Acta Physica Sinica

光腔中量子简并费米原子气体莫尔超辐射的研究 *

周昊东　张星　余思淇　周鲁 †

(华东师范大学物理学院, 上海　200241)

我们研究了量子简并费米原子气体–光腔耦合系统中的莫尔超辐射, 揭示了超辐射相变的临界泵浦强度随莫尔参数的变化规律及其物理机制. 从微观散射过程出发, 系统研究了莫尔结构对费米超辐射相变阈值、阶数及亚稳定性的协同调控. 结果表明, 莫尔参数的增大一方面降低了形成长周期密度调制的动能代价, 另一方面使与腔场密度模式耦合的粒子–空穴谱权重向低频移动, 从而增强静态密度响应. 研究了温度对于相变性质的影响, 热占据展宽改变了费米能级附近低能通道对高阶自由能系数的贡献, 使超辐射相变随温度的降低由二阶转变为不连续的一阶相变. 通过比较自由能的全局极小值与局部曲率, 确定了有限跳跃相边界点与亚稳定区域, 给出了泵浦–温度空间的相图, 并进一步发现边界点附近存在超辐射相之间的一阶相变. 本研究为理解莫尔结构对量子相变的影响提供了新视角, 并有望将莫尔超辐射应用于量子增强的原子温度测量.

关键词: 自旋极化费米气体, 莫尔超辐射, 腔量子电动力学, Landau 相变理论

1 引　言

原子量子气体与光学谐振腔耦合系统的 Dicke 型超辐射相变及其平衡与非平衡动力学的研究已形成较完整的理论框架 [1–3]. 在这类体系中, 腔场既受到原子协同运动的影响, 又通过光子介导的全局反馈反作用于原子运动. 横向泵浦超过临界强度后, 原子把泵浦光相干散射到腔模并形成密度调制, 增强的腔场又加深原子所感受到的动态光学势, 从而产生自组织不稳定性 [4–6]. Baumann 团队在玻色–爱因斯坦凝聚体中实验实现 Dicke 型量子相变, 后续实验又进一步研究了对称性破缺、软模及腔介导长短程相互作用的竞争 [7–10]. 相关理论和实验进展已由平衡自组织扩展到驱动耗散临界动力学 [1,11].

* 科技创新 2030— “量子通信与量子计算机” 重大项目 (批准号:2021ZD0303200)、国家自然科学基金 (批准号:12074120) 和上海市 “科技创新行动计划” 量子科学领域基础研究项目 (批准号:24LZ1400600) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: lzhou@phy.ecnu.edu.cn

录用稿件, 非最终出版稿

费米气体中的超辐射自组织由费米面附近的低能粒子–空穴响应控制. 在线性响应框架下, 临界阈值取决于费米占据差、粒子–空穴能量差以及腔模密度算符的跃迁矩阵元, 因此可通过诸如泡利阻塞和费米面形变的机制来改变阈值 [12–15]. 当腔场传递动量与费米面附近的低能通道匹配, 即费米气体波矢满足 $k_F/k_c = 0.5$, 系统达到“完美嵌套”条件, 腔光子诱导的 Umklapp 散射截面达到极大值, 这会增强密度响应并大幅度降低超辐射相变阈值 [15,16]. 在包含内态和原子相互作用的模型中, 两组分费米气体可出现由泡利阻塞塑造的超辐射占据结构, 配对超流与超辐射序之间的竞争还可以产生三临界行为 [17]. 强耦合费米气体–光腔平台和稳态超辐射转变已在实验上实现, 其中 ^{6}Li 费米气体实验提供了直接例证. 光子介导密度波的观测进一步表明低频密度响应是理解临界行为的重要物理量 [18–20].

另一方面, 准周期或莫尔光晶格通过叠加不同波矢引入长周期尺度并重构 Bloch 能带, 为调控低能激发通道提供了可控手段. 准周期光晶格可由多束光、双频或 Fibonacci 构型实现, 其谱结构与局域化性质会随附加长周期尺度发生变化 [21–24]. 冷原子中可通过赝自旋扭转或双层扭转光晶格构造莫尔能带, 其中双层扭转光晶格已在 BEC 中实现, 并可产生可调平带 [25–27]. 叠加光学晶格形成的莫尔周期势已用于研究 BEC 空间结构和费米气体的非线性局域态 [28,29]. 相关研究还扩展到三维冷原子莫尔晶体和光学莫尔势的有效紧束缚描述 [30,31]. 周期莫尔光晶格中的 Rydberg 缀饰玻色气体基态和隙孤子也有相关研究 [32,33]. 而在光腔体系中, 准周期势与腔场反馈可产生迁移率边、重返局域化和费米超辐射阈值降低, 说明能带重构能够显著改变腔耦合静态响应 [34–36].

前期工作将一维莫尔晶格引入 BEC 与光学谐振腔的耦合系统中, 并发现超辐射相变临界点随莫尔参数变化的现象 [37]. 在此基础上, 本文进一步研究自旋极化费米气体, 建立莫尔构型、能带重构、腔模加权粒子–空穴谱与静态响应之间的联系, 并研究相变阶数与亚稳定性.

2 模型与理论方法

我们沿用前期 BEC 莫尔超辐射研究的腔–晶格构型 [37], 将原子替换为自旋极化简并费米子. 相同外势下, 两者具有相同的单粒子 Bloch 能带, 但 BEC 由宏观占据的凝聚轨道与集体激发描述, 而费米气体则填充费米海, 并受泡利阻塞约束产生不同的腔耦合响应. 本文在固定粒子密度下构建系统自由能, 并由其全局最小值确定平衡序参量.

录用稿件，非最终出版稿

2.1 模型构建

如图 1 所示, 考虑由 N 个质量为 m 的自旋极化费米原子与频率为 ω_c、模式为 $\cos(k_c x)$ 的单模驻波光腔耦合. 原子在横向受到强束缚横向激发被冻结, 使原子形成沿腔轴 x 方向的一维气体, 并受到光晶格势 $V_l\cos^2(k_l x)$ 作用. 频率为 ω_p 的泵浦光经原子散射进入腔模, 泵浦光和腔场均远失谐于原子内态跃迁. 由于同一内态费米子间的低能 s 波接触相互作用受泡利不相容原理抑制, 本文忽略原子间接触相互作用. 系统的有效哈密顿量为:

$$\hat{H} = \int dx\, \hat{\Psi}^\dagger(x)\hat{h}(x)\hat{\Psi}(x) - \hbar\Delta_c \hat{a}^\dagger\hat{a}, \tag{1}$$

$$\hat{h}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_l\cos^2(k_l x) + U_0\hat{a}^\dagger\hat{a}\cos^2(k_c x) + \eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\cos(k_c x). \tag{2}$$

其中, $\hat{h}(x)$ 为单粒子哈密顿量, $\hat{\Psi}(x)$ 为费米原子场算符, 满足反对易关系 $\{\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(x')\} = \delta(x-x')$. $\hat{a}$ 为腔光子湮灭算符, $\Delta_c = \omega_p - \omega_c$ 为泵浦与腔模之间的失谐, 通过腔场相位约定取单原子泵浦–腔场有效耦合强度为 $\eta = \hbar|g_0\Omega/\Delta_a|$, 耦合的符号吸收到腔场相位中. $U_0 = \hbar g_0^2/\Delta_a$ 为单个腔光子引起的原子光频移, 这里 g_0 为单原子–腔模耦合强度, Ω 为外部泵浦场的拉比频率, Δ_a 为泵浦频率与原子内态跃迁频率之间的失谐.

为方便表述, 取腔模反冲能 E_r 为能量单位, k_c^{-1} 为长度单位, $\hbar k_c$ 为动量单位, 并定义无量纲温度:

$$\tau = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{E_r} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega_r}, \qquad E_r = \hbar\omega_r = \frac{\hbar^2 k_c^2}{2m}. \tag{3}$$

同时给出后文中参数的参考值及其范围:

$$\begin{aligned} &\frac{k_F}{k_c} = 0.20, \quad \frac{V_l}{E_r} = -3.0, \quad \frac{\Delta_c}{\omega_r} = -3.0, \quad \frac{NU_0}{E_r} = -2.0, \\ &0 \le \sqrt{N}\eta/E_r \le 1.2, \quad 0.0005 \le \tau \le 0.01, \quad \hbar = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

本文取腔损耗率 $\kappa = 0$, 用平衡自由能和平均场近似描述保守极限, 得到的相变阈值、相变阶数、旋节线和亚稳区均基于这一理想平衡模型. 当 $\kappa \neq 0$ 时, 腔场一般为复数, 体系需要由驱动–耗散稳态方程及其稳定性来描述.

