基于连续变量 GHZ 态的最优两参数估计*

蔚娟[1)†] 徐玉欣[1)] 储隽伟[2)] 张岩[1)] 谭振坤[1)†] 刘丙才[1)]

1）（西安工业大学，光电工程学院，西安 710021）

2）（西安应用光学研究所，西安 710100 ）

摘 要

多参数量子估计是精密计量与分布式量子传感网络的核心。然而量子资源对环境损耗极度敏感，损耗不仅导致量子资源退化，还会破坏多参数网络中的资源分配结构，严重制约了量子传感技术在实际复杂环境中的应用。针对这一问题，本文提出一种基于三模连续变量 GHZ 纠缠态的两参数联合估计方案。通过参量放大器与线性干涉网络构建全局纠缠，结合相应的联合探测策略，理论证明了该方案在无损条件下对两参数的估计灵敏度可同时超越标准量子极限（SQL）并逼近量子 Cramér-Rao 边界。当干涉仪输入端压缩态的压缩参量为 1.50 时，有损环境下相位估计灵敏度信噪比提升可达 19.62 dB。进一步研究揭示了不同损耗环境对传感性能的制约规律，对称损耗导致真空噪声占据主导，使得高初始压缩度带来的灵敏度增益降低。而非对称损耗则从根本上破坏了全局纠缠资源的对称分配结构，导致两参数估计灵敏度出现急剧反向分化，致使特定参数估计灵敏度退化至经典极限以下。本研究揭示了量子资源分布对多参数传感网络性能的制约机制，为非理想条件下分布式量子传感网络的设计提供了理论依据。

关键词：两参数估计，Greenberger-Horne-Zeilinger 纠缠态，非对称损耗，量子 Cramér-Rao 边界

PACS: 42.50.Dv, 42.50.Lc, 03.65.Ud, 06.20.Dk

*__基金：__国家自然科学基金(批准号: 62105256)、陕西省科学技术厅重点研发领域一般项目（批准号: 2025CY-YBXM-116，2025CY-YBXM-058）、陕西省科技厅四链融合（批准号：2024CY-JJQ-27）、陕西省教育厅科研计划项目（批准号：24JP075）

†通讯作者. E-mail: yujuan643@126.com

†共同通讯作者. E-mail: tzk0828@163.com

录用稿件，非最终出版稿

1 引 言

干涉仪作为精密测量的核心工具，在引力波探测[1]、高分辨生物成像[2-4]、磁场传感[5]等领域发挥着不可替代的作用[6]。然而，传统经典干涉仪的测量灵敏度受限于由电磁场真空涨落引起的标准量子极限（Standard quantum limit, SQL）。为了突破这一物理瓶颈，量子精密测量技术引入了压缩态、纠缠态等非经典资源[7-12]。Caves 首次提出将压缩真空态注入干涉仪空闲端口，利用量子态抑制特定正交分量的量子噪声，从而实现单参数测量灵敏度的跃升，该技术已在 LIGO 干涉仪中取得了突破性的实际应用[13]。在实际测量系统中，不可避免的光子损耗（如光学元件吸收、光路传输衰减等）是破坏量子优势的致命弱点[14,15,45]。对于压缩注入型的马赫—曾德尔干涉仪（Mach-Zehnder Interferometer，MZI），当存在损耗时会导致量子资源的退相干[9]，使测量灵敏度迅速逼近甚至劣于 SQL。华东师范大学陈丽清教授团队提出了一种损耗容忍的量子干涉仪方案[16]，通过引入可变分束器动态优化分束比，最大程度地将量子资源保护在无损耗臂中，成功在高达 90%的损耗下依然保持约 1.60 dB 的量子增强优势，表明合理的资源分配机制是应对损耗的有效手段。

随着应用场景的复杂化，仅获取单一参数已无法满足需求。在量子成像，生物传感和多维场测量等应用中，往往需要同时获取多个空间或频率分布的相位信息。近年来，国内外研究团队在多参数量子联合估计（Multi-Parameter quantum Estimation，MPE）上取得了显著进展[17-22]。2020 年，中国科学技术大学郭光灿研究团队提出一种对非对易的多参数测量灵敏度的权衡方法，实现了并行机制下量子磁力计中三个参数的灵敏度极限辨别[23]。同年，清华大学的尤力研究组实现了基于多模 Ramsey 干涉仪的多参数估计，证明存在粒子数波动及探测噪声的情

录用稿件，非最终出版稿

形下方案的完备性[24]。山西大学贾晓军团队近期提出并验证了一种确定性的量子增强多臂干涉仪，通过在干涉仪内部并行使用多个压缩态，并结合信号的多通序列放大技术，实现了对三个独立相位信号的同时测量，不仅突破了经典极限，还获得了超过 10 dB 的信噪比提升[26,27]。此外，通过构建分布式量子传感网络（如截断的 SU(1,1)干涉仪）[30-34]，也可实现对多个相位线性组合超越 SQL[35]。然而，随着多参数干涉网络规模的扩大，光路结构的复杂性使得系统对外部环境的干扰愈发敏感，与单参数估计系统不同，基于纠缠的多臂干涉网络中，多通道间的相干串扰与光子损耗深度耦合[36]。当干涉网络遭遇非对称损耗时，不仅会引入额外的真空噪声，更会破坏系统本就脆弱的多模纠缠结构，同时大幅降低多参数测量的灵敏度极限。因此，建立可扩展的纠缠增强多模干涉系统，研究多模干涉仪不对称损耗对资源分配及传感极限的制约机制，对于推动量子传感网络走向实用化至关重要。

