SD 振子系统吸引子的切换控制*

李乔洋 谢勇†

(西安交通大学, 复杂服役环境重大装备结构强度与寿命全国重点实验室,
陕西省无损检测与结构完整性评价工程技术研究中心, 西安 710049)

(收到)

光滑不连续振子 (Smooth and Discontinuous Oscillator, SD 振子) 是一种具有强非线性特性的动力系统, 其对初始条件和系统参数变化极为敏感, 常出现多种吸引子共存的多稳态现象. 这种复杂的动力学行为严重制约了 SD 振子在隔振设计与能量收集等工程实际中的可靠应用. 为解决这一问题, 针对多稳态系统目标吸引子的全局可切换性问题本研究基于非线性动力学与控制理论, 提出了一种主动延时控制策略, 通过严格的数学推导给出了控制器的数学表达形式, 利用李雅普诺夫直接法严格证明了该控制器的可行性与渐近稳定性, 并从理论上给出了控制参数的选取准则. 在此基础上, 开展了数值仿真实验, 结果表明, 所设计的控制器能够有效克服多稳态引起的轨道不确定性, 使系统从任意工作初始状态均能稳定且快速地收敛至预设的目标周期轨道, 收敛时间可控, 有效拓展了 SD 振子的工程应用范围.

关键词: 光滑不连续振子, 非线性动力学, 动力学控制

DOI: 10.7498/aps.76.20261146 **CSTR:** 32037.14.aps.76.20261146

1 引 言

在现代工程与科技领域, 振动隔离与控制始终是保障精密设备性能[1]、提升系统稳定性[2]和延长服役寿命[3]的核心挑战之一. 在航空航天领域的精密仪器减振[4]、交通运输行业中的车辆悬架减振系统[5]、土木工程结构抗震[6]、高端制造微振动隔离[7]等工程场景中, 传统线性隔振装置因固有频带与承载能力之间存在固有矛盾, 难以实现低频与超低频振动的有效隔离[8]. 为此, 国内外学者围绕非线性隔振理论与方法开展了大量研究[9]. 其中, 准零刚度隔振结构利用正负刚度结构的并联, 凭借其高静刚度、低动刚度的独特非线性力学特性, 能够在保证系统高承载能力的前提下显著降低系统固有频率, 从而将有效隔振起始频率拓展至低频甚至超低频范围[10,11], 为极端工况下的高性能振动隔离提供了重要技术途径.

2006 年由 Cao 等人[12]提出的具有负刚度特性的 SD 振子模型, 是准零刚度隔振平台的理想原型单元之一, 且因其丰富的动力学行为与在振动领域的研究应用潜力而受到广泛关注. SD 振子的独特研究价值主要体现在以下两个方面.

其一是在非线性动力学行为的揭示方面, 包括分岔[13,14]、极限动力学行为[15,16]、多吸引子共存[17]等复杂非线性现象的机理分析: Alluhydan 与 Abd EL-Salam[18]利用离散残差谐波平衡法与多尺度法求解了 SD 振子的高阶泰勒近似模型, 验证了解析方法在预测稳态响应及不连续边界失稳特征上的高精度. Li 等[19]针对带有四次非线性阻尼的 SD 振子开展动力学研究, 采用改进的广义谐波函数摄动法结合 Padé近似, 推导出极限环振幅与系统参数的显式解析关系及稳定性判据, 定量揭示了极限环的发生条件、演化路径、稳定区间及同宿轨道分岔边界.

* 国家自然科学基金 (批准号: 12172269) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yxie@mail.xjtu.edu.cn

© 2027 中国物理学会 Chinese Physical Society

In Press

其二是在工程应用方面, SD 振子因其几何非线性所导致的负刚度和多稳态特性, 成为低频隔振和宽频能量收集的理想基础模型: Zhang 等[20] 构建了融合三重拟零刚度 (TQZS) 特性与线性动态振动吸振器 (DVA) 的复合隔振模型, 该模型在大激励下具备更优的宽频隔振性能与调谐鲁棒性. Shang 等[21] 结合平均法与吸引域分析研究了连杆-弹簧构型的二阻电磁能量采集系统, 发现浅势阱构型能显著降低跨井振荡阈值并拓宽低频有效带宽, 在低频环境激励下实现了更高的状态捕获可靠性与能量转换适应性.

然而, 尽管 SD 振子的强非线性与不连续性给系统稳定性带来显著挑战, 针对该系统的主动控制研究却相对有限, 且多局限于特定的共振工况, 而对从任意初始状态出发的控制还比较少: Amer 等[22] 针对最恶劣的同时共振工况引入负微分反馈控制, 经多尺度法与 Routh-Hurwitz 判据分析, 使主系统幅值降低约 99.3%. 作为其延续, Abd El-Salam 等[23] 转向主共振工况并将精度提升至二阶近似, 提出兼具阻尼修正与频率调制作用的比例-微分控制器, 取得约 98.5% 的减振率. Xie 等[24] 提出基于代数分析与 Lyapunov 泛函的输出导数反馈及差分时滞反馈方法, 揭示了导数与时滞协同诱导系统渐近稳定的机理. Luo 等[25] 结合多尺度摄动与 Routh-Hurwitz 准则研究了负导数反馈控制下的分数阶 SD 振子内共振动力学, 并通过模拟退火算法优化控制参数, 有效抑制了共振失稳并拓宽了安全吸引盆. Wang 等[26] 应用平均法与胞映射理论分析了位移-速度-加速度状态反馈控制下的非线性电磁 SD 振子系统, 发现适度调节反馈参数能显著削减加速度传递率峰值并消除倍周期与混沌分岔. Wang[27] 等在非对称刚度 SD 振子中引入 Caputo 分数阶阻尼与时滞位移-速度反馈控制, 解析推导了等效势阱与输出信噪比表达式, 证实优化时滞与反馈增益能诱发随机 Hopf 分岔并显著提升信噪比峰值, 实现了对系统随机共振状态的主动调控与增益增强.

