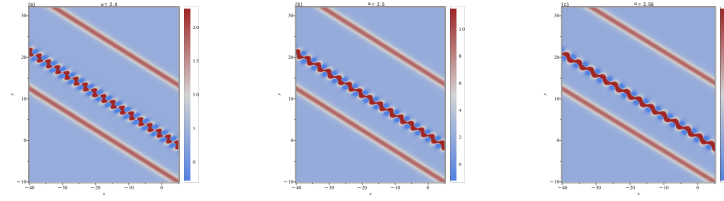


图 8: 单呼吸-双孤子分子解在 $t = 0$ 时的密度图, 参数为 $k_{1r} = k_{1i} = 1.2$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$, $l_{1r} = 2.4$, $l_3 = 4$, $l_4 = 2$, $\xi_{10} = \xi_{20} = 0$, $\xi_{30} = -15$, $\xi_{40} = 15$, $\beta = \frac{5}{2}$; (a) $\alpha = 2.4$; (b) $\alpha = 2.5$; (c) $\alpha = 2.56$.

Fig. 8: Density plots for one-breather-two-soliton molecular solution at $t = 0$ with the parameters $k_{1r} = k_{1i} = 1.2$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$, $l_{1r} = 2.4$, $l_3 = 4$, $l_4 = 2$, $\xi_{10} = \xi_{20} = 0$, $\xi_{30} = -15$, $\xi_{40} = 15$, $\beta = \frac{5}{2}$; (a) $\alpha = 2.4$, $l_{1i} = -2.112841719$; (b) $\alpha = 2.5$; (c) $\alpha = 2.56$.

图8 展示了当 β 固定而 α 增加时, 单呼吸-双孤子分子波形的演化. 根据共振条件 (19), $|l_{1i}|$ 单调递减, 表明呼吸子与孤子之间的有效吸引相互作用持续减弱. 这一趋势与图7 中观察到的恰好相反. 由图7和图8可以看出, 无论是调控 α 还是 β , 在速度共振条件的约束下, $|l_{1i}|$ 均发生变化, 从而影响分子波形, 并导致分子内部呼吸子的对称结构出现不同程度的畸变.

4.3 单呼吸-单孤子分子与双孤子分子的相互作用

五孤子解满足以下速度共振条件可得到单呼吸-单孤子分子与双孤子分子的相互作用,

$$\begin{aligned} k_1 = k_2^* &= k_{1r} + ik_{1i}, \quad l_1 = l_2^* = l_{1r} + il_{1i}, \\ \frac{\omega_{1r}}{k_{1r}} &= \frac{\omega_3}{k_3}, \quad \frac{\omega_{1r}}{l_{1r}} = \frac{\omega_3}{l_3}, \quad \frac{\omega_4}{k_4} = \frac{\omega_5}{k_5}, \quad \frac{\omega_4}{l_4} = \frac{\omega_5}{l_5}. \end{aligned} \quad (20)$$

图9 展示了在特定参数选择下, 单呼吸-单孤子分子与双孤子分子之间相互作用的图像.

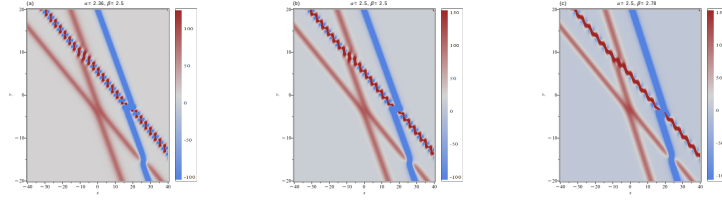


图 9: 单呼吸-单孤子分子与双孤子分子相互作用解在 $t = 0$ 时的密度图, 参数为 $k_{1r} = k_{1i} = 1.2$, $k_3 = k_4 = 1$, $k_5 = \frac{11}{10}$, $l_{1r} = 2.4$, $l_{1i} = -1.605804337$, $l_3 = 2$, $l_4 = \frac{221}{250}$, $l_5 = \frac{2431}{2500}$, $\xi_{10} = \xi_{20} = -\xi_{30} = -8$, $\xi_{40} = -\xi_{50} = 4$; (a) $\alpha = 2.36$, $\beta = 2.5$; (b) $\alpha = 2.5$, $\beta = 2.5$; (c) $\alpha = 2.5$, $\beta = 2.78$.