针对上述核心问题，本文提出并理论分析了一种基于三模连续变量 Greenberger-Horne-Zeilinger（GHZ）纠缠态的确定性两参数联合估计方案。连续变量 GHZ 态能够在多个分离的模式间构建出真正的全局量子相干纠缠[28,46]，赋予了该传感网络极强的系统可扩展性。利用独立的光学参量放大器（Optical Parametric Amplifiers, OPAs）制备高品质单模压缩态，通过特定设计的线性分束器网络生成适用于特定多参数估计任务的三模 GHZ 纠缠结构，并采用相匹配的联合探测策略完成双参数联合估计。通过对两参数测估计方差与量子 Fisher 信息的研究，验证了双参数估计方差在无损条件下均能够逼近量子 Cramér-Rao 边界（Quantum Cramér-Rao Bound, QCRB）。在此基础上，本文构建涵盖通道传输损耗与终端探测损耗的完整系统理论模型，重点研究了对称与非对称损耗机制下多

录用稿件，非最终出版稿

模干涉网络中参数估计灵敏度的衰减机制。为新一代分布式量子传感网络的资源调配与方案优化提供可靠的理论支撑。

2 理论分析

连续变量 GHZ 纠缠态是多模量子传感与分布式量子信息处理中最具代表性的非经典资源之一[25]，其本质特征在于系统整体具有不可分的全局相干纠缠，任何单模或双模的约化密度矩阵均无法完整表征其统计性质，属于无法分解为低阶纠缠直积的真三体纠缠态。对于连续变量三模体系，第 $m(m=1,\ 2,\ 3)$ 个模式的正交位置算符 $\hat{X}_m=(\hat{a}_m+\hat{a}_m^{\dagger})/\sqrt{2}$ 与正交动量算符 $\hat{Y}_m=i(\hat{a}_m^{\dagger}-\hat{a}_m)/\sqrt{2}$ 由湮灭算符 $\hat{a}_m$ 与产生算符 $\hat{a}_m^{\dagger}$ 定义，二者满足正则对易关系 $\left[\hat{X}_m,\hat{Y}_m\right]=i$，构成一对非对易可观测量。受海森堡不确定性原理限制，单模体系无法同时对位置与动量实现超越 SQL 的高灵敏度测量，这构成了经典测量与单模量子传感的固有灵敏度上限。

为突破单模探测的灵敏度边界，双模 Einstein-Podolsky-Rosen（EPR）纠缠态凭借非局域关联，可通过联合测量实现一对非对易可观测量的同时高灵敏度测量[24,38]。然而，双模 EPR 纠缠仅适配双节点场景，无法满足复杂分布式网络中多物理参数同步传感的需求。为此，本文引入连续变量三模 GHZ 态作为核心量子资源，不仅能够延续联合探测突破 SQL 的核心机制，更通过构建不可分的多模全局相干关联，支撑起多参数的并行精密估计。在理想高斯压缩条件下，三模总动量关联涨落与任意两模式正交相位之差的关联噪声均正比于 e^{-2r}（r 为压缩参量）。相较于仅能生成一组正交分量关联的双模系统，GHZ 态可同时构建多组低噪声的相对振幅关联与全局相位关联。这组全局关联算符既是表征该态真三体纠缠特性的代数特征，也是搭建多模联合探测、实现多参数估计超越 SQL 的物理基础。

录用稿件，非最终出版稿

本论文提出的基于连续变量 GHZ 态的两参数联合估计原理图如图 1 所示。初始光场分别经过 OPAs 后产生三束单模压缩态光场，其中 $\hat{b}_1$ 为正交振幅压缩态，$\hat{b}_2$ 和 $\hat{b}_3$ 为正交相位压缩态。随后，对光场 $\hat{b}_2$ 和 $\hat{b}_3$ 分别加载待测相移 φ_1 和 φ_2。加载相移后的三束光场注入由分束器 BS1（透反比 1:2）和 BS2（透反比 1:1）组成的线性干涉网络，BS1 和 BS2 分别锁定在 π 和 $\pi/2$ 相位。输出光最终由平衡零拍探测器（Balanced Homodyne Detector , BHD）进行联合正交测量，通过经典估计模块提取两个相移参数。