本文设计了一种非线性延时反馈控制器, 可成功驱动 SD 振子系统从任意初始状态切换至目标周期轨道, 通过严格的公式理论推导和李雅普诺夫直接法证明了控制器的稳定性, 给出了控制器参数的选取规则, 并结合数值模拟仿真结果, 展现了该控制器在实现对目标周期吸引子切换的良好控制效果.

2 SD 振子模型与动力学方程

2006 年, Cao 等人[12] 提出并研究了一种典型的振子系统, 其非线性特性可根据平滑度参数的值而表现为平滑或不连续. 在物理上, 该振荡器类似于一种突变桁架系统, 如图 1 所示: 质量块 m 通过一对能够抵抗拉力和压力的倾斜弹性弹簧连接; 每个刚度为 k 的弹簧都固定在一个刚性支撑上.

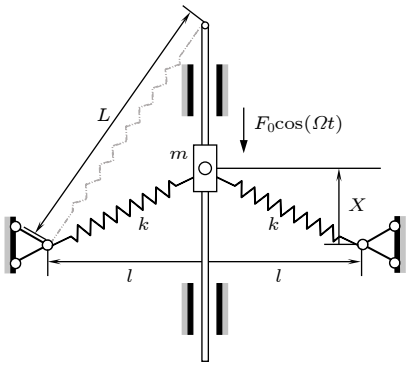


图 1 SD 振子模型

Fig. 1. Smooth and discontinuous oscillator model.

尽管弹簧本身提供线性的恢复力, 但由于系统几何参数的变化, 最终作用在质量块上的力表现出强烈的非线性特征, 展现出丰富的动力学行为. 该振子系统在理想自由情况下的运动方程可以写成如下形式:

$$m\ddot{X}+2kX\left(1-\frac{L}{\sqrt{X^2+l^2}}\right)=0 \tag{1}$$

其中, L 为倾斜弹簧平衡时的长度, X 为质量块位移, l 为两刚性支承之间距离的 $\frac{1}{2}$, 令 $\omega_0^2=\frac{2k}{m}$, $x=\frac{X}{L}$, $\alpha=\frac{l}{L}\geqslant 0$, 可将此式进行无量纲化处理:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\right)=0 \tag{2}$$

考虑更符合真实状态下的工况因素: 系统受到粘性阻尼 δ 和振幅为 F_0, 频率为 Ω 的外部谐波激励扰动的情况, 此时系统的运动方程为:

$$m\ddot{X}+\delta\dot{X}+2kX\left(1-\frac{L}{\sqrt{X^2+l^2}}\right)=F_0\cos\Omega t \tag{3}$$

令 $\tau=\omega_0 t$, $f_0=\frac{F_0}{2kL}$, $\xi=\frac{\delta}{2m\omega_0}$, $\omega=\frac{\Omega}{\omega_0}$; 对此式进行无量纲化处理后为:

$$x''+2\xi x'+x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\right)=f_0\cos\omega\tau \tag{4}$$

In Press

其中, 上标符号表示对 τ 求导.

3 控制器设计

SD 振子系统的几何非线性带来的多稳态共存问题严重限制了其在工程实际中的应用[15]: 在同一激励工况下, 系统共存多个周期或混沌吸引子, 而实际落入哪一吸引子取决于启动瞬态、参数误差等不可控因素, 且综合性能最优的特定周期轨道可能不属于系统固有吸引子集合, 仅仅靠参数设计无法获得. 因此, 如何保证系统在实际不确定的初始条件与参数下可靠运行于指定的工作轨道, 是 SD 振子从理论到工程应用需解决的重要问题. 对系统 (4) 施加控制器 $u(\tau)$:

$$x''+2\xi x'+x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\right)=f_0\cos\omega\tau+u(\tau) \tag{5}$$

为将系统稳态控制到周期 n 响应轨道上, 构造延时误差:

$$\begin{cases} e(\tau)=x(\tau)-x(\tau-T_n) \\ e'(\tau)=x'(\tau)-x'(\tau-T_n) \\ e''(\tau)=x''(\tau)-x''(\tau-T_n) \end{cases} \tag{6}$$