录用稿件，非最终出版稿

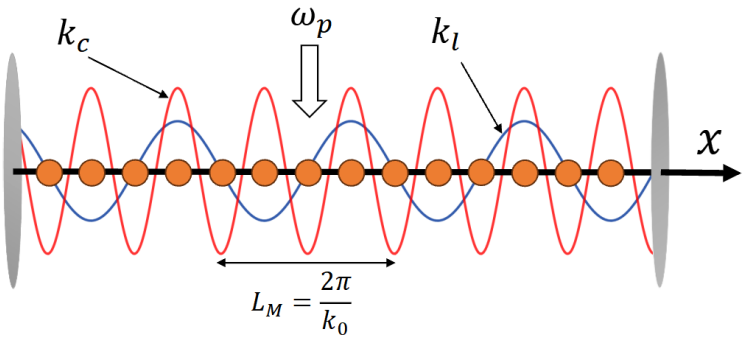


图 1　橙色圆点表示与单模驻波光学腔耦合自旋极化费米原子, 它受到光晶格势 $V_l \cos^2(k_l x)$ 的作用. 频率为 ω_p 的泵浦光从腔体侧面入射经原子散射进入腔模. k_c 和 k_l 分别为腔场和光晶格的波矢, L_M 为一维莫尔周期, $k_0 = 2\pi/L_M$ 为该周期对应的基本波矢.

Fig. 1. Orange dots denote spin-polarized fermionic atoms coupled to a single-mode standing-wave cavity and subject to the optical lattice potential $V_l \cos^2(k_l x)$. A transverse pump at frequency ω_p is scattered by the atoms into the cavity mode. Here, k_c and k_l are the cavity and lattice wave vectors, respectively. The one-dimensional moiré lattice has period L_M and fundamental wave vector $k_0 = 2\pi/L_M$.

静态光晶格势 $\cos^2(k_l x)$ 与泵浦–腔场干涉势 $\cos(k_c x)$ 的基本散射动量分别为 $2k_l$ 和 k_c, 二者叠加在 x 方向上, 形成周期为 $L_M = 2\pi/k_0$ 的一维莫尔晶格. 为在周期性边界条件下描述, 引入基本波矢 k_0 并令 $k_l = f_n k_0$, $k_c = f_{n+1} k_0$. f_n 是斐波拉契数列中的一个元素, 斐波拉契数列中的元素满足递归关系 $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ 并且 $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. 当 $n \to \infty$ 时,f_{n+1}/f_n 趋近于黄金分割比 $(\sqrt{5}+1)/2$. 为了研究逐渐逼近黄金分割比的行为, 本文选取满足 $2f_n - f_{n+1} = 1$ 的三组最小相邻斐波那契数对 $(f_n, f_{n+1}) = (1,1), (2,3), (3,5)$, 相应的散射动量比 $2k_l/k_c$ 分别为 $2, 4/3, 6/5$. 该选择使一次静态晶格散射与一次泵浦–腔场散射产生最小净动量 $2k_l - k_c = k_0$. 这三组数对中, $2f_n$ 与 f_{n+1} 互素, 故 k_0 是共同的基本倒格矢. 定义莫尔参数 $M = f_{n+1} = k_c/k_0$, 则 $2k_l = (M+1)k_0$ 且 $k_c = Mk_0$. 莫尔参数 M 越大, 系统越趋近于黄金分割比.

哈密顿量 (1) 在联合变换 $x \to x + \frac{L_M}{2}, \hat{a} \to -\hat{a}$ 下保持不变, 体系具有 $\mathbb{Z}_2$ 对称性. 当泵浦强度超过临界值时, 腔场模式会从两个等价构型中自发选择一个去布居. 由于发生超辐射相变时形成原子的莫尔晶格, 故称之为莫尔超辐射.

录用稿件，非最终出版稿

2.2 腔场平均场近似与 Bloch 展开

对腔内光场做平均场处理, 即将腔光子算符替换为其平均值

$$\hat{a} \to \alpha = \langle \hat{a} \rangle. \tag{5}$$

在无耗散保守极限下, 泵浦场为腔场提供相位参考, 腔场相位相对于泵浦场取 0 或 π, 故取 $\alpha \in \mathbb{R}$. 定义 $\bar{\alpha} = \alpha/\sqrt{N}$ 作为超辐射序参量, 在平均场近似下单粒子哈密顿量为

$$\hat{h}(\bar{\alpha}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_l \cos^2(k_l x) + NU_0\bar{\alpha}^2 \cos^2(k_c x) + 2\sqrt{N}\eta\bar{\alpha}\cos(k_c x). \tag{6}$$

无量纲形式为

$$\frac{\hat{h}(\bar{\alpha})}{E_r} = -\frac{1}{k_c^2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_l}{E_r}\cos^2(k_l x) + \frac{NU_0}{E_r}\bar{\alpha}^2\cos^2(k_c x) + 2\frac{\sqrt{N}\eta}{E_r}\bar{\alpha}\cos(k_c x). \tag{7}$$

哈密顿量具有周期 L_M, 根据 Bloch 定理原子波函数具有 Bloch 形式 [38,39]

$$\psi_{nq}(x) = e^{iqx}u_{nq}(x), \qquad u_{nq}(x + L_M) = u_{nq}(x). \tag{8}$$

其中, n 为能带指标, q 为第一布里渊区内的准动量. 将函数 $u_{nq}(x)$ 用平面波展开

$$u_{nq}(x) = \sum_j c_j^{(nq)} e^{ijk_0 x}. \tag{9}$$

式中, j 为平面波基底指标, $c_j^{(nq)}$ 为相应的展开系数. 因此,Bloch 态可写为

$$\psi_{nq}(x) = \sum_j c_j^{(nq)} e^{i(q+jk_0)x}. \tag{10}$$

在平面波基底 $|q + jk_0\rangle$ 中, 哈密顿量的矩阵元为

$$\begin{aligned} h_{jj'}(q;\bar{\alpha}) = &\left[\frac{\hbar^2(q+jk_0)^2}{2m} + \frac{V_l}{2} + \frac{NU_0\bar{\alpha}^2}{2}\right]\delta_{jj'} + \frac{V_l}{4}\left(\delta_{j,j'+M+1} + \delta_{j,j'-M-1}\right) \\ &+ \frac{NU_0\bar{\alpha}^2}{4}\left(\delta_{j,j'+2M} + \delta_{j,j'-2M}\right) + \sqrt{N}\eta\bar{\alpha}\left(\delta_{j,j'+M} + \delta_{j,j'-M}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

对于给定序参量 $\bar{\alpha}$, 数值对角化矩阵 (11) 得到 Bloch 态的本征能量 $\epsilon_{nq}(\bar{\alpha})$ 构成单粒子能带. 费米气体的对角化哈密顿量为

$$\hat{H}_f(\bar{\alpha}) = \sum_{n,q} \epsilon_{nq}(\bar{\alpha})\hat{c}_{nq}^\dagger \hat{c}_{nq}. \tag{12}$$

其中 $\hat{c}_{nq}^\dagger$ 和 $\hat{c}_{nq}$ 为 Bloch 单粒子态 (n, q) 上费米子的产生湮灭算符, 下标 f 表示费米气体.

为了在热力学极限下研究固定粒子密度时该系统的有限温度平衡态, 引入化学势 μ 巨正则哈密顿量为

$$\hat{K}(\bar{\alpha}, \mu) = \hat{H}_f(\bar{\alpha}) - \mu\hat{N} = \sum_{n,q}\left(\epsilon_{nq}(\bar{\alpha}) - \mu\right)\hat{c}_{nq}^\dagger \hat{c}_{nq}. \tag{13}$$

录用稿件，非最终出版稿

其中粒子数算符为

$$\hat{N} = \sum_{n,q} \hat{c}^{\dagger}_{nq} \hat{c}_{nq}. \tag{14}$$

平均场下各 Bloch 模式相互独立, 占据数 $n_{nq} \in \{0, 1\}$, 故全系统巨配分函数等于各模式态巨配分函数之积 $\Xi_{\mathrm{tot}} = \prod_{n,q} \Xi_{nq}$. 单个模式的巨配分函数为

$$\Xi_{nq} = 1 + \exp\left[-\frac{\epsilon_{nq}(\bar{\alpha}) - \mu}{k_{\mathrm{B}} T}\right]. \tag{15}$$

相应地全系统巨正则势为 $\Omega_f = -k_{\mathrm{B}} T \sum_{n,q} \ln \Xi_{nq}$. 为消除系统尺寸依赖, 下文统一以莫尔周期 L_M 进行归一化. 取费米参考波矢 $k_F = \pi\rho$, 并固定 $k_F/k_c = 0.2$, 对应的线密度为 $\rho = 0.2k_c/\pi$. 取系统总长度为 $L = 300\pi/k_c$, 则系统总粒子数为 $N = \rho L = k_F L/\pi = 60$. 由于莫尔周期长度为 $L_M = 2\pi/k_0 = 2\pi M/k_c$, 每个莫尔周期内的平均粒子数为

$$N_M = \rho L_M = 2M \frac{k_F}{k_c} = 0.4M. \tag{16}$$

当 $M = 1, 3, 5$ 时, 分别有 $N_M = 0.4, 1.2, 2.0$, 相应的莫尔周期数为 $N_p = L/L_M = 150/M$, 即 $150, 50, 30$. 离散准动量权重为 $w_q = 1/N_p$, 满足 $\sum_q w_q = 1$, 则每个莫尔周期内的巨正则势 $\Omega_{f,M} = \Omega_f/N_p$ 可表示为对 q 的加权求和

$$\Omega_{f,M}(\bar{\alpha}, \mu, T) = -k_{\mathrm{B}} T \sum_{n,q} w_q \ln\left\{1 + \exp\left[-\frac{\epsilon_{nq}(\bar{\alpha}) - \mu}{k_{\mathrm{B}} T}\right]\right\}. \tag{17}$$