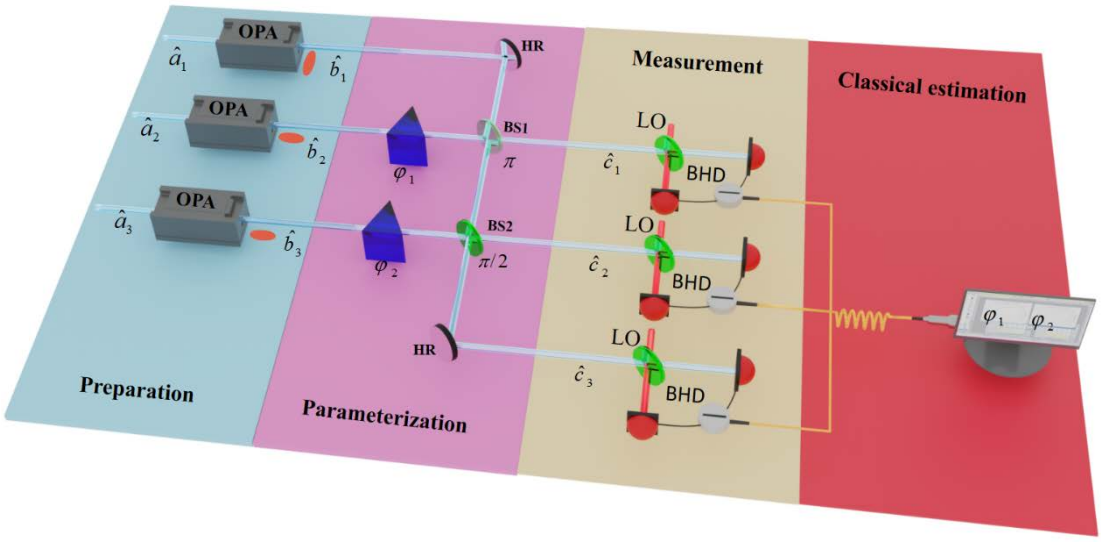


图 1 基于 GHZ 纠缠态的两参数估计原理图。OPA:光学参量放大器; BS:分束器; HR:高反镜; BHD:平衡零拍探测器; LO: 本地振荡光。

Fig.1 Schematic diagram of two-parameter estimation based on GHZ entangled state. OPA: Optical Parametric Amplifier; BS: Beam Splitter; HR: High Reflector; BHD: Balanced Homodyne Detector; LO: a strong local oscillator beam.

在未引入待估计相移时，系统输出光场 $\hat{c}_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 可表示为：

$$\begin{aligned}\hat{c}_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{b}_1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\hat{b}_2 \\ \hat{c}_2 &= -\sqrt{\frac{1}{6}}\hat{b}_1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\hat{b}_2 + i\sqrt{\frac{1}{2}}\hat{b}_3 \\ \hat{c}_3 &= -\sqrt{\frac{1}{6}}\hat{b}_1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\hat{b}_2 - i\sqrt{\frac{1}{2}}\hat{b}_3\end{aligned} \tag{1}$$

对应的量子关联噪声表达式为：

$$\begin{aligned}\hat{X}_{c_1} - \hat{X}_{c_2} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\hat{X}_{b_1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\hat{Y}_{b_3} \\ \hat{X}_{c_2} - \hat{X}_{c_3} &= \sqrt{2}\hat{Y}_{b_3} \\ \hat{X}_{c_1} - \hat{X}_{c_3} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\hat{X}_{b_1} + \sqrt{\frac{1}{2}}\hat{Y}_{b_3} \\ \hat{Y}_{c_1} + \hat{Y}_{c_2} + \hat{Y}_{c_3} &= \sqrt{3}\hat{Y}_{b_2}\end{aligned} \tag{2}$$

假定各 OPA 工作在相同状态，即三束初始压缩态光场具备相同的压缩参数 r。为从理论上严格论证输出光场的纠缠特性，采用 van Loock 和 Furusawa 提出的多组份不可分充分判据[39]：

$$\begin{aligned}&\left\langle\left[\Delta\left(\hat{X}_{c_1} - \hat{X}_{c_2}\right)\right]^2\right\rangle + \left\langle\left[\Delta\left(\hat{Y}_{c_1} + \hat{Y}_{c_2} + \hat{Y}_{c_3}\right)\right]^2\right\rangle < 4 \\ &\left\langle\left[\Delta\left(\hat{X}_{c_2} - \hat{X}_{c_3}\right)\right]^2\right\rangle + \left\langle\left[\Delta\left(\hat{Y}_{c_1} + \hat{Y}_{c_2} + \hat{Y}_{c_3}\right)\right]^2\right\rangle < 4 \\ &\left\langle\left[\Delta\left(\hat{X}_{c_3} - \hat{X}_{c_1}\right)\right]^2\right\rangle + \left\langle\left[\Delta\left(\hat{Y}_{c_1} + \hat{Y}_{c_2} + \hat{Y}_{c_3}\right)\right]^2\right\rangle < 4\end{aligned} \tag{3}$$

将式(2)推导出的正交分量线性组合代入式(3)的判据并计算其联合方差。计算结果表明，只要初始光场存在压缩，上述方差组合均严格打破了经典可分态的边界条件，可严格证明该输出光场具有真三体连续变量 GHZ 纠缠特性。

为充分提取多参数间的关联统计信息，本方案采用匹配的联合测量算符[40]，其构造形式与 GHZ 态的关联生成元保持一致，即正交相位分量之和与两两正交振幅分量之差：

$$\hat{\mathrm{O}}_Y = \hat{Y}_{c1} + \hat{Y}_{c2} + \hat{Y}_{c3},\ \ \hat{\mathrm{O}}_{X,23} = \hat{X}_{c2} - \hat{X}_{c3} \tag{4}$$

录用稿件，非最终出版稿

将其应用于两相位估计，在两分束器分别锁相为π和$\pi/2$时，干涉系统输出光场对应的量子关联噪声演化为：

$$\begin{aligned}
&\hat{X}_{c_1}-\hat{X}_{c_2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\hat{X}_{b_1}+\sqrt{\frac{1}{2}}\hat{Y}_{b_3}\left(\varphi_2\right)\\
&\hat{X}_{c_1}-\hat{X}_{c_3}=\sqrt{\frac{3}{2}}\hat{X}_{b_1}-\sqrt{\frac{1}{2}}\hat{Y}_{b_3}\left(\varphi_2\right)\\
&\hat{X}_{c_2}-\hat{X}_{c_3}=-\sqrt{2}\hat{Y}_{b_3}\left(\varphi_2\right)\\
&\hat{Y}_{c_1}+\hat{Y}_{c_2}+\hat{Y}_{c_3}=\sqrt{3}\hat{Y}_{b_2}\left(\varphi_1\right)
\end{aligned}\tag{5}$$