其中, $T_n=n*T$, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, 当 $e(\tau)$, $e'(\tau)$ 及 $e''(\tau)$ 均等于 0 时, 即成功实现控制, 由此可构造辅助线性滑模面函数 $s(\tau)$[28] 以简化推导证明过程:

$$s(\tau)=e'(\tau)+\lambda e(\tau) \tag{7}$$

要使 $s(\tau)$ 保持有界且可收敛至 0 时, $e(\tau)$ 及 $e'(\tau)$ 均有界且可收敛至 0 时, 根据 Hurwitz 稳定性, (7) 式的特征值 (设为 p) 应小于 0, 即应满足 $p=-\lambda<0$, $\lambda>0$, 当控制器使 $s(\tau)$ 收敛至 0 时, 误差满足:

$$e'(\tau)+\lambda e(\tau)=0 \tag{8}$$

设控制器在 τ_0 时刻开始工作, 方程 (8) 的解为:

$$e(\tau)=e(\tau_0)e^{-\lambda(\tau-\tau_0)} \tag{9}$$

由 (9) 式可知, 当系统轨迹进入滑模面并满足相应约束关系时, 误差将以 λ 决定的速率进行指数级衰减, 进一步对滑膜面函数 (7) 进行求导, 并系统的动力学方程 (5) 代入得 (10) 式, 为使方程的结构更加清晰, 对 (10) 式进行重构: 将第 (1) 项统一为用误差函数的形式表达; 第 (2) 项中的复杂非线性项合并定义为函数 $\Delta g(\tau)$ 以简化方程的书写形式; 由于系统所施加的外部激励具备周期函数特性, 且设定的延迟时间 T_n 恰好为该激励周期的整数倍, 基于周期函数的平移不变性, 当前与延迟时刻的外部激励项相抵消, 使第 (3) 项的结果等于 0. 化简后的式子如 (11) 式所示.

$$\begin{aligned} s'(\tau)=e''(\tau)+\lambda e'(\tau)=x''(\tau)-x''(\tau-T_n)+\lambda e'(\tau)=&\underbrace{-2\xi\left[x'(\tau)-x'(\tau-T_n)\right]}_{(1)} \\ &\underbrace{-\left[x(\tau)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x(\tau)^2+a^2}}\right)-x(\tau-T_n)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x(\tau-T_n)^2+a^2}}\right)\right]}_{(2)} \\ &\underbrace{+f_0\cos\omega\tau-f_0\cos\omega(\tau-T_n)}_{(3)}+\underbrace{u(\tau)-u(\tau-T_n)+\lambda e'(\tau)}_{(4)} \end{aligned} \tag{10}$$

$$s'(\tau)=-2\xi e'(\tau)+\lambda e'(\tau)-\Delta g(\tau)+u(\tau)-u(\tau-T_n) \tag{11}$$

要使 $s(\tau)$ 最终可以成功收敛到 0, 不妨设 $s'(\tau)=-ks(\tau)$, 则 $s(\tau)=s(\tau_0)e^{-k(\tau-\tau_0)}$, 当 $k>0$ 时, $s(\tau)$ 将以指数级衰减速度收敛至 0. 因此 $s'(\tau)=-k[e'(\tau)+\lambda e(\tau)]$, 代入 (11) 式即可得控制器函数 $u(\tau)$ 的最终表达式为:

$$u(\tau)=u(\tau-T_n)+\triangle g(\tau)-(\lambda-2\xi+k)e'(\tau)-k\lambda e(\tau) \tag{12}$$

当控制器工作时, 系统位移 $x(\tau)$ 与 $x(\tau-T_n)$ 作差. 若系统处于目标周期轨道, 即满足 $x(\tau)=x(\tau-T_n)$, $x'(\tau)=x'(\tau-T_n)$, 则 $e(\tau)=e'(\tau)=0$, 控制器不产生额外修正指令; 当系统处于非目标轨道时, 控制器中经由滑模面 $s(\tau)=e'(\tau)+\lambda e(\tau)$ 所构造的到达条件 $s'(\tau)=-ks(\tau)$ 不断修正系统状态, 使得当前状态不断向 T_n 前的状态趋近, 不断减小系统之间的周期差, 从而使轨迹在每个周期的末端逐步相符, 最终锁定在目标轨道上.

In Press

4 李雅普诺夫稳定性证明

尽管已经从物理上说明了系统终将收敛, 但为了从能量角度给出更为严格的数学论证, 下面采用李雅普诺夫直接法进行系统性的稳定性证明. 构造如下正定的李雅普诺夫函数:

$$V=\frac{1}{2}s^2+\frac{r}{2}e^2>0 \tag{13}$$

其中, r 为待定系数, 为保证李雅普诺夫函数的正定性, r 的取值应先满足 $r>0$, 具体取值将在后续继续推导. 对李雅普诺夫函数 (13) 进行求导:

$$\dot{V}=ss'+ree'=-ks^2+re(s-\lambda e)=-ks^2-\lambda re^2+res \tag{14}$$

可以得到第一项和第二项严格负定, 但由于存在第三项的影响, 无法由此断定李雅普诺夫函数一阶导满足严格负定, 现对于第三项进行处理并完成进一步证明: 根据基本不等式 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 可得:

$$\frac{r^2e^2}{2k}+\frac{k}{2}s^2\geqslant\sqrt{\frac{r^2e^2}{k}\cdot ks^2}=|res| \tag{15}$$

将 (15) 式代回到 (14) 式中可得:

$$\dot{V}\leqslant -ks^2-\lambda re^2+\frac{r^2e^2}{2k}+\frac{k}{2}s^2=-\frac{k}{2}s^2-\left(\lambda r-\frac{r^2}{2k}\right)e^2 \tag{16}$$

要使 (16) 式满足严格负定, 只需令 $\lambda r-\dfrac{r^2}{2k}>0$, 即 $0<r<2k\lambda$, 可取 $r=k\lambda$, 此时满足严格正定的李雅普诺夫函数及其严格负定的一阶导的最终形式已得到:

$$V=\frac{1}{2}s^2+\frac{k\lambda}{2}e^2>0 \tag{17}$$

$$\dot{V}=-ks^2-k\lambda^2e^2+k\lambda es\leqslant-\frac{k}{2}s^2-\frac{k\lambda^2}{2}e^2<0 \tag{18}$$

根据李雅普诺夫稳定性理论, 误差系统在原点 $(s,e)=(0,0)$ 处是全局渐近稳定的, 因此, 系统轨迹可以实现渐近收敛于目标周期轨道的要求.