Fig. 9: Density plots for the interaction between a one-breather-one-soliton molecule and a two-soliton molecule solution at $t = 0$ with the parameters $k_{1r} = k_{1i} = 1.2$, $k_3 = k_4 = 1$, $k_5 = \frac{11}{10}$, $l_{1r} = 2.4$, $l_3 = 2$, $l_4 = \frac{221}{250}$, $l_5 = \frac{2431}{2500}$, $\xi_{10} = \xi_{20} = -\xi_{30} = -8$, $\xi_{40} = -\xi_{50} = 4$; (a) $\alpha = 2.36$, $\beta = 2.5$; (b) $\alpha = 2.5$, $\beta = 2.5$; (c) $\alpha = 2.5$, $\beta = 2.78$.

图9 展示了在特定参数选择下, 单呼吸-单孤子分子与双孤子分子之间相互作用的图像. 通过将不同的参数 α 和 β 代入共振条件 (20), 得到相应的特征量 l_{1i} 可观察到参数变化对分子间相互作用的影响. 结果表明, 参数 α 和 β 的变化不会改变呼吸-孤子分子与孤子分子之间相互作用的基本特征. 在 α 和 β 取定具体值的情况下, 两个分子在碰撞后形状保持不变, 仅空间位置发生偏移, 碰撞保持弹性. 当参数 α 和 β 变化时会影响分子结构中呼吸子的波形, 但对分子间相互作用和碰撞的弹性性质没有影响.

5 结论

本文讨论了(2+1) 维广义 Caudrey–Dodd–Gibbon–Kotera–Sawada 方程孤子解向团块链及各种呼吸-孤子束缚态结构转变及参数对结构转变的影响. 通过双线性方法得到了方程的双曲型 N 孤子解. 在参数约化下, 构造了团块链解. 取参数 ε 趋于0, 两个相互作用的团块链退化为三个相互作用的团块, 其位置形成三角形结构, 速度趋于共振. 在未完全退化的状态下对于不同的参数 λ 值, 可发现相互作用的团块链呈现出不同的形态, 但随时间的变化运动规律不受 λ 取值影响, 所得到的相互作用团块在不同 λ 值下仍然产生三角形共振相互作用结构. 随着时间的变化, 两条相互作用的团块链交换位置, 三个相互作用的团块在三角形结构下先收缩后扩张. 此外, 本文基于双曲型 N 孤子解, 在速度共振条件下, 得到了单呼吸-单孤子分子、单呼吸-双孤子分子、单呼吸-单孤子分子与双孤子分子相互作用等多种混合束缚态. 这些束缚态分子中的呼吸和孤子可以通过调整参数 α 和 β , 导致结构发生变化. 固定 α 并增加 β 会导致 $|l_{1i}|$ 逐渐增大; 固定 β 并增加 α 会导致 $|l_{1i}|$ 逐渐减小. 通过参数变化时对应的图形可得, 参数 α 和 β 会影响共振束缚态中呼吸子和孤子的波形, 而不改变分子结构的空間位置.