其中$\hat{Y}_{b_3}\left(\varphi_2\right)=\left(\hat{b}_3^{\dagger}e^{-i\varphi_2}+\hat{b}_3e^{i\varphi_2}\right)$，$\hat{Y}_{b_2}\left(\varphi_1\right)=i\left(\hat{b}_2^{\dagger}e^{-i\varphi_1}-\hat{b}_2e^{i\varphi_1}\right)$。依据误差传递函数理论[8,36]，待估相位的估计灵敏度由系统输出方差与对相位响应梯度的绝对值共同决定，两个联合测量量对待估相位φ_1和φ_2的响应梯度分别满足$\left|\partial\left\langle\hat{O}_Y\right\rangle/\partial\varphi_1\right|^2\propto\cos^2\varphi_1$，$\left|\partial\left\langle\hat{O}_{X,23}\right\rangle/\partial\varphi_2\right|^2\propto\cos^2\varphi_2$，在系统输出方差给定的情况下，响应梯度越大，相位估计误差越小[42]。因此在$\varphi_1\simeq\varphi_2\simeq0$的局域工作点附近，响应梯度达到最大，从而获得最优相位灵敏度[43,44]。计算可得φ_1和φ_2的估计灵敏度分别为：

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_1&=\frac{\sqrt{\left\langle\Delta^2\left(\hat{O}_Y\right)\right\rangle}}{\left|\partial\left\langle\hat{O}_Y\right\rangle/\partial\varphi_1\right|}=\sqrt{\frac{e^{-2r}}{4|\alpha|^2e^{2r}}}\\
\Delta\varphi_2&=\frac{\sqrt{\left\langle\Delta^2\left(\hat{O}_{X,23}\right)\right\rangle}}{\left|\partial\left\langle\hat{O}_{X,23}\right\rangle/\partial\varphi_2\right|}=\sqrt{\frac{e^{-2r}}{4|\alpha|^2e^{2r}}}
\end{aligned}\tag{6}$$

在不考虑传播损耗和探测损耗的理想无损条件下，系统对两待估相位的估计灵敏度相等。进一步计算该系统的量子 Fisher 信息可得[20]

$$F_{Q(\varphi_1)}=F_{Q(\varphi_2)}=2\sinh^2 2r+4e^{4r}|\alpha|^2\tag{7}$$

其对应的 QCRB[37]为$\Delta\varphi_{\mathrm{QCRB}}=\sqrt{1/F_Q}$[41]。

光学传输损耗和探测效率不足会向量子态中引入额外真空噪声，从而削弱三

录用稿件，非最终出版稿

模 GHZ 态的量子关联。本文采用线性环境耦合模型描述上述过程。对于第 i 个干涉臂，有 $\hat{b}_i \to \sqrt{\eta_i}\hat{b}_i + \sqrt{1-\eta_i}\hat{v}_i$，其中 $\eta_i\,(i=1,2,3)$ 分别为各自干涉臂传播过程中的通道损耗的损耗系数，$\hat{v}_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ 为引入的真空噪声。探测端的非理想量子效率进一步表示为 $\hat{c}_i \to \sqrt{\eta_d}\hat{c}_i + \sqrt{1-\eta_d}\hat{\mu}_i$，其中 η_d 为镜面损耗、探测效率、光电转换损耗等探测损耗的损耗系数，$\hat{\mu}_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ 为引入的真空噪声。在该噪声模型下，损耗通过引入真空涨落增大 GHZ 态联合正交分量的方差，并降低其三模不可分纠缠。经过 OPAs 放大、干涉网络以及上述损耗过程后，三个输出光场模式演化为

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_1 &= \sqrt{\eta_d}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\eta_1}\left(\hat{a}_1 e^{r}\right)+\sqrt{1-\eta_1}\hat{v}_1\right)+\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\eta_2}\left(\hat{a}_2 e^{-r}\right)+\sqrt{1-\eta_2}\hat{v}_2\right)e^{i\varphi_1}\right)+\sqrt{1-\eta_d}\hat{\mu}_1 \\
\hat{c}_2 &= \sqrt{\eta_d}\left(\begin{array}{l}-\sqrt{\frac{1}{6}}\left(\sqrt{\eta_1}\left(\hat{a}_1 e^{r}\right)+\sqrt{1-\eta_1}\hat{v}_1\right)+\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\eta_2}\left(\hat{a}_2 e^{-r}\right)+\sqrt{1-\eta_2}\hat{v}_2\right)e^{i\varphi_1} \\ +i\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\eta_3}\left(\hat{a}_3 e^{-r}\right)+\sqrt{1-\eta_3}\hat{v}_3\right)e^{i\varphi_2}\end{array}\right)+\sqrt{1-\eta_d}\hat{\mu}_2 \\
\hat{c}_3 &= \sqrt{\eta_d}\left(\begin{array}{l}-\sqrt{\frac{1}{6}}\left(\sqrt{\eta_1}\left(\hat{a}_1 e^{r}\right)+\sqrt{1-\eta_1}\hat{v}_1\right)+\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\eta_2}\left(\hat{a}_2 e^{-r}\right)+\sqrt{1-\eta_2}\hat{v}_2\right)e^{i\varphi_1} \\ -i\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\eta_3}\left(\hat{a}_3 e^{-r}\right)+\sqrt{1-\eta_3}\hat{v}_3\right)e^{i\varphi_2}\end{array}\right)+\sqrt{1-\eta_d}\hat{\mu}_3
\end{aligned}
\tag{8}
$$