5 控制效果验证

5.1 控制器参数的选取与初始化

控制器 (12) 中, 除 λ, k 为需设定的未知控制器参数外, 其余均为已知的系统参数, 现对于这两个参数 λ, k 具体值的选择进行说明, 由推导可知, 误差函数 e 和滑膜面函数 s 均将以指数级衰减速度趋于 0:

$$e(\tau)=e(\tau_0)e^{-\lambda(\tau-\tau_0)}\ (\lambda>0) \tag{19}$$

$$s(\tau)=s(\tau_0)e^{-k(\tau-\tau_0)}\ (k>0) \tag{20}$$

令目标收敛时间 $\Delta\tau=\tau-\tau_0$, 设经过 $\Delta\tau$ 后, $e(\tau)$, $s(\tau)$ 分别衰减至初始值的 $\delta_1\delta_2$, 即: $e^{-\lambda\Delta\tau}=\delta_1$, $e^{-k\Delta\tau}=\delta_2$. 由此, 可得到 λ, k 的取值分别为: $\lambda=-\dfrac{\ln\delta_1}{\Delta\tau}$, $k=-\dfrac{\ln\delta_2}{\Delta\tau}$.

控制器 (12) 包含延时状态项 $x(\tau-T_n)$、$x'(\tau-T_n)$ 及延时控制项 $u(\tau-T_n)$, 进行数值仿真前应在时间区间上预先定义完整的历史状态函数: 为使得控制器有足够的历史数据, 在第 5 个激励周期的末端开启控制器, 即 $\tau_0=5T$, 并以未受控系统在 $[\tau_0-T_n,\tau_0]$ 上的数值轨迹作为状态历史函数; 控制器开启前系统不施加任何主动控制, 历史控制输入取 $u(\tau)=0$.

本文使用 dde23 求解器进行数值分析, 该求解器可自动从该历史函数中插值读取延时状态, 延时控制项通过分段递推法计算: 在首个延时区间内取历史控制输入零值, 待当前控制序列计算并保存后, 在下一延时区间内利用上一区间的控制输入作为延时项, 如此逐段推进.

5.2 周期吸引子与周期吸引子之间的切换

当系统参数 $\alpha=1$, $\xi=0.01\sqrt{2}$, $\omega=0.75\sqrt{2}$, $f=0.8$, 初始条件 $(x,x')=(0,0)$, 相位截面取 $\omega\tau=0$ 时, 如图 2 的庞加莱截面图所示, 系统对应周期 5 的稳态解, 最大李雅普诺夫指数理论值应为 0, 但由于存在计算误差, 得到计算值为–0.0142,

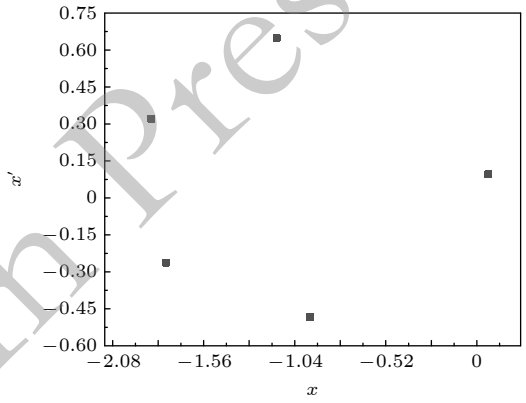


图 2 周期 5 吸引子的庞加莱截面图, 最大李雅普诺夫指数为–0.0142

Fig. 2. Poincaré section of chaotic attractor, the largest Lyapunov exponent is –0.0142.

In Press

结果可近似为 0.

使用本文设计的控制器, 设定控制器的目标收敛时间 $\Delta\tau = 2T$, 目标误差衰减比 $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0.0001$, 欲将系统控制到周期 1 的稳态解上, $T_n = 1 * T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, 为得到足够的历史数据, 在第 5 个周期处打开控制器. 图 3 展示了控制器的控制效果, 并与未受控制的位移曲线进行对比, 发现控制器成功在目标时间段内将系统控制到了期望的周期 1 轨道上, 且控制效果良好.

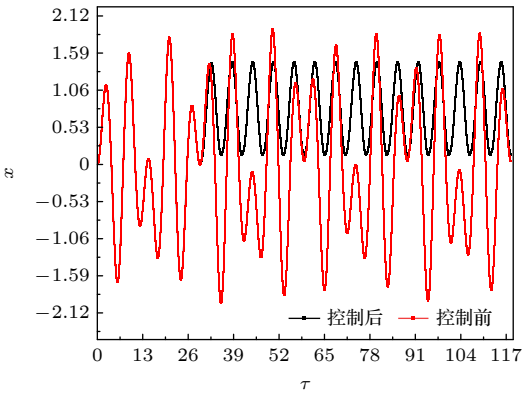


图 3 控制后 (黑色) 与控制前 (红色) 位移轨迹对比

Fig. 3. Comparison of displacement trajectories after control (black) and before control (red).