在连续准动量极限下, 该加权求和化为积分. 对于任意函数 $G(q)$ 有

$$\sum_{q} w_q G(q) \to \frac{L_M}{2\pi} \int_{-k_0/2}^{k_0/2} G(q)\, dq. \tag{18}$$

给定 $\bar{\alpha}$ 和 T, 化学势 μ 由粒子占据约束自洽确定

$$N_M = -\left(\frac{\partial \Omega_{f,M}}{\partial \mu}\right)_{\bar{\alpha},T} = \sum_{n,q} w_q f_{nq}, \qquad f_{nq} = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{\epsilon_{nq}(\bar{\alpha}) - \mu}{k_{\mathrm{B}} T}\right]}. \tag{19}$$

f_{nq} 为费米–狄拉克分布. 每个莫尔周期内费米气体的 Helmholtz 自由能由 Legendre 变换得到 [40,41]

$$F_{f,M}(\bar{\alpha}, N_M, T) = \Omega_{f,M}\left(\bar{\alpha}, \mu_{\bar{\alpha}}, T\right) + \mu_{\bar{\alpha}} N_M. \tag{20}$$

其中 $\mu_{\bar{\alpha}} = \mu(\bar{\alpha}, N_M, T)$. 这里将 N_M 显式列为自由能和化学势的参数, 以区分不同 M 构型对应的每个周期平均粒子数.

在旋转参考系中, 腔模对全系统平均场自由能的贡献为

$$F_c(\bar{\alpha}) = -\hbar\Delta_c |\alpha|^2 = -\hbar\Delta_c N |\bar{\alpha}|^2, \tag{21}$$

录用稿件，非最终出版稿

相应每个莫尔周期的腔场自由能为

$$F_{c,M}(\bar{\alpha}) = \frac{F_c(\bar{\alpha})}{N_p} = -\hbar\Delta_c N_M |\bar{\alpha}|^2. \tag{22}$$

每个莫尔周期内的总平均场自由能为

$$F_M(\bar{\alpha}, N_M, T) = F_{c,M}(\bar{\alpha}) + F_{f,M}(\bar{\alpha}, N_M, T), \tag{23}$$

$$F_M(\bar{\alpha}, N_M, T) = -\hbar\Delta_c N_M |\bar{\alpha}|^2 + \mu_{\bar{\alpha}} N_M - k_{\mathrm{B}} T \sum_{n,q} w_q \ln\left\{1 + \exp\left[-\frac{\epsilon_{nq}(\bar{\alpha}) - \mu_{\bar{\alpha}}}{k_{\mathrm{B}} T}\right]\right\}. \tag{24}$$

给定 M 和 T 时, 平衡序参量由使自由能达到全局最小值的序参量位置确定,

$$|\bar{\alpha}| = \arg\min_{x \geq 0} F_M(x, N_M, T). \tag{25}$$

由于体系具有 $\mathbb{Z}_2$ 对称性, 自由能满足 $F_M(\bar{\alpha}, N_M, T) = F_M(-\bar{\alpha}, N_M, T)$, 超辐射相具有两个简并的序参量

$$\bar{\alpha} = \pm |\bar{\alpha}|, \qquad \alpha = \sqrt{N}\,\bar{\alpha}. \tag{26}$$

任取一支, 以非负值 $\bar{\alpha}$ 表征相变. 当 $\bar{\alpha} = 0$ 时, 体系处于正常相; 当 $\bar{\alpha} \neq 0$ 时, 腔场存在宏观相干占据, 体系进入超辐射自组织相.

3 结果与讨论

图 2 给出 $\tau = 0.003$ 时, 由式 (25) 确定的平衡序参量随无量纲集体泵浦强度的变化. 各构型在泵浦超过临界值后进入超辐射相. 相较于无外部光晶格的参考体系, 引入静态晶格降低了相变阈值, 且阈值在所考察的 $M = 1, 3, 5$ 构型中随 M 增大而降低.

结果表明, 在弱泵浦区, 各构型的序参量均为零, 体系处于正常相. 超过临界值后, 序参量随泵浦增强而增大, 体系进入超辐射自组织相. 引入静态晶格后, 相较于 $M = 0$ 的参考体系, 莫尔参数 M 增大, 临界泵浦强度也逐渐降低. 可见静态晶格提高了原子对泵浦–腔场干涉势的响应, 从而降低了发生超辐射相变所需的泵浦强度.

录用稿件，非最终出版稿

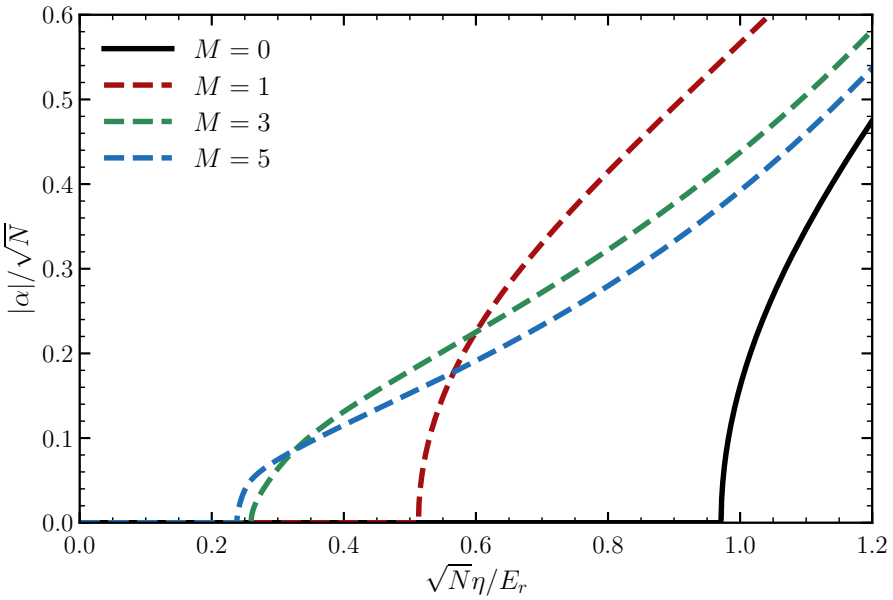


图 2　$\tau = 0.003$ 时不同莫尔参数下序参量 $|\alpha|/\sqrt{N}$ 随集体泵浦强度 $\sqrt{N}\eta/E_r$ 的变化. 黑色实线表示没有外部光晶格 $V_l = 0$ 的情况.

Fig. 2. $\tau = 0.003$, the order parameter $|\alpha|/\sqrt{N}$ varies with the collective pumping intensity $\sqrt{N}\eta/E_r$ under different moiré parameters. The black solid line is the case without the external optical lattice ($V_l = 0$).

该超辐射相变的临界点随莫尔参数变化的现象可由最低阶复合散射通道解释. 静态晶格项 $\cos^2(k_l x)$ 耦合 $\Delta j = \pm(M+1)$ 的动量态, 泵浦–腔场干涉项 $\cos(k_c x)$ 则耦合 $\Delta j = \pm M$ 的动量态. 这样在系统中产生 $\Delta j = \pm 1$ 的散射通道, 对应净动量转移

$$\Delta k = k_0 = 2k_l - k_c = \frac{k_c}{M}. \tag{27}$$

随着莫尔参数 M 的增大, Δk 减小. 因此, 增大 M 降低了使得此散射通道发生共振所需的动能, 使较弱的集体泵浦即可补偿建立腔场和重排原子密度所需的自由能代价. 在所考察的 $M = 1, 3, 5$ 构型中, 增大 M 使 Δk 减小, 降低了形成长周期密度调制的动能代价, 有利于在较弱泵浦下形成超辐射相. 这一几何机制已在前期玻色系统的莫尔超辐射研究中揭示 [37].

此外, 对于不同的 M, 发生超辐射相变时序参量并不随泵浦强度的增加而单调增大. 不同 M 的序参量曲线在超辐射区发生交叉, 且 $M = 3$ 与 $M = 5$ 的临界值已经较为接近. 这说明临界行为并非仅由动量尺度 k_c/M 决定, 还受到态占据以及相关散射矩阵元的共同影响.