利用误差传递公式可求得引入损耗后 φ_1 和 φ_2 的估计灵敏度：

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi_1 &= \frac{\sqrt{\left\langle \Delta^2\left(\hat{O}_Y\right)\right\rangle}}{\left|\partial\left\langle \hat{O}_Y\right\rangle/\partial\varphi_1\right|} = \sqrt{\frac{\eta_d\eta_2 e^{-2r}+1-\eta_d\eta_2}{4\eta_d\eta_2\left|\alpha\right|^2 e^{2r}}} \\
\Delta\varphi_2 &= \frac{\sqrt{\left\langle \Delta^2\left(\hat{O}_{X,23}\right)\right\rangle}}{\left|\partial\left\langle \hat{O}_{X,23}\right\rangle/\partial\varphi_2\right|} = \sqrt{\frac{\eta_d\eta_3 e^{-2r}+1-\eta_d\eta_3}{4\eta_d\eta_3\left|\alpha\right|^2 e^{2r}}}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

由上式可以清晰看出非理想环境对参数估计的双重退相干效应其物理机制可从以下两个方面加以理解。其一，损耗引入附加真空噪声，使联合测量方差中的噪声项由理想情况下的压缩噪声 e^{-2r} 演变为包含 $\eta_i\eta_d e^{-2r}+1-\eta_i\eta_d$ 的复合形式，从而抬升系统的总噪声本底，削弱压缩态所带来的噪声抑制优势；其二，损耗降

录用稿件，非最终出版稿

低了参与相位编码的有效光场强度，导致系统对相位的响应梯度变缓。因此，在非理想条件下，相位估计灵敏度由噪声本底抬升与相位响应梯度衰减二者共同决定。理想无损耗条件下，随着压缩参量 r 增大，压缩噪声 e^{-2r} 持续降低，因此相位估计灵敏度总体得到改善。但当损耗存在时，附加真空噪声 $1-\eta_i\eta_d$ 所占比例逐渐增大，使进一步提高压缩度所带来的相对收益减弱，这与图 3 中有损条件下灵敏度曲线相对于理想无损结果改善幅度受到限制的现象一致。尽管如此，只要系统维持足够高的传输与探测效率，本方案仍能保持 GHZ 纠缠结构，实现超越 SQL 的多参数联合估计。

3 结果与讨论

为定量评估非理想条件下的两参数量子传感性能，本节首先探讨不对称通道损耗对估计灵敏度的影响。在数值分析中，设定探测效率 $\eta_d=0.95$，光子数 $|\alpha|^2=5$，定义两干涉臂的平均传输效率 $\bar{\eta}=(\eta_2+\eta_3)/2$，并引入传输效率差 $\Delta\eta=\eta_2-\eta_3$ 作为量化系统非对称损耗程度的参量。图 2 (a) 和 (b) 分别表示平均传输效率 $\bar{\eta}=0.50$ 和 $\bar{\eta}=0.70$ 下，相位估计灵敏度随传输效率差 $\Delta\eta$ 的演化规律。图中红色实线为 SQL，黑色虚线为系统对应的 QCRB，蓝色点线和绿色点划线分别表示两相位估计灵敏度 $\Delta\varphi_1$ 和 $\Delta\varphi_2$。

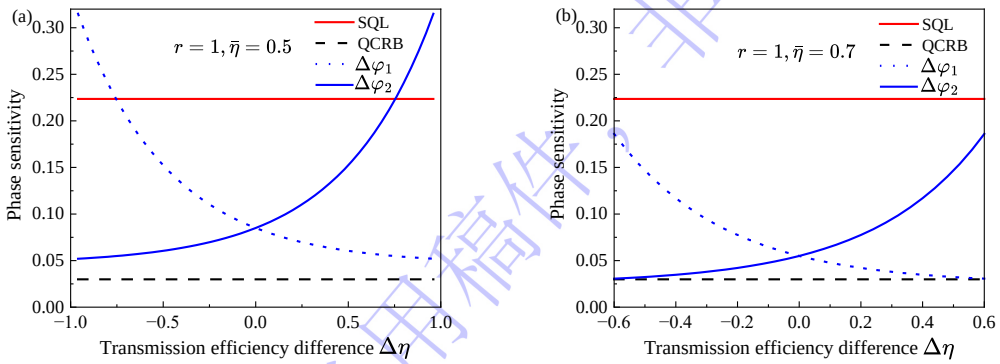


图 2 非对称损耗条件下相位估计灵敏度随损耗差的变化关系。(a)平均传输

录用稿件，非最终出版稿

效率 $\bar{\eta}=0.50$； (b)平均传输效率 $\bar{\eta}=0.70$。

Fig. 2 Relationship between phase sensitivity and loss difference $\Delta\eta$ under asymmetric loss conditions. (a) Average transmission efficiency $\bar{\eta}=0.50$; (b) Average transmission efficiency $\bar{\eta}=0.70$.