图 4 展示了所施加的控制力曲线图, 在成功控制到周期 1 轨道后, 输出的控制力曲线变为了近似周期函数曲线的形式. 这是由于控制成功后, 误差函数 e 及其各阶导数均近似为 0, 因此, 式 (12) 中除第一项外的其余项也均近似为 0, 此时, 控制器的表达形式可写为 $u(\tau) \approx u(\tau - T_n)$, 遵循近似周期函数的输出规律. 该控制器在每个周期交接处引入幅值有限的快速修正脉冲, 并在其余时段保持较低输出, 无发散趋势.

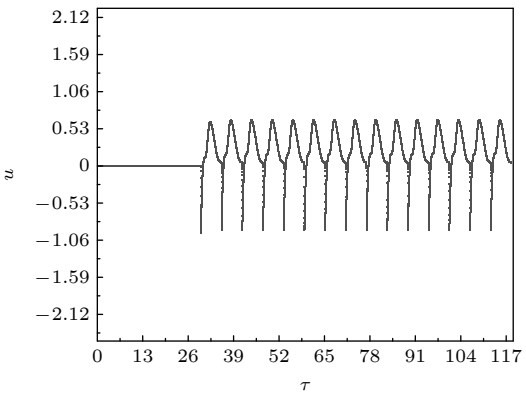


图 4 输出控制力曲线

Fig. 4. Output control force curve.

本文设计的控制器存在显著的优点: 即能按照目标需求, 将系统控制到任意周期解的轨道上, 即便目标吸引子不属于任何在此系统参数下系统本身拥有的吸引子. 如分岔图 5 及吸引盆图 6 所示, 当 $\alpha = 1$, $\xi = 0.01\sqrt{2}$, $\omega = 0.75\sqrt{2}$, $f = 0.8$ 时, 系统仅出现周期 1, 周期 3, 周期 5, 周期 7 四个稳态解共存的情况, 各稳态解相轨迹如图 7 所示.

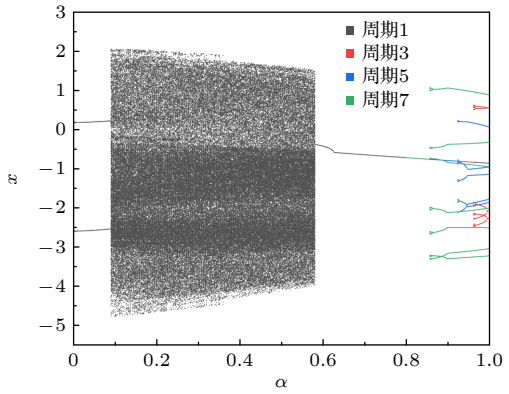


图 5 x-α 的分岔图

Fig. 5. Bifurcation diagram of x versus α.

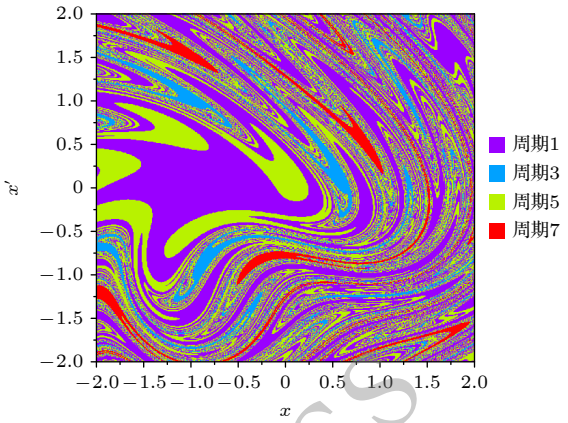


图 6 相空间吸引域分布图: 周期 1(紫色)、周期 3(蓝色)、周期 5(绿色) 和周期 7(红色)

Fig. 6. Basin of attraction map in phase space, where regions of period-1, period-3, period-5, and period-7 are coloured purple, blue, green and red, respectively.

现欲将系统控制到周期 2 的稳态解上, 此时 $T_n = 2 * T = \dfrac{4\pi}{\omega}$, 初始条件和其他控制参数不变, 控制结果如图 8 所示, 输出控制力曲线如图 9. 可以看出, 控制器仍然成功在目标时间段完成了控制任务, 且控制效果良好.