为具体展示超辐射相与正常相在序参量、光子数、对称性破缺模式上的区别, 以 $M = 3$ 为例, 图 3 (a)

录用稿件，非最终出版稿

显示, 序参量和腔光子数在临界泵浦以上由零连续增长. 相应地, 自由能原点的曲率在临界处降为零, 随后出现 $\pm\bar{\alpha}$ 两个简并的非零场全局极小点, 出现 $\mathbb{Z}_2$ 对称性自发破缺, 如图 3 (b) 所示. 在实际含损耗的腔中, 可结合腔输出光强、相位及原子密度或动量分布中的 k_c 傅里叶分量来识别相变。

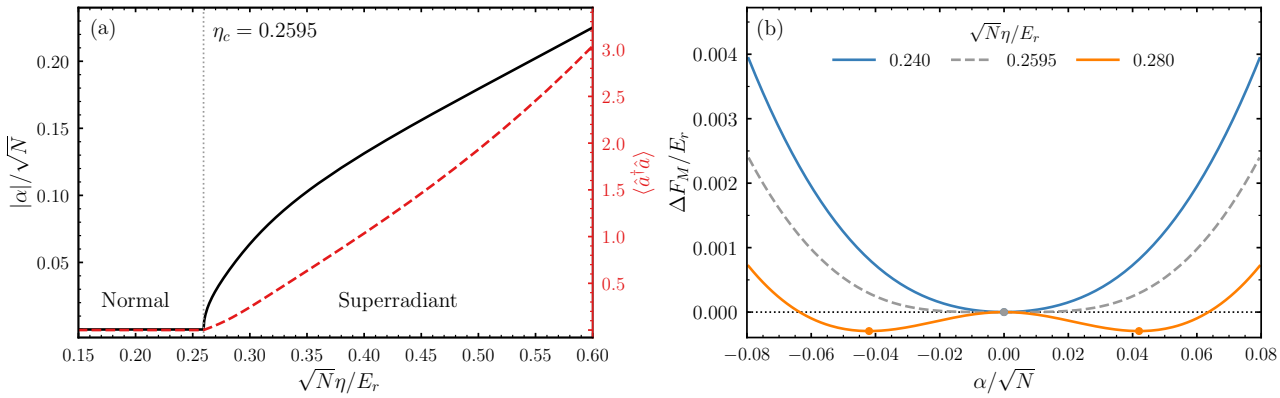


图 3 $M = 3$ 的超辐射相变及 $\mathbb{Z}_2$ 对称性破缺. (a) 序参量 $|\alpha|/\sqrt{N}$ 和腔光子数 $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ 随集体泵浦强度 $\sqrt{N}\eta/E_r$ 的变化. 竖直虚线表示临界泵浦强度. (b) 临界泵浦强度附近, 每个莫尔周期内的自由能差 $\Delta F_M/E_r$ 随 $\alpha/\sqrt{N}$ 的变化.

Fig. 3. Superradiant transition and $\mathbb{Z}_2$ symmetry breaking for $M = 3$. (a) The order parameter $|\alpha|/\sqrt{N}$ and the cavity photon number $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ vary with the collective pumping intensity $\sqrt{N}\eta/E_r$. The vertical dotted line represents the critical pumping intensity. (b) Near the critical pumping intensity the free energy $\Delta F_M/E_r$ within each moiré period varies with $\alpha/\sqrt{N}$.

3.1 正常相静态响应的激发谱与能带重构

3.1.1 费米气体固定密度下的静态响应和自由能二次系数

为进一步分析莫尔参数对超辐射阈值的影响, 本文采用线性响应理论考察 $\bar{\alpha} = 0$ 正常相对微弱腔场扰动的静态响应. 在腔耦合简并费米气体中, 粒子–空穴响应已被用于揭示超辐射阈值与 Umklapp 散射、费米面嵌套之间的联系 [14,15]. 对一维费米气体, 这一理论方法还可推广到有限温度用于分析临界行为及多临界现象 [42]. 由于体系具有 $\mathbb{Z}_2$ 对称性, 自由能是 $\bar{\alpha}$ 的偶函数, 在正常相中, 用 $\bar{\alpha}^2$ 展开自由能. 由式 (19) 和 (20) 可知, Helmholtz 自由能关于 $\bar{\alpha}^2$ 的一阶导数满足

$$\left.\frac{d}{d(\bar{\alpha}^2)} F_{f,M}\right|_{N_M,T} = \left.\frac{\partial}{\partial(\bar{\alpha}^2)} \Omega_{f,M}\right|_{\mu,T}. \tag{28}$$

录用稿件，非最终出版稿

因此, 正常相自由能的二次项可在 $\mu_0 = \mu(\bar{\alpha} = 0, N_M, T)$ 下通过巨正则势的微扰展开计算. 高阶自由能系数须显式计入化学势随序参量的变化.

单粒子哈密顿量按腔场振幅的幂次展开为

$$\hat{h}(\bar{\alpha}) = \hat{h}_0 + 2\sqrt{N}\eta\bar{\alpha}\cos(k_c x) + NU_0\bar{\alpha}^2\cos^2(k_c x), \tag{29}$$

线性扰动项 $2\sqrt{N}\eta\cos(k_c x)$ 描述泵浦光与腔场形成的干涉势, 并诱导与腔模空间分布相匹配的密度调制. 二次扰动项 $NU_0\cos^2(k_c x)$ 描述腔内光子形成的光晶格. 正常相的 Bloch 本征方程满足

$$\hat{h}_0|nq\rangle = \epsilon_{nq}^{(0)}|nq\rangle, \tag{30}$$

其中 $\hat{h}_0 = \hat{h}(0)$ 为正常相单粒子哈密顿量, 相应的正常相费米分布为

$$f_{nq}^{(0)} = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{\epsilon_{nq}^{(0)} - \mu_0}{k_B T}\right]}. \tag{31}$$

按照腔耦合费米气体静态密度响应的能级表示 [14,15,42], 定义正常相对 $\cos(k_c x)$ 密度调制的静态响应函数为

$$\chi_M(T) = \sum_{n,m,q} w_q \frac{f_{nq}^{(0)} - f_{mq}^{(0)}}{\epsilon_{mq}^{(0)} - \epsilon_{nq}^{(0)}} \times \left|\langle mq\left|\cos(k_c x)\right|nq\rangle\right|^2. \tag{32}$$

能级趋于简并时, 占据差与能量差之比取连续极限 $-\partial f/\partial\epsilon = f(1-f)/(k_B T)$. $\chi_M(T)$ 表示正常相密度调制对腔场外源的静态响应率, $\chi_M > 0$ 意味着原子密度倾向于沿降低外部周期势能的方向重排.

由式 (32) 可知, 粒子–空穴跃迁对静态响应的贡献同时取决于费米占据差、激发频率和跃迁矩阵元. 只有当初态与末态具有非零占据差且 $\langle mq|\cos(k_c x)|nq\rangle \neq 0$ 时, 相应跃迁才会对腔场诱导的密度调制产生贡献. 通过对巨正则势按腔场序参量 $\bar{\alpha}$ 进行二阶微扰展开, 结合粒子数约束及 Legendre 变换, 可以得到正常相附近的总自由能

$$F_M(\bar{\alpha}, N_M, T) - F_M(0, N_M, T) = [-\hbar N_M \Delta_c + NU_0 \sum_{n,q} w_q f_{nq}^{(0)} \left\langle nq\left|\cos^2(k_c x)\right|nq\right\rangle - 2N\eta^2\chi_M]\bar{\alpha}^2 + O(\bar{\alpha}^4). \tag{33}$$

将二次项系数计为

$$a_M = -\hbar N_M \Delta_c + NU_0 \sum_{n,q} w_q f_{nq}^{(0)} \left\langle nq\left|\cos^2(k_c x)\right|nq\right\rangle - 2N\eta^2\chi_M. \tag{34}$$

式 (34) 中的三项分别来自腔场自由能、二次腔晶格势的修正以及泵浦–腔场干涉势诱导的粒子–空穴响应. 当 $\chi_M > 0$ 时, 该响应会降低自由能的二次系数, 从而增强体系形成非零腔场的倾向. 固定 M 和 T 时, 正

录用稿件，非最终出版稿

常相哈密顿量 $\hat{h}_0$、粒子占据 $f_{nq}^{(0)}$ 及静态响应 χ_M 均不依赖泵浦强度. 因此, 归一化的二次项系数 a_M/N_M 与集体泵浦强度平方 $(\sqrt{N}\eta)^2$ 呈线性关系, 其斜率满足

$$\frac{d(a_M/N_M)}{d(\sqrt{N}\eta)^2} = -2\frac{\chi_M}{N_M}. \tag{35}$$

图 4 给出了无量纲归一化二次项系数 $a_M/(N_M E_r)$ 与集体泵浦强度平方 $(\sqrt{N}\eta/E_r)^2$ 的线性关系. 自由能在 $\bar{\alpha}=0$ 处的曲率为 $2a_M$: 当 $a_M>0$ 时, 正常相对应严格的局域极小点. 当 $a_M=0$ 时, 正常相沿腔场方向的二次恢复力消失, 体系到达局域稳定性边界. 泵浦强度继续增强并使 $a_M<0$ 后, $\bar{\alpha}=0$ 不再是局域极小点. 图中的星号表示由平衡自由能曲率确定的正常相局域稳定性边界.