当 $\Delta\eta=0$（即完全对称损耗）时，两参数的估计灵敏度完全一致并达到当前损耗条件下的最优状态。然而，当 $\Delta\eta$ 偏离零点时，两相位的估计方差呈现出显著的反向分化趋势：其中一个参数的估计灵敏度得到改善，而另一个参数的灵敏度则迅速恶化。这是由于非对称损耗破坏了多模纠缠态原有的对称纠缠结构，导致联合探测算符无法有效抑制所有参数通道中的额外量子涨落。此外，对比图 2(a) 和 (b) 发现，当系统的平均传输效率从 0.50 提升至 0.70 时，测量灵敏度随 $\Delta\eta$ 的发散梯度明显趋于平缓。这表明，降低系统整体的共模损耗，不仅能提升全局绝对灵敏度，更是增强传感网络抵御非对称扰动、提升鲁棒性的关键机制。

进一步，我们分析对称传输损耗对系统估计灵敏度的限制规律，并与理想无损情况进行对比。图 3 (a) 和 (b) 分别展示了在不同光子数下（较低光子数 $|\alpha|^2=5$ 与高光子数 $|\alpha|^2=10^{12}$），两相位估计灵敏度随压缩参量 r 的变化规律。图中红色实线为 SQL，黑色虚线为系统对应的 QCRB，橙色双点划线为无损耗理想情况下的相位灵敏度曲线，蓝色点线、绿色点划线分别对应传输效率为 $\eta=0.90$ 与 $\eta=0.70$ 的损耗条件下相位估计灵敏度，图中插图为放大了 r 取 0.80~1.00 区间的曲线局部。

录用稿件，非最终出版稿

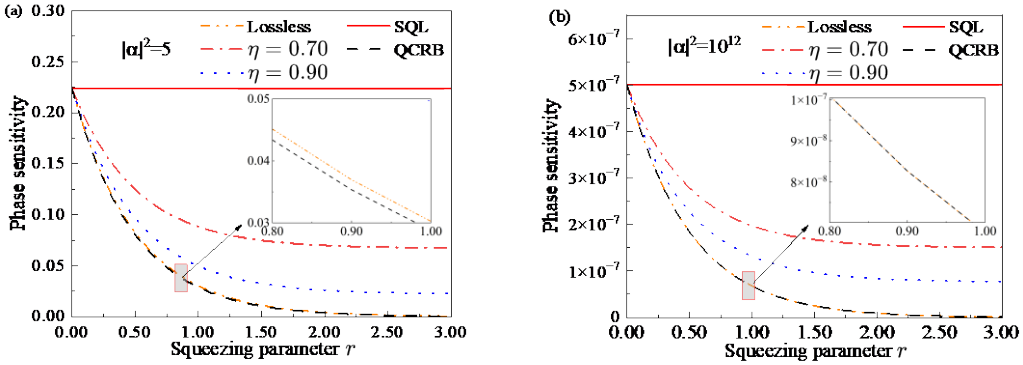


图 3 不同光子数下两相位估计灵敏度随压缩参量 r 的变化。(a) $|\alpha|^2=5$; (b) $|\alpha|^2=10^{12}$。

Fig. 3 The phase sensitivity of the two-parameter estimation system varies with the squeezing parameter r under different optical photons. (a) $|\alpha|^2=5$; (b) $|\alpha|^2=10^{12}$.

在 $\eta=1$ 的理想无损条件下，联合测量的估计灵敏度均随着压缩参量的增加而提升，并始终优于 SQL。特别是在强光条件下，由于相干平移算符主导了相位响应梯度，联合测量的灵敏度曲线完美逼近系统 QCRB。并且，在对称传输损耗条件下，尽管系统的估计灵敏度在低压缩度区仍随 r 的增加而改善，但在高压缩区域逐渐趋于饱和。表明传输损耗不仅按比例衰减了初始压缩涨落，更向系统注入了相应的真空噪声。随着压缩参量 r 的增大，初始压缩态的方差趋近于零，此时由外部损耗引入的真空噪声在总输出方差中占据主导地位，这也意味着在存在损耗的实际开放系统中，单纯依靠提升量子光源的压缩度无法实现估计灵敏度的无限制优化。

为直观量化本方案量子增强效果，引入信噪比提升指标 (SNRI)，定义为有损环境下联合探测的实际估计灵敏度与 SQL 的比值 $\mathrm{SNRI}=-20\log_{10}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi_{\mathrm{SQL}}}$ [29]。结合当前实验技术前沿，选取不同量级的通道传输效率与实验可达的压缩度进行

录用稿件，非最终出版稿

计算，结果汇总于表 1。

表 1 不同传输效率与压缩参数下的系统 SNRI。

Table 1 SNRI corresponding to different transmission losses and squeezing parameters.