5.3 混沌吸引子到周期吸引子的切换

当系统参数 $\alpha = 0.5$, $\xi = 0.01\sqrt{2}$, $\omega = 0.75\sqrt{2}$,

In Press

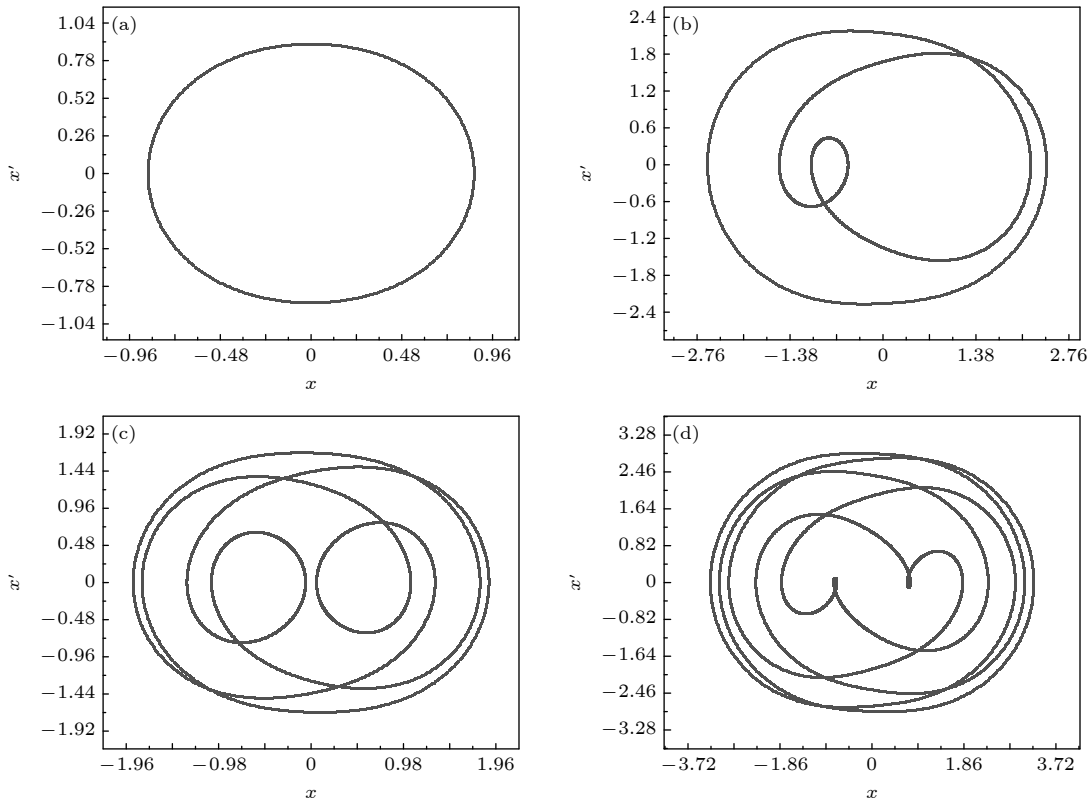


图 7 不同周期稳态解的相轨迹 (a) 周期 1; (b) 周期 3; (c) 周期 5; (d) 周期 7

Fig. 7. Phase trajectories of steady-state solutions with different periods: (a) Period-1; (b) Period-3; (c) Period-5; (d) Period-7.

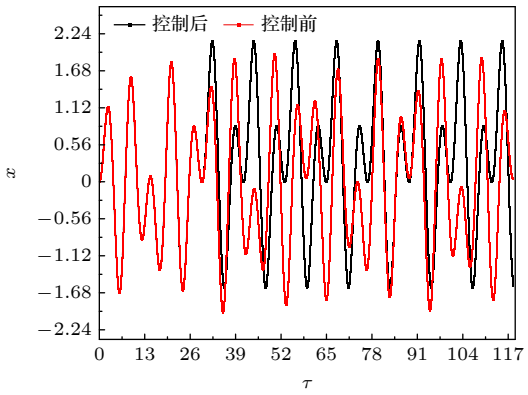


图 8 控制后 (黑色) 与控制前 (红色) 位移轨迹对比

Fig. 8. Comparison of displacement trajectories after control (black) and before control (red).

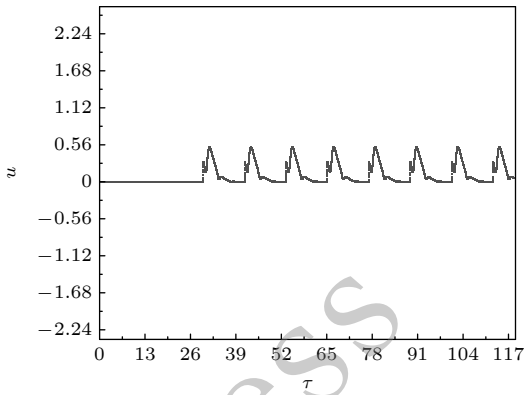


图 9 输出控制力曲线

Fig. 9. Output control force curve.

$f=0.8$, 初始条件 $(x,x')=(0,0)$, 相位截面取 $\omega\tau=0$ 时, 如图 10 所示, 在此参数下系统的庞加莱截面图上的点集排布具有分形特征, 因此系统对应稳态为混沌态.

仍然使用本文所设计的控制器, 设定控制器的目标收敛时间 $\Delta\tau=2T$, 目标误差衰减比 $\delta_1=\delta_2=\delta=0.0001$, 将系统控制到周期 3 的稳态解上, $T_n=3*T=\dfrac{6\pi}{\omega}$, 在第 5 个周期处打开控制器, 图 11 展示了控制器的控制效果, 输出控制力曲线如图 12. 发现即使对于混沌吸引子, 控制器也能成功在目标时间段完成控制要求, 性能稳定.