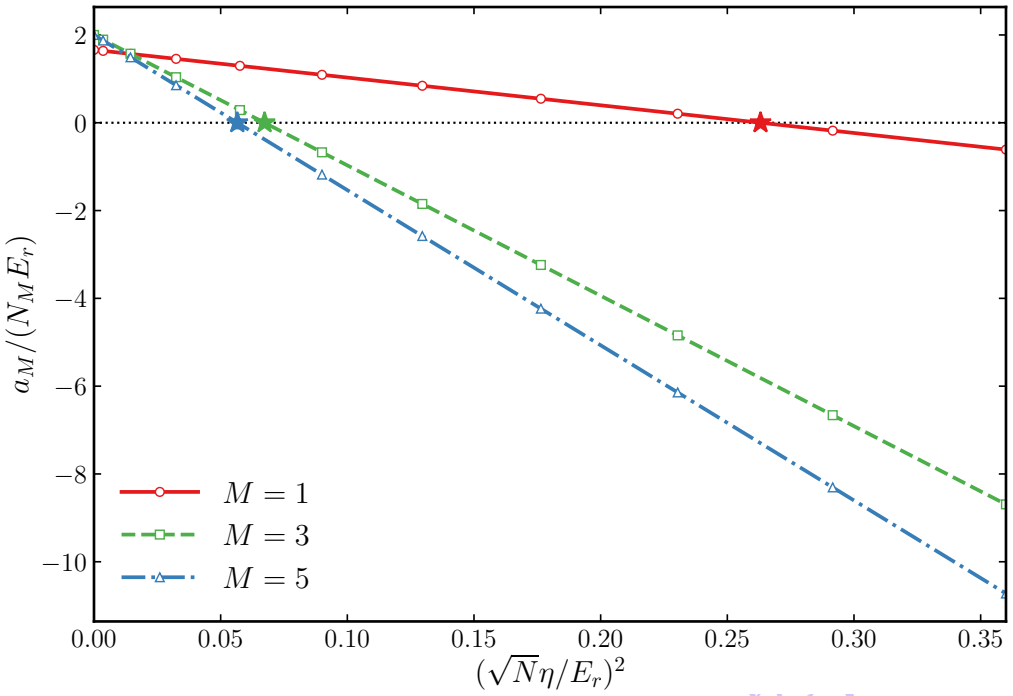


图 4　不同莫尔参数下单位粒子的自由能二次项系数 $a_M/(N_M E_r)$ 与集体泵浦强度平方 $(\sqrt{N}\eta/E_r)^2$ 的关系. 红色实线、绿色虚线和蓝色点划线分别对应 $M=1,3,5$. 星号标出 $a_M=0$ 处正常相局域稳定性边界.

Fig. 4. Relationship between the free energy quadratic coefficient $a_M/(N_M E_r)$and the collective pump intensity square $(\sqrt{N}\eta/E_r)^2$ for different moiré parameters. Solid red lines, dashed green lines, and dotted blue lines correspond to $M=1,3,5$ respectively. Stars mark the normal-phase local stability boundaries at $a_M=0$.

录用稿件，非最终

3.1.2 BEC 与费米气体的正频激发谱及静态响应比较

为分析不同激发频率对静态响应的贡献, 并比较 BEC 与 Fermi 的量子统计影响, 定义腔模密度耦合为 $C_1 = 2\cos(k_c x)$. 费米气体按单粒子归一化的正频粒子–空穴激发谱为

$$S_M^{\mathrm{F}}(\omega) = \frac{1}{N_M^{\mathrm{F}}} \sum_{\substack{n,m,q \\ \epsilon_{mq}^{(0)} > \epsilon_{nq}^{(0)}}} w_q \left(f_{nq}^{(0)} - f_{mq}^{(0)}\right) |\langle mq|C_1|nq\rangle|^2 \times \delta\left[\omega - \frac{\epsilon_{mq}^{(0)} - \epsilon_{nq}^{(0)}}{\hbar}\right]. \tag{36}$$

作为对照, 考虑所有粒子占据 $q = 0$ 最低 Bloch 态的理想 BEC, 其单粒子正频激发谱为

$$S_M^{\mathrm{B}}(\omega) = \sum_{m>0} |\langle m, 0|C_1|0, 0\rangle|^2 \, \delta\left[\omega - \frac{\epsilon_{m0}^{(0)} - \epsilon_{00}^{(0)}}{\hbar}\right]. \tag{37}$$

两类气体均采用相同的正常相单粒子哈密顿量, 静态响应满足

$$\frac{\chi_M^X}{N_M^X} = \frac{1}{2\hbar} \int_0^\infty \frac{S_M^X(\omega)}{\omega} \, d\omega, \qquad X = \mathrm{B}, \mathrm{F}. \tag{38}$$

上式具有 $1/\omega$ 权重的谱积分, 低频激发对静态响应的贡献更大.

图 5 显示, 随着 M 增大, 两种气体的谱权重均向低频移动, 静态响应随之增强. $M = 1, 3$ 时, 两者的响应较为接近; $M = 5$ 时, BEC 的低频谱权重更集中, 其静态响应高于费米气体. 相同正常相能带下的这一差异来自占据方式: BEC 集中占据最低 Bloch 态, 而费米占据差与泡利阻塞使响应权重分散至多个粒子–空穴通道.

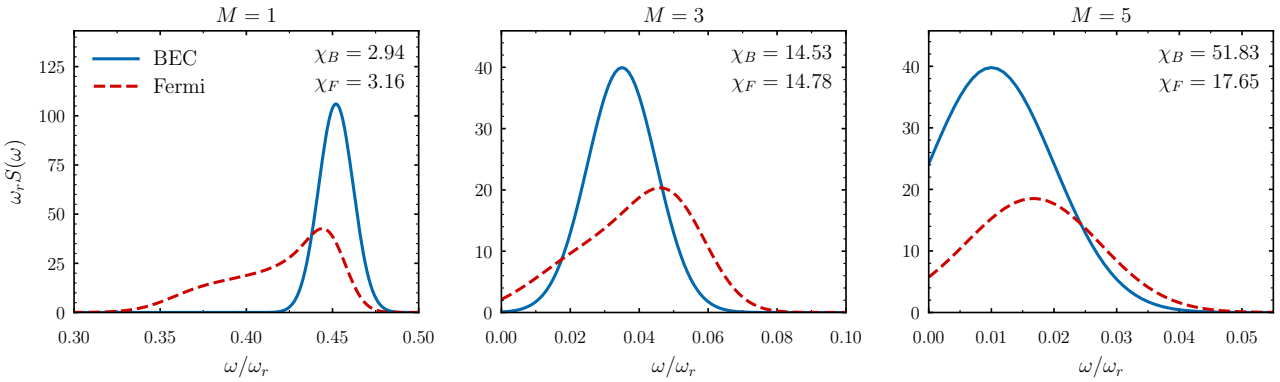


图 5 不同莫尔参数下正常相中腔模加权正频激发谱. 蓝色实线和红色虚线分别表示 BEC 和费米气体. χ_B 和 χ_F 表示对应的无量纲单位粒子静态响应 $E_r\chi_M/N_M$. 离散谱线作高斯展宽.

Fig. 5. Cavity mode weighted positive frequency excitation spectrum in normal phase with different moiré parameters. The blue solid line and the red dashed line represent BEC and Fermi gas respectively. χ_B and χ_F represent the corresponding dimensionless unit particle static response $E_r\chi_M/N_M$. The discrete spectrum lines are broadened by Gaussian.

3.1.3 Bloch 能带、占据和腔模加权跃迁的微观解释

图 6 比较了两种气体在相同正常相 Bloch 能带中的占据与腔耦合跃迁, 解释了低频谱权重以及静态响应的差异. 其中 (a–f) 分别展示 BEC 和费米气体的粒子占据及代表性跃迁; (g–i) 展示由准动量分辨的费米粒子–空穴跃迁能量, 以颜色深浅表示各通道跃迁对静态响应的贡献, 同时用星号标出 BEC 在 $q = 0$ 处的激发能量. 定义费米气体准动量分辨的无量纲单位粒子响应权重为

$$\mathcal{W}^{\mathrm{F}}_{nm}(q) = \frac{E_r}{2N_M} \frac{\left[f^{(0)}_{nq} - f^{(0)}_{mq}\right] |\langle mq|C_1|nq\rangle|^2}{\epsilon^{(0)}_{mq} - \epsilon^{(0)}_{nq}}, \qquad \epsilon^{(0)}_{mq} > \epsilon^{(0)}_{nq}. \tag{39}$$

对跃迁通道求和, 并按积分权重 w_q 对准动量加权求和, 可得到无量纲单位粒子静态响应 $E_r\chi^{\mathrm{F}}_M/N_M$.

随着 M 增大, BEC 主导腔耦合跃迁的能量由 $0.452E_r$ 依次降至 $0.035E_r$ 和 $0.010E_r$. 较低的激发能量使这些通道能够对静态响应产生更大的贡献.

对于 $M = 1$ 和 $M = 3$, BEC 主导跃迁所对应的 $q = 0$ 通道在费米气体中的初末态占据差分别为 1.00 和 0.99, 该通道保留了较大的费米跃迁权重. 两种气体的单位粒子静态响应相近, 响应比分别为 $\chi_B/\chi_F = 0.93$ 和 0.98.