参考文献

- [1] Wang J N, Cheng X P, Jin G M 2024 *Results Phys.* **58** 107493
- [2] Hirota R 2004 *The Direct Method in Soliton Theory* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [3] Tang Y N, Tao S Q, Guan Q 2016 *Comput. Math. Appl.* **72** 2334
- [4] Dieli L, Pierangeli D, Baronio F, Conti C, Liu W J 2026 *Phys. Rev. Lett.* **136** 053804
- [5] Zhang Z, Li B, Chen J C, Guo Q, Stepanyants Y 2022 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **112** 106555
- [6] Zhang Z, Li B, Chen J C, Guo Q, Stepanyants Y 2022 *Phys. Scr.* **97** 115205
- [7] Yang X Y, Zhang Z, Wang Z 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 1553
- [8] Sun Y J, Li B 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 19297
- [9] Wu J J, Sun Y J, Li B 2023 *Results Phys.* **45** 106243
- [10] Yan Z W, Lou S Y 2020 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **91** 105425
- [11] Xu D H, Lou S Y 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 014208 (in Chinese) [徐德辉, 楼森岳 2020 物理学报 **69** 014208]
- [12] Barashenkov I V, Smirnov Y S, Alexeeva N V 1998 *Phys. Rev. E* **57** 2350
- [13] Stratmann M, Pagel T, Mitschke F 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 143902
- [14] Zeng P A, Liu L, Zeng P P 2026 *Acta Phys. Sin.* **75** 120001 (in Chinese) [曾平安, 刘丽, 曾平平 2026 物理学报 **75** 120001]
- [15] Ma Y L, Li B Q 2024 *Nonlinear Dyn.* **112** 2851
- [16] Lou S Y 2020 *J. Phys. Commun.* **4** 041002
- [17] Jia M, Lin J, Lou S Y 2020 *Nonlinear Dyn.* **100** 3745
- [18] Liu X Y, Zhang H X, Yan Y Y, Liu W J 2023 *Phys. Lett. A* **457** 128568
- [19] Wu X H, Gao Y T, Yu X, Ding C C 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 16449
- [20] Wu X Q, Peng J S, Boscolo S, Finot C, Zeng H P 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 263802
- [21] Zhou Y, Kang J, Wong K K Y 2024 *Adv. Photonics Res.* **5** 2400049
- [22] Konopelchenko B G, Dubrovsky V G 1984 *Phys. Lett. A* **102** 15

- [23] Zhang Y F, Gui L L 2024 *Mathematics* **12** 3717
- [24] Xu L J, Ma Z Y, Fei J X, Tian Y S, Zhao Y 2025 *Mathematics* **13** 236
- [25] Yang S X, Zhang Z, Li B 2020 *Adv. Math. Phys.* **2020** 1
- [26] Ma H C, Yue S P, Deng A P 2022 *Nonlinear Dyn.* **109** 1969

录用稿件，非最终出版稿

Lump chain and hybrid interaction solutions for a (2+1)-dimensional generalized Caudrey–Dodd– Gibbon–Kotera–Sawada equation in fluid dynamics*

HOU Huijuan MENG Xianghua[†]

(*School of Applied Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing,
100192, China*)

Abstract

The (2+1)-dimensional generalized Caudrey–Dodd–Gibbon–Kotera–Sawada (gCDGKS) equation is an important integrable equation in fluid mechanics. In this paper, a novel type of interacting lump structures and various bound-state molecular solutions for this equation are investigated. The general multi-soliton solutions in hyperbolic function form are constructed via the Hirota bilinear method. Purely imaginary parameters with a key small parameter ε are introduced into the soliton solutions to obtain lump chains. When ε goes to zero, the asymptotic behavior of the lump chains are analyzed. It is found that during the degeneration process, two originally independently propagating lump chains gradually evolve into three lumps with identical velocities, which are closely arranged in space to form a resonant triangular structure. This process clearly reveals the dynamical transition mechanism of lump interactions from the crossing-through interaction with unchanged shapes to the interaction characterized by merging, deformation and resonance. Furthermore, based on the hyperbolic N -soliton solutions, a variety of mixed molecular structures solutions, including one-breather-one-soliton molecule, one-breather-two-soliton molecule and interaction between one-breather-one-soliton molecule and two-soliton molecule are constructed under velocity resonance conditions. The adjustment of the parameters α and β can change the shape of the breather component within the molecules without altering their overall spatial positions. The collision processes among these molecules demonstrate that the interactions between these mixed bound states are always elastic, which verifies the stability of such molecular structure as particle-like excitations. In summary, this work reveals the transition path from interacting lump chains to resonant triangular lump structures and from solitons to various mixed molecular bound states within the (2+1)-dimensional gCDGKS framework.

Keywords: Generalized CDGKS equation, Lump chain, Breather-soliton molecule, State transition

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 62071053).

[†] Corresponding author. E-mail: xhmeng@bistu.edu.cn