6 结论与展望

本文基于滑膜控制原理, 成功设计了一种非线性控制器用于调节 SD 振子的稳态响应. 经过严格的公式理论分析和李雅普诺夫直接法稳定性证明,

In Press

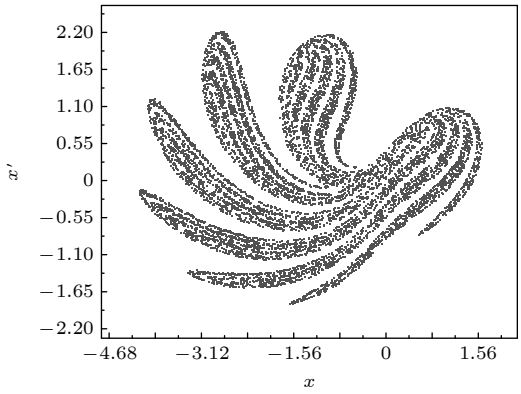


图 10 混沌吸引子的庞加莱截面图, 最大李雅普诺夫指数为 0.1101

Fig. 10. Poincaré section of chaotic attractor, the largest Lyapunov exponent is 0.1101.

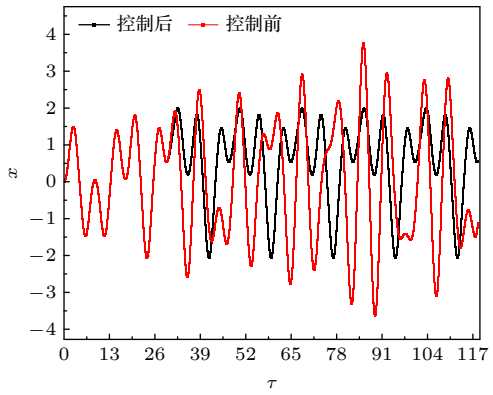


图 11 控制后 (黑色) 与控制前 (红色) 位移轨迹对比

Fig. 11. Comparison of displacement trajectories after control (black) and before control (red).

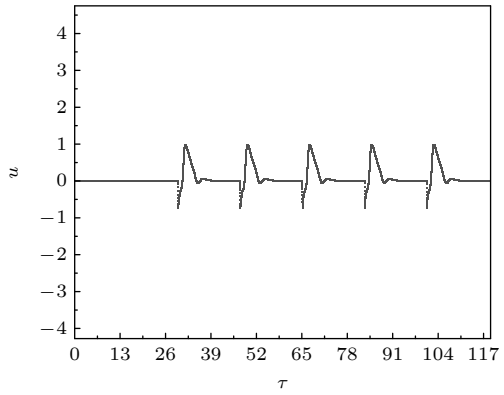


图 12 输出控制力曲线

Fig. 12. Output control force curve.

表明: 所设计的控制器具有良好的工作稳定性. 在理论分析基础上, 使用 dde23 函数进行数值模拟, 成功实现了周期 5→周期 1, 周期 5→周期 2, 混沌→周期 3 稳态的切换, 验证了该方法能够将系统控制到任意周期稳态轨道上, 控制律具有一定的鲁棒性和可行性, 可有效扩大 SD 振子的稳定工作区间.

需要指出, 本文控制器的设计和分析是在理想条件下进行的, 实际工程中, 有限带宽的执行器可能导致控制输入无法完全实现理论设计要求, 且测量噪声会直接进入误差信号和控制信号, 影响收敛精度. 后续工作将从以下方面进行拓展: 优化控制器设计, 尽量降低能量输出; 研究控制器对参数摄动和外部扰动的鲁棒性; 开展半实物或实物实验验证; 将所提出的控制策略拓展至其他多稳态非线性动力系统.

参考文献

[1] Xie X, He P, Wu D, Zhang Z 2023 *Precis. Eng.* **84** 91

[2] Ekanayake U N, Navaratne U S 2020 *J. Electr. Comput. Eng.* **2020** 6275460

[3] Wang Z, Li H N, Song G 2021 *Int. J. Str. Stab. Dyn.* **21** 2130001

[4] He Z, Feng X, Zhu Y, Yu Z, Li Z, Zhang Y, Wang Y, Wang P, Zhao L 2022 *Aerospace* **9** 324

[5] Liang Y J, Lu Y J, Gao D X, Wang Z S 2021 *Int J Comput Intell Syst* **14** 174

[6] Ahmadinejad M, Jafarisirizi A, Rahgozar R 2020 *Civ. Eng. J.* **6** 1314

[7] Zhang Y, Sheng C, Hu Q, Li M, Guo Z, Qi R 2018 *Aerosp. Sci. Technol.* **75** 99

[8] Li H, Li Y, Li J 2020 *Adv. Struct. Eng.* **23** 1739

[9] Shahraeeni M, Sorokin V, Mace B, Ilanko S 2022 *J. Sound Vib.* **526** 116822

[10] Li J, Jing X, Li Z, Huang X 2019 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **66** 8713

[11] Yan G, Zou H X, Wang S, Zhao L C, Gao Q H, Tan T, Zhang W M 2020 *J. Sound Vib.* **478** 115344

[12] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaia E E, Grebogi C, T Thompson J M 2006 *Phys. Rev. E* **74** 046218

[13] Chen H, Llibre J, Tang Y 2018 *Nonlinear Dyn.* **91** 1755

[14] Rui-Lan T, Qing-Jie C, Zhi-Xin L 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 074701