对于 $M = 5$, BEC 主导跃迁的能量进一步降低, 但相应的末态在费米气体中已被部分占据, 使初末态占据差降至 0.42. 可见, 费米气体不能像 BEC 一样充分利用该低能通道, 其响应权重会被分配到多个准动量和能带之间的粒子–空穴跃迁, 最终有 $\chi_B/\chi_F = 2.94$.

该结果表明, 静态响应的增强取决于低能跃迁的能量及其有效权重, 量子统计通过初末态占据差调制各通道的贡献, 使具有相同正常相能带的两种气体呈现出不同情况.

录用稿件，非最终出版稿

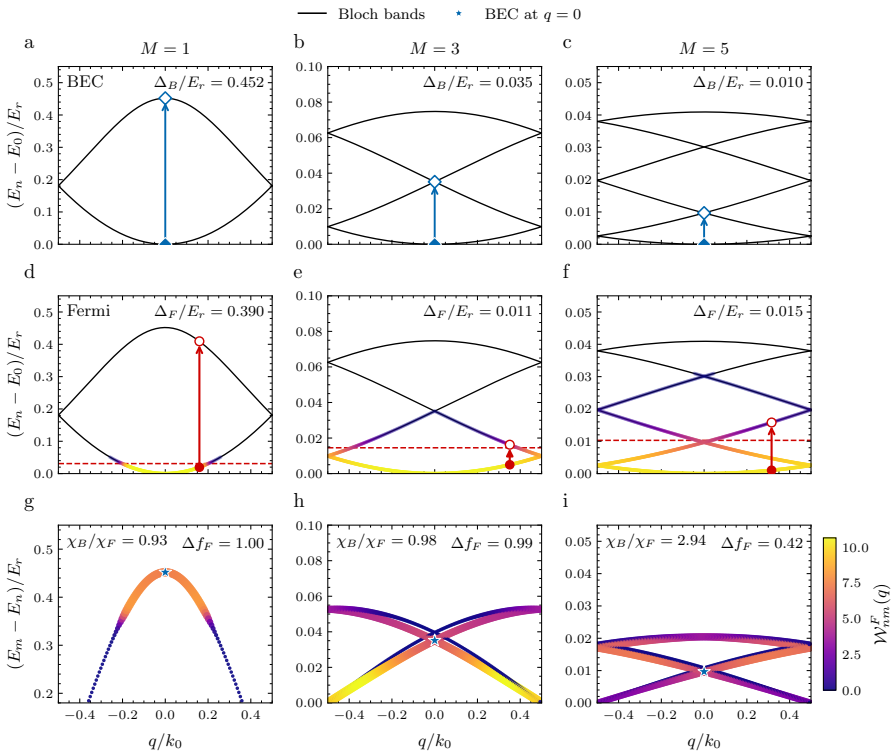


图 6　BEC 与费米气体在相同正常相 Bloch 能带中的占据分布及腔耦合跃迁. 从左往右对应 $M = 1, 3, 5$. (a–c) 理想 BEC 全部占据 $q = 0$ 的最低 Bloch 态, 蓝色箭头表示主导跃迁, 激发能量记为 Δ_B. (d–f) 费米气体的占据分布与代表性跃迁. 颜色由暗到亮表示占据数增大, 虚线表示化学势, 红色箭头表示代表性跃迁, 激发能量记为 Δ_F. (g–i) 中散点的颜色越亮、尺寸越大, 表示相应跃迁对静态响应的贡献越大; 蓝色星号表示 BEC. Δf_F 表示 BEC 主导跃迁通道在费米分布下的占据差.

Fig. 6. Occupations and cavity-coupled transitions of a BEC and a Fermi gas in the same normal-state Bloch bands. The columns correspond to $M = 1, 3, 5$, respectively. (a–c) All particles in the ideal BEC occupy the lowest Bloch state at $q = 0$. Blue arrows show the dominant transitions, with excitation energies Δ_B. (d–f) Fermi occupations and representative transitions. Brighter colors indicate higher occupations, dashed lines mark the chemical potential, and red arrows show representative transitions with excitation energies Δ_F. (g–i) Brighter and larger markers indicate greater contributions of the corresponding transitions to the static response. Blue stars mark BEC excitation energies. Δf_F represents the difference in occupation of the BEC dominant transition channel under the Fermi distribution.

上述结果表明, 莫尔几何尺度 $k_0 = k_c/M$ 给出阈值随 M 增大而降低的总体趋势, 但改变 M 会同时改变基本倒格矢、能带折叠、允许跃迁和相应矩阵元, 不能将几何尺度与响应权重视为彼此独立的作用.

录用稿件，非最终出版稿

3.2 Landau 相变理论

为判断超辐射相变的阶数及稳定性, 本文采用 Landau 自由能展开进行分析 [13,42]. 体系的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性要求自由能关于实腔场序参量 $\bar{\alpha}=\alpha/\sqrt{N}$ 为偶函数. 固定 N_M 和 T, 在正常相附近将自由能展开并保留至八阶:

$$\Delta F_M = a\bar{\alpha}^2 + b\bar{\alpha}^4 + c\bar{\alpha}^6 + d\bar{\alpha}^8 + O(\bar{\alpha}^{10}) \tag{40}$$

其中, $a=a_M$ 与正常相静态响应给出的二阶系数一致, b,c,d 由 $\bar{\alpha}=0$ 附近的偶次多项式拟合得到. 由于后文数值结果中六阶系数会出现为负的情况, 这里将展开保留至八阶.

对式 (40) 求导可知, 非零驻点满足

$$a + 2b\bar{\alpha}^2 + 3c\bar{\alpha}^4 + 4d\bar{\alpha}^6 = 0. \tag{41}$$

若正常相失稳前不存在自由能更低的有限场局部极小点, 当 $b>0$ 且 a 由正变负时, 在 $\bar{\alpha}=0$ 附近, 有 $\bar{\alpha}_{\rm eq}^2 \simeq -a/(2b)$, 序参量从零连续产生. 因此, $a=0$ 和 $b>0$ 是连续分支从正常相原点产生的局域条件. 当 $b<0$ 时, 有限场局域极小值可在 $a>0$ 时出现; 若其与正常相构成等深的全局极小值, 体系发生一阶平衡相变 [43].

常规三临界点是一阶与连续相变边界在序参量跳变趋于零时的连接点, 对于式 (40) 其局域判据为 $a=b=0$ 且 $c>0$. 这是因为在 $a=b=0$ 时, $c\bar{\alpha}^6$ 是原点附近最低阶的非零项; 此时六阶项主导原点附近的自由能, 八阶项不改变三临界性质. 若 $c<0$, 即使 $d>0$ 能稳定较大振幅区域, $a=b=0$ 仍不构成常规三临界点.

在一阶相变区域, 正常相和超辐射相可以同时对应自由能的局部极小点, 从而形成平衡亚稳区. 正常相原点的曲率为 $\partial^2 F_M/\partial\bar{\alpha}^2|_{\bar{\alpha}=0}=2a$, 正常相旋节线可由 $a=0$ 确定. 超辐射相的旋节边界对应有限场局域极小值与相邻局域极大值合并的位置, 由驻点条件与曲率为零条件共同确定即:

$$\left.\frac{\partial F_M}{\partial\bar{\alpha}}\right|_{\bar{\alpha}=\bar{\alpha}_{\rm sp,SR}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 F_M}{\partial\bar{\alpha}^2}\right|_{\bar{\alpha}=\bar{\alpha}_{\rm sp,SR}} = 0, \qquad \bar{\alpha}_{\rm sp,SR}\neq 0. \tag{42}$$

本文利用 Landau 系数判断正常相附近的局域相变性质, 平衡序参量, 一阶共存边界, 超辐射相旋节线及亚稳区均由完整自由能确定.

录用稿件，非最终出版稿

3.3 温度对相变阶数与 Landau 系数的影响

图 7 显示, 在临界处序参量表现出两种不同的行为: 对于 $M = 5$、$\tau = 0.001$ 时序参量在相界处发生有限跳变, 而 $\tau = 0.003$ 时序参量从零连续产生, 分别对应一阶和二阶相变.

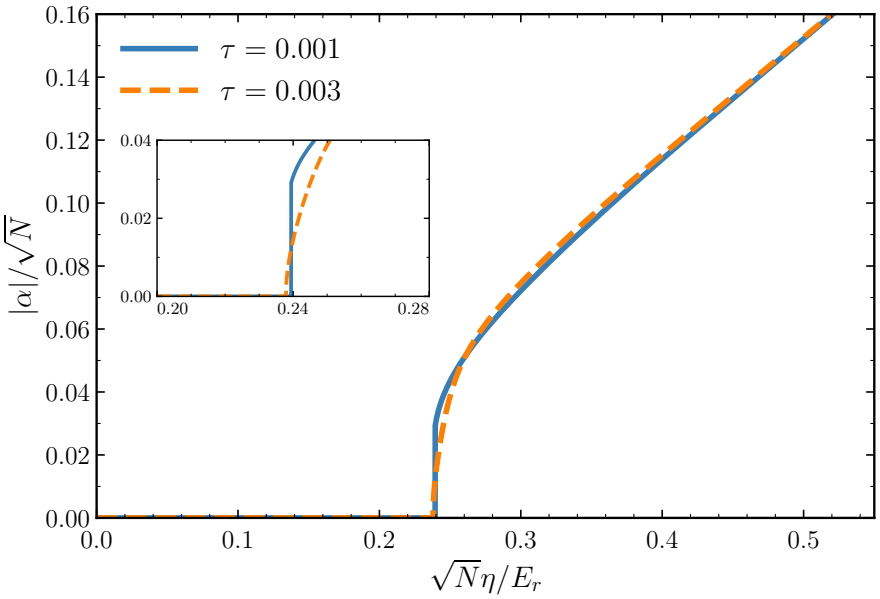


图 7　$M = 5$ 的序参量随集体泵浦变化: $\tau = 0.001$ 时出现有限跳变, $\tau = 0.003$ 时连续产生; 插图放大相变区域.