传输效率 η	压缩参数 r	压缩度 (dB)	SNRI (dB)
0.90	0.50	4.34	7.04
	1.00	8.69	13.84
	1.50	13.03	19.62
0.70	0.50	4.34	4.94
	1.00	8.69	10.63
	1.50	13.03	15.60

由表 1 可知，在固定的传输效率下，系统的 SNRI 随初始压缩参量的增大而显著提升。在 $\eta = 0.90$ 时，压缩度从 4.34 dB 提升至 13.03 dB ，可使 SNRI 从 7.04 dB 显著提升至 19.62 dB。在相同的初始压缩度下，传输效率的下降会导致量子增益的衰减，其物理本质在于：当压缩参量 r 固定时，输入量子资源保持不变，但随着传输效率降低，损耗通道引入的真空噪声 $1-\eta_i\eta_d$ 增大，使有效压缩噪声逐渐向真空噪声水平靠近；同时，携带相位信息的有效光场幅度受到衰减，使系统的相位响应梯度减小。根据误差传播公式，这两种效应都会增大相位估计误差。因此，即使初始压缩度相同，传输效率越低，最终能够保留并用于参数估计的量子关联越弱，相对于经典极限的量子增益也随之降低。以 $r = 1.50$ 为例，当 η 从 0.90 下降到 0.70 时，SNRI 从 19.62 dB 降低至 15.60 dB。该组定量结果表明：高压缩度光源能够提供充足的非经典量子资源，但系统整体的传输、探测效

录用稿件，非最终出版稿

率决定了可实际获取的参数估计优势。因此，在多参数传感网络中，降低通道损耗与提升光源压缩度具有同等重要的实验意义。

4 结论

本文提出并系统研究了基于连续变量三模 GHZ 纠缠态的两相位联合估计方案。通过构建线性分束器网络生成全局多模纠缠，并采用特定联合正交探测策略，证明了该方案在理想无损条件下能够使双相位估计灵敏度同步超越 SQL，并完美逼近量子 Cramér-Rao 界。针对实际光路中的损耗问题，本文深入揭示了两类损耗对多参数传感网络截然不同的退相干机制。对称损耗主要表现为量子关联的均匀衰减导致估计灵敏度平缓降低，而非对称损耗则会从根本上破坏多模纠缠的对称分布，引发不同待测参数估计灵敏度的剧烈反向分化。

本研究从纠缠结构与资源分配视角，完善了开放系统下多参数量子估计的理论框架。结果表明，维持干涉仪臂间的信道对称性与提升系统整体透过率是保护多模量子传感优势的核心。

参考文献

[1] ATLAS Collaboration 2023 *Phys. Lett. B* **843** 137848

[2] Ludlow A D, Boyd M M, Ye J, Peik E, Schmidt P O 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 637

[3] Xiao M, Wu L A, Kimble H J 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 278

[4] Grangier P, Slusher R E, Yurke B, LaPorta A 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 2153

[5] Kitching J, Shaffer J P, Budker D 2025 *Optica* **12** 2008

[6] Caves C M 1981 *Phys. Rev. D* **23** 1693

[7] Walls D F 1983 *Nature* **306** 141

录用稿件，非最终出版稿

[8] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005

[9] Kang G H, Feng J X, Cheng L, Li Y J, Zhang K S 2023 *Chin. Phys. B* **32** 104204

[10] Menicucci N C, Van Loock P, Gu M, Weedbrook C, Ralph T C, Nielsen M A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 110501

[11] van Loock P, Braunstein S L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 3482

[12] Aoki T, Takei N, Yonezawa H, Wakui K, Hiraoka T, Furusawa A, van Loock P 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 080404

[13] LIGO O4 Detector Collaboration 2023 *Phys. Rev. X* **13** 041021

[14] Zhang X X, Yang Y X, Wang X B 2013 *Phys. Rev. A* **88** 013838

[15] Escher B M, de Matos Filho R L, Davidovich L 2011 *Nat. Phys.* **7** 406

[16] Huang W, Liang X, Zhu B, Yan Y, Yuan C H, Zhang W, Chen L Q 2023 *Phys. Rev. Lett.* **130** 073601

[17] Yao W, Zhang X, Tian L, Liu X, Shi S P, Zheng Y H 2024 *Phys. Rev. A* **110** 032429

[18] Guo X, Breum C R, Borregaard J, Izumi S, Larsen M V, Neergaard-Nielsen J S, Andersen U L 2019 CLEO/Europe-EQEC Munich, Germany, June 23-27, 2019 1

[19] Humphreys P C, Barbieri M, Datta A, Walmsley I A 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 070403

[20] Zhang J D, Li C, Hou L L, Wang S 2025 *Chin. Phys. B* **34** 010304

[21] Szczykulska M, Baumgratz T, Datta A 2016 *Adv. Phys.: X* **1** 621

[22] Smith J G, Barnes C H W, Arvidsson-Shukur D R M 2024 *Phys. Rev. A* **109**

录用稿件，非最终出版稿

042412

[23] Hou Z B, Zhang Z, Xiang G Y, Li C F, Guo G C, Chen H Z, Liu L Q, Yuan H D 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 020501

[24] Li X W, Cao J H, Liu Q, Tey M K, You L 2020 *New J. Phys.* **22** 043005

[25] Qin Y, Ma J X, Zhao D Y, Cheng J L, Yan Z H, Jia X J 2023 *Photonics Res.* **11** 533

[26] Ma J X, Yan J L, Liang S C, Yan Z H, Jia X J, Xie C D, Peng K C 2026 *Optica* **13** 541

[27] Feng Y, Zeng Z, Cheng J, You Z, Lu H, Yan Z, Jia X, Xie C, Peng K 2025 *Phys. Rev. Lett.* **135** 183602

[28] Yan J L, Yan Z H, Jia X J 2026 *Acta Phys. Sin.* **75** 040601 (in Chinese) [闫捷利, 闫智辉, 贾晓军 2026 物理学报 75 040601]

[29] Zuo X, Yan Z, Feng Y, Ma J, Jia X, Xie C, Peng K 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 173602