[15] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaia E E, Grebogi C, Thompson J M T 2008 *Int. J. Non-Linear Mech.* **43** 462

[16] Shen J, Li Y, Du Z 2014 *Int. J. Non-Linear Mech.* **60** 70

[17] Wang Z, Shang H 2023 *Fractal Fract.* **7** 314

[18] Alluhydan K, EL-Salam M N A 2026 *Mathematics* **14** 1687

[19] Li Z, Hou L, Peng R 2025 *International Journal of Non-Linear Mechanics* **178** 105185

[20] Zhang Y, Sun X, Xu J 2025 *Int. J. Non-Linear Mech.* **179** 105243

[21] Shang H, Li Z 2026 *J. Vib. Eng. Technol.* **14** 181

[22] Amer Y A, Abdullah R E, Khaled O M, Mahdy A M S, El-Salam M N A 2024 *J. Vib. Eng. Technol.* **12** 2351

[23] Abd El-Salam M N, Hussein R K, El-Shourbagy S M 2025 *Axioms* **14** 444

[24] Xie L, Zhao X, Deng F 2025 *J. Franklin Inst.* **362** 108079

[25] Luo X, Xie J, Shi W, Zhu S 2025 *Nonlinear Dyn.* **113** 34843

[26] Wang M, Zu Q, Wang R, Qin C, Liu P 2025 *Chaos, Solitons & Fractals* **199** 116632

[27] Wang Q, Wu H, Yang Y 2022 *Nonlinear Dyn* **107** 2099

[28] Bartolini G, Fridman L, Pisano A, Usai E, Morari M, Thoma

In Press

M, editors 2008 *Modern Sliding Mode Control Theory: New Perspectives and Applications*, vol. 375 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences* (Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg)

Switching control of attractor for SD oscillator system*

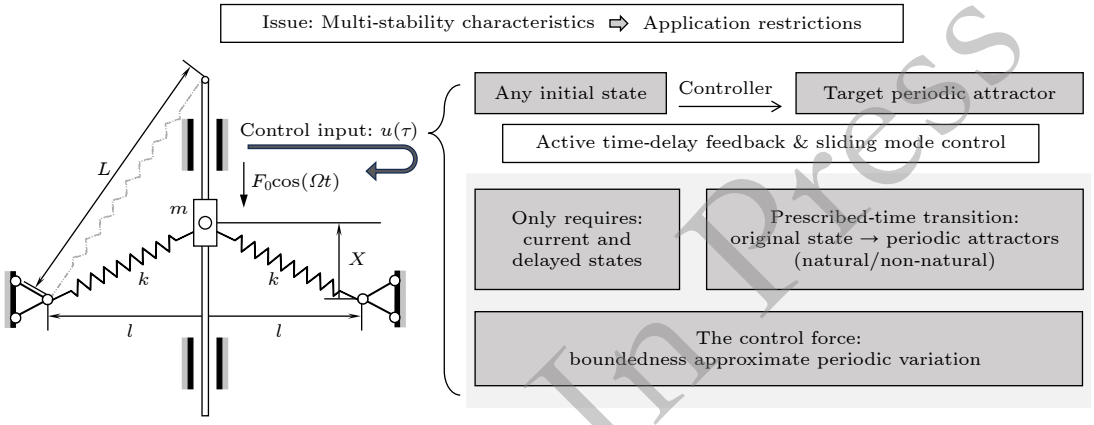
LI Qiaoyang XIE Yong †

(*Shaanxi Engineering Research Center of Nondestructive Testing and Structural Integrity Evaluation, State Key Laboratory for Strengthand Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049, *China*)

(Received)

Abstract

The smooth and discontinuous (SD) oscillator is a strongly nonlinear dynamical system that typically exhibits multistability, meaning multiple periodic or chaotic attractors coexist under the same set of parameters. This sensitivity to initial conditions and disturbances limits its reliability in applications requiring predictable and repeatable operating states, such as vibration isolation and energy harvesting. To achieve controllable attractor selection, this study proposes an active delayed feedback control strategy capable of driving a damped forced SD oscillator from any initial state to a designated periodic orbit. By constructing a delay error between the current state and the state delayed by an integer multiple of the excitation period, and introducing an auxiliary sliding mode variable, a recursive nonlinear control law is derived using exponential reaching conditions. The controller relies solely on the current and delayed states, without requiring an analytical expression of the target orbit, enabling it not only to stabilize naturally existing periodic attractors but also to stabilize specified periodic orbits that are otherwise unstable in the uncontrolled system. Global asymptotic stability of the closed-loop error system is proven via Lyapunov direct method, and explicit parameter selection rules are established based on desired convergence time and residual error. Numerical simulations demonstrate that the proposed controller successfully achieves switching among periodic attractors, including both naturally existing attractors and non-natural periodic orbits, and enables transitions from chaotic states to target periodic attractors within a prescribed time interval. After convergence, the control force remains bounded and tends toward approximate periodicity. This method provides a systematic approach for global attractor switching in multistable SD oscillators, significantly enhancing their controllability and engineering applicability.



In Press

Keywords: smooth and discontinuous oscillator, nonlinear dynamics, dynamic control

DOI: 10.7498/aps.76.20261146 **CSTR:** 32037.14.aps.76.20261146

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12172269).

† Corresponding author. E-mail: yxie@mail.xjtu.edu.cn