Fig. 7. Order parameter versus collective pump strength for $M = 5$. The low-temperature branch shows a finite jump, whereas the higher-temperature branch is continuous; the inset enlarges the transition region.

为判断上述变化是否出现在其余的莫尔参数下, 沿正常相旋节线 $a = 0$ 对自由能进行八阶局域拟合, 所得系数如图 8 所示. 在所考察温区内, $M = 1, 3$ 的四阶系数始终为正, 而 b_5^{sp} 在低温区为负, 并于 $\tau \simeq 0.00156$ 附近变为正值. 当 $b_5^{\mathrm{sp}} = 0$ 时, $c_5^{\mathrm{sp}} < 0$ 而 $d_5^{\mathrm{sp}} > 0$, 正八阶项描述有限振幅区域的稳定结构. 在更低温度 $b_5^{\mathrm{sp}} < 0$ 的区域, 正六阶项可为有限场局域极小值提供稳定作用, 但不改变原点附近由负四阶项主导的行为.

录用稿件，非最终出版稿

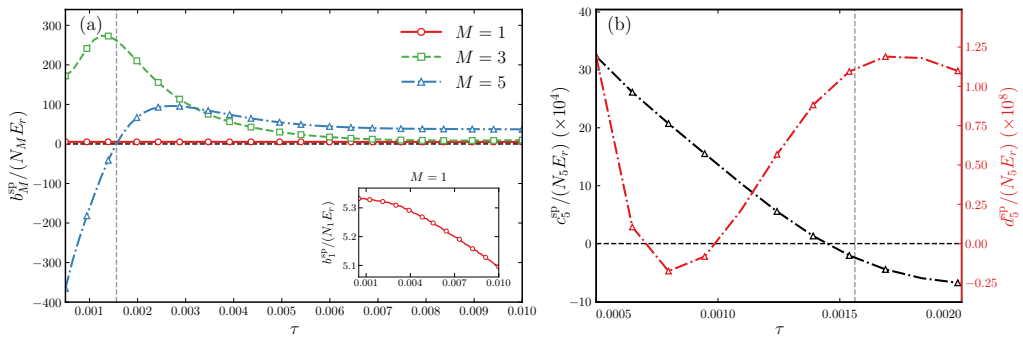


图 8　正常相旋节线处的 Landau 系数随温度变化. (a) $M=1,3,5$ 的 $b_M^{\rm sp}$, 插图放大 $M=1$ 的结果. (b) $M=5$ 的 $c_5^{\rm sp}$ 和 $d_5^{\rm sp}$. 竖直虚线表示 $b_5^{\rm sp}=0$ 时的温度.

Fig. 8. Landau coefficients at the normal-phase spinodal versus temperature. (a) $b_M^{\rm sp}$ for $M=1,3,5$; the inset enlarges the $M=1$ result. (b) $c_5^{\rm sp}$ and $d_5^{\rm sp}$ for $M=5$. The vertical dashed line shows the temperature when $b_5^{\rm sp}=0$.

四阶系数 b_M 随温度的变化可由图 6 费米能级附近腔耦合跃迁的占据差与权重分配进行理解. 对于 $M=1,3$ 低能粒子–空穴通道较少, 热展宽在所考察温区内不足以使 b_M 变号. 对于 $M=5$, 多个具有较大腔模矩阵元的低能跃迁集中在费米能级附近, 使高阶自由能响应对温度更加敏感, 与 $b_5^{\rm sp}$ 的变号及相变阶数变化一致.

为进一步阐明这一变化的原因, 给出了 $M=5$ 在 $\tau=0.001$ 和 0.003 时的 Landau 系数随集体泵浦的变化, 如图 9 所示.

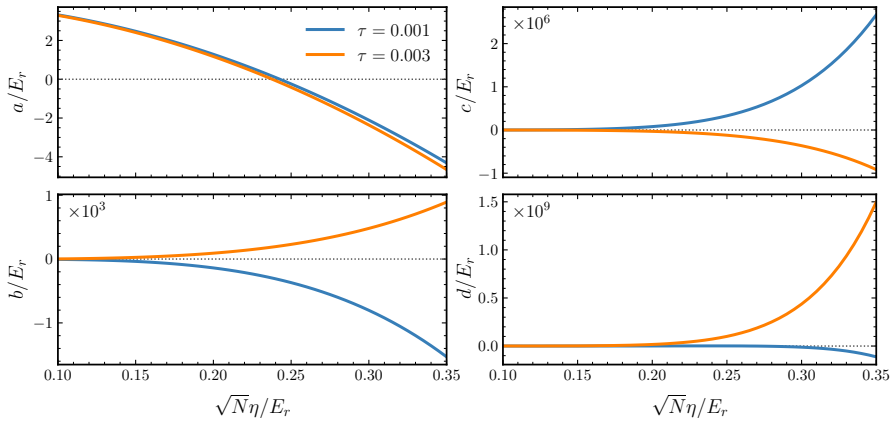


图 9　$M=5$ 在 $\tau=0.001$ 和 0.003 时的近零场 Landau 拟合系数 a,b,c,d 随集体泵浦强度变化.

Fig. 9. Near zero field Landau fit coefficients a,b,c,d versus collective pump strength for $M=5$ at $\tau=0.001$ and 0.003.

录用稿，非最终出版稿

在这两个温度下二阶系数 a 均随泵浦增强而减小, 但高阶系数表现出不同的情况. 在 $\tau = 0.001$ 时, 临界值附近 $b < 0$ 而 $c > 0$, 负的四阶项使自由能在有限序参量处降低, 正的六阶项则抑制其继续下降, 从而允许正常相失稳前出现有限场局域极小点. 在 $\tau = 0.003$ 时, $b > 0$ 允许序参量在 a 变号后连续产生, 而 $c < 0$、$d > 0$ 对应较大振幅区域由八阶项稳定的截断自由能.

3.4 泵浦–温度相图与亚稳定区分析

图 10 给出了 $M = 5$ 时系统在泵浦强度–温度空间的平衡相图. 低温一阶相变边界由正常相与超辐射相局部极小点的自由能值相等确定, 并伴随有限序参量跳变; 高温连续相变边界满足 $a = 0$, 序参量从零连续产生. 正常相和超辐射相旋节线分别表示相应局部极小点失去局域稳定性, 并与一阶共存边界共同界定两类平衡亚稳区. 这与超流配对和超辐射序的竞争所产生的三临界性不同, 该临界点产生的原因是能带对低能激发调制.

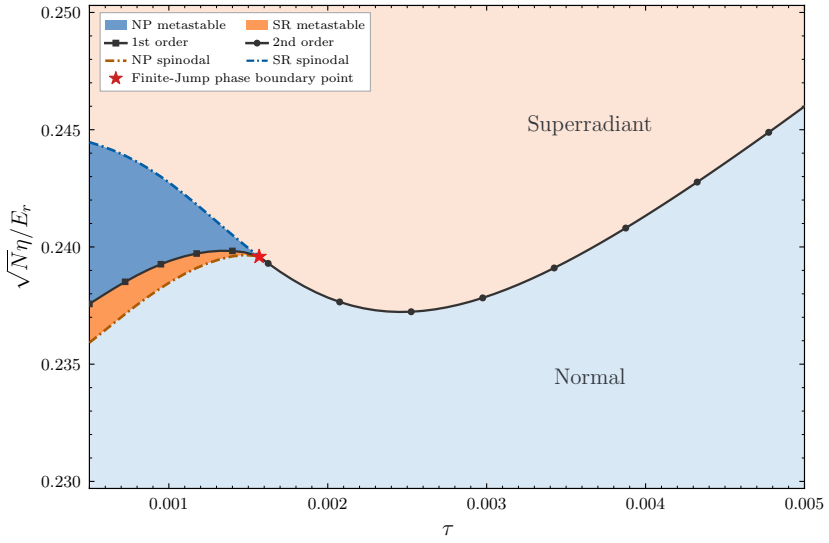


图 10　$M = 5$ 的泵浦–温度相图. 浅蓝和浅橙区域分别表示正常相和超辐射相, 深色区域表示对应相的亚稳态区域. 方块线和圆点线分别表示一阶和二阶相变边界, 点划线表示相应的旋节线, 星号为有限跳跃相边界点.