[30] Yurke B, McCall S L, Klauder J R 1986 *Phys. Rev. A* **33** 4033

[31] Jing J T, Liu C J, Zhou Z F, Ou Z Y, Zhang W P 2011 *Appl. Phys. Lett.* **99** 011110

[32] Pooser R C, Savino N, Batson E, Beckey J L, Garcia J, Lawrie B J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 230504

[33] Zheng K M, Mi M H, Wang B, Xu L, Hu L Y, Liu S S, Lou Y B, Jing J T, Zhang L J 2020 *Photonics Res.* **8** 1653

[34] Du W, Kong J, Bao G, Yang P Y, Jia J, Ming S, Yuan C H, Chen J F, Ou Z Y, Mitchell M W, Zhang W P 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 033601

录用稿件，非最终出版稿

[35] Guo X, Breum C R, Borregaard J, Izumi S, Larsen M V, Gehring T, Christandl M, Neergaard-Nielsen J S, Andersen U L 2020 *Nat. Phys.* **16** 281

[36] He W T, Lu C W, Yao Y X, Zhu H Y, Ai Q 2023 *Front. Phys*. **18** 31304

[37] Braunstein S L, Caves C M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439

[38] Yu J, Zhang Y, Wu Y H, Yang W H, Yan Z H, Jia X J 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 034202 (in Chinese) [蔚娟, 张岩, 吴银花, 杨文海, 闫智辉, 贾晓军 2023 物理学报 72 034202]

[39] van Loock P, Furusawa A 2003 *Phys. Rev. A* **67** 052315

[40] Gessner M, Pezzè L, Smerzi A 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 130503

[41] Li D, Gard B T, Gao Y, Yuan C H, Zhang W P, Lee H, Dowling J P 2016 *Phys. Rev. A* **94** 063840

[42] Liu J, Jing X X, Wang X G 2013 *Phys. Rev. A* **88** 042316

[43] Nichols R, Liuzzo-Scorpo P, Knott P A, Adesso G 2018 *Phys. Rev. A* **98** 012114

[44] Berni A A, Gehring T, Nielsen B M, Händchen V, Paris M G A, Andersen U L 2015 *Nat. Photon*. **9** 577

[45] Zhao J J, Guo X M, Wang X Y, Wang N, Li Y M, Peng K C 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 060302

[46] Hu X Y, Gu Y, Gong Q H, Guo G C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050305

录用稿件，非最终出版稿

Optimal Two-Parameter Estimation Based on Continuous-Variable GHZ States *

YU Juan [1)†] XU Yuxin [1)] CHU Junwei [2)] ZHANG Yan [1)] TAN Zhenkun [1)†] LIU Bingcai [1)]

1) (School of Optoelectronic Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710021, China)

2) (Xi'an Institute of Applied Optics, Xi'an 710100, China)

Abstract

Multi-parameter quantum estimation serves as the core of precision metrology and distributed quantum sensing networks, enabling the simultaneous acquisition of multidimensional physical quantities. However, quantum resources are extremely sensitive to environmental decoherence. In practical open systems, unavoidable photon losses not only degrade the quantum entanglement but also disrupt the resource allocation structures within multi-parameter networks. This severely restricts the robustness and practical applications of quantum sensing technologies. To address this structural vulnerability, we propose a two-parameter joint estimation scheme utilizing continuous-variable three-mode Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) entangled states. Global multipartite entanglement is generated using independent optical parametric amplifiers (OPAs) and specifically designed linear beam-splitter networks, coupled with a tailored joint homodyne detection strategy. We establish a comprehensive linear environment coupling model incorporating both channel transmission and terminal

录用稿件，非最终出版稿

detection losses. Quantitative evaluations demonstrate that under ideal lossless conditions, the estimation sensitivities for both parameters simultaneously surpass the Standard Quantum Limit (SQL) and saturate the Quantum Cramér-Rao Bound (QCRB). Notably, the signal-to-noise ratio of phase estimation achieves a significant enhancement of 19.62 dB with an input squeezing parameter of 1.50 even in lossy environments. Crucially, our in-depth analysis reveals the distinct underlying mechanisms of different loss types. While symmetric loss uniformly introduces vacuum noise that gradually attenuates quantum correlation and limits the sensitivity gain from high initial squeezing, asymmetric loss fundamentally destroys the symmetric distribution of global entanglement resources. This destruction triggers a sharp divergence in the two-parameter estimation sensitivities, causing the precision of specific parameters to degrade drastically below the classical limit. This study elucidates the intrinsic restriction mechanism of quantum resource distribution on multi-parameter sensing performance. We conclude that maintaining channel symmetry is as vital as improving transmittance, thereby providing a comprehensive theoretical basis and optimization guidelines for designing next-generation distributed quantum sensing networks under practical non-ideal conditions.

Keywords: Two-parameter estimation, Greenberger–Horne–Zeilinger entangled state,

录用稿件，非最终出版稿

Asymmetric loss, Quantum Cramér–Rao bound

*Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 62105256), the General Project of the Key Research and Development Program of Shaanxi Province (Grant Nos. 2025CY-YBXM-116, 2025CY-YBXM-058), the "Four Chains" Integration Project of Shaanxi Provincial Department of Science and Technology (Grant No. 2024CY-JJQ-27), and the Special Research Program of Shaanxi Provincial Department of Education (Grant No. 24JP075).

† Corresponding author. E-mail: yujuan643@126.com

† Co-corresponding author. E-mail: tzk0828@163.com

录用稿件，非最终出版稿