Fig. 10. Pump–temperature phase diagram for $M = 5$. Light blue and light orange indicate the normal and superradiant phases respectively, while the dark areas indicate the metastable regions of the corresponding phases. Lines marked with squares and circles denote first and second–order phase boundaries, respectively. Dash dotted lines denote the corresponding spinodals, and the star marks the finite–jump phase boundary point.

录用稿件，非最终稿

沿连续相变边界, 临界泵浦强度随温度的变化为先降低后升高. 在所选温度范围内最低值位于 $\tau \simeq 0.00245$, $\sqrt{N}\eta_c/E_r \simeq 0.2372$. 结合式 (32) 可知, 热展宽使低温下均被占据或均为空的态对产生占据差, 增强相应的静态响应, 也可缩小低温下仅有一态被占据的态对的占据差, 从而削弱相应的静态响应. 这种非单调行为可理解为热占据重新分配所引起的响应增强与削弱间的竞争.

图 11 给出了 $\tau = 0.001$ 时一阶相边界两侧的完整自由能. 当泵浦强度比相边界值小时, $\alpha = 0$ 处为全局最小点, 两侧为对应超辐射亚稳态的局域极小点. 在泵浦高于相边界值时, 有限场极小点成为全局最小点, 而正常相对应的零场极小点为亚稳局域极小点. 两种情况均存在分隔极小点的自由能势垒, 分别对应超辐射相和正常相的平衡亚稳区.

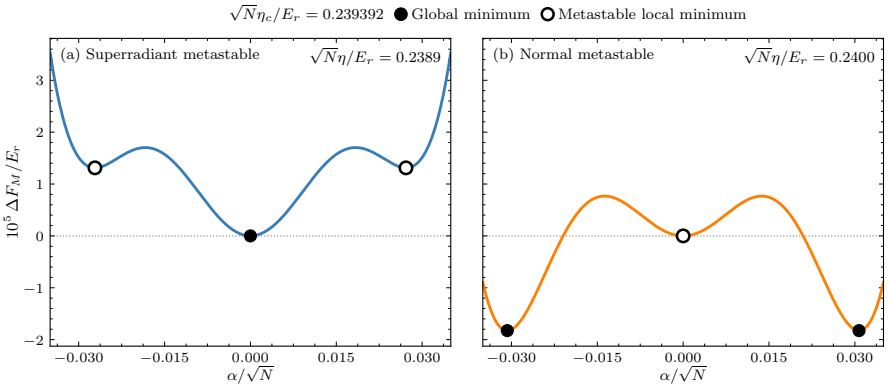


图 11 $M = 5$, $\tau = 0.001$ 时不同相变区域的自由能曲线. (a) 超辐射相亚稳态. (b) 正常相亚稳态. 实心圆和空心圆分别表示全局最小点和亚稳局域极小点.

Fig. 11. Free energy curves for different phase transition regions with $M = 5$ and $\tau = 0.001$. (a) Superradiant metastable phase. (b) Normal metastable phase. Filled and open circles denote global and metastable local minima, respectively.

超辐射相之间的一阶相变已在腔耦合玻色–爱因斯坦凝聚体实验中得到观察 [43]. 本文在有限跳跃相边界点附近也发现了小振幅和大振幅超辐射相间的非连续行为. 如图 12 所示, 将小振幅记为 SR_L 大振幅记为 SR_H. 两相在共存泵浦 η_{SS} 处对应由势垒分隔的等深全局极小点. 超过该泵浦强度后, 两相交换稳定性, 序参量在两个非零值之间发生有限跳变.

录用稿件，非最终出版稿

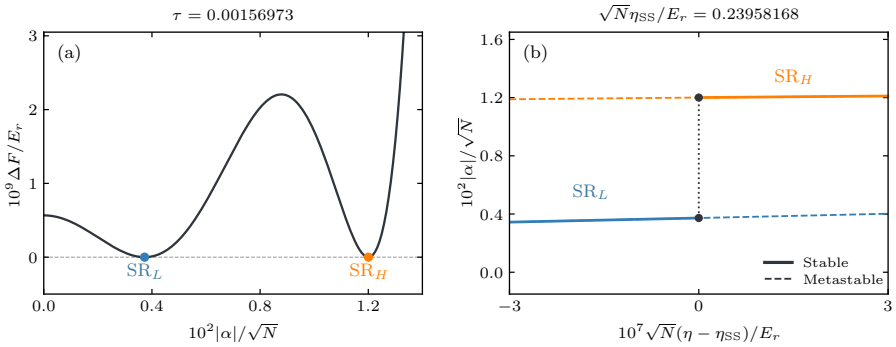


图 12　$M = 5$ 时小振幅与大振幅超辐射相之间的一阶相变. (a) 共存泵浦处的自由能曲线. (b) 共存点附近的序参量分支, 实线和虚线分别表示全局稳定支和亚稳支.

Fig. 12. The first–order phase transition between the SR_L and SR_H when $M = 5$. (a) Free energy curve at the coexistence pump. (b) The order parameter branches near the coexistence point, the solid and dashed lines indicate the globally stable and metastable branches, respectively.

4　结　论

本文在固定粒子密度的腔场平均场框架下, 研究了自旋极化简并费米气体的莫尔超辐射, 揭示了莫尔结构与温度对临界泵浦强度、相变阶数及亚稳性的调控. 在所考察的 $M = 1, 3, 5$ 构型中, 增大莫尔参数总体上降低了超辐射阈值; 完整自由能计算得到 $M = 5$ 的泵浦强度–温度相图, 在低温时发生一阶相变随着温度升高转为连续相变, 并形成正常相和超辐射相两类平衡亚稳区. 一阶共存边界与连续相变边界在 $\tau \simeq 1.568 \times 10^{-3}$ 附近连接, 该处仍保留约 0.0126 的序参量跳变, 称为有限跳跃相边界点. 边界点附近还存在小振幅与大振幅超辐射相间的一阶相变. 沿连续相变边界, 临界泵浦强度随温度的升高呈现先降低后升高, 在所取温度范围内于 $\tau \simeq 0.00245$ 达到最低值 $\sqrt{N}\eta_c/E_r \simeq 0.2372$.

研究结果表明, 莫尔结构对费米超辐射的调控需要结合几何尺度与量子统计共同理解. 随着 M 增大, 最低阶复合散射的净动量 $k_0 = k_c/M$ 减小, 形成长周期密度调制的动能代价降低. 与此同时, 能带与腔耦合跃迁权重发生重构, 粒子–空穴谱权重向低频移动, 从而增强静态密度响应. 在相同正常相 Bloch 能带下玻色与费米气体的响应差异进一步说明, 低能通道的实际贡献还取决于占据差与泡利阻塞. 因此几何动量尺度给出阈值变化的总体趋势, 而占据分布和腔模跃迁矩阵元决定其具体表现. 温度的变化使费米能级附近低能粒子–空穴通道的占据差和相对权重重新分配, 改变了高阶自由能系数和相变阶数. 这些发现将莫尔能带重构、费米统计与超辐射相变联系起来.

录用稿件，非最终出版稿

本文基于无腔损耗的平衡平均场模型, 所确定的相界、旋节线及亚稳区对应保守极限下的自由能结构. 对于有限损耗与非平衡动力学的结果, 仍需在驱动–耗散框架下求解; 相关旋量凝聚体–光腔耦合体系中已理论预测噪声驱动的双稳态跃迁和弱周期驱动下的随机共振 [44]. 临界泵浦强度的非单调温度依赖可作为温度敏感信号的候选, 其测温灵敏度和量子增益仍需在包含损耗与动力学的模型中进一步评估.

参考文献

[1] Kirton P, Roses M M, Keeling J, Dalla Torre E G 2019 *Adv. Quantum Technol.* **2** 1800043

[2] Ritsch H, Domokos P, Brennecke F, Esslinger T 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 553

[3] Mivehvar F, Piazza F, Donner T, Ritsch H 2021 *Adv. Phys.* **70** 1

[4] Domokos P, Ritsch H 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 253003

[5] Dimer F, Estienne B, Parkins A S, Carmichael H J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013804

[6] Nagy D, Kónya G, Szirmai G, Domokos P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 130401

[7] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature* **464** 1301

[8] Baumann K, Mottl R, Brennecke F, Esslinger T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 140402

[9] Mottl R, Brennecke F, Baumann K, Landig R, Donner T, Esslinger T 2012 *Science* **336** 1570

[10] Landig R, Hruby L, Dogra N, Landini M, Mottl R, Donner T, Esslinger T 2016 *Nature* **532** 476

[11] Brennecke F, Mottl R, Baumann K, Landig R, Donner T, Esslinger T 2013 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **110** 11763

[12] Yang S, Al-Amri M, Zubairy M S 2014 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **47** 135503

[13] Keeling J, Bhaseen M J, Simons B D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143002

[14] Chen Y, Yu Z H, Zhai H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143004

[15] Piazza F, Strack P 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 143003

[16] Pan J S 2022 *Phys. Rev. A* **105** 013306

录用稿件，非最终出版稿

[17] Yang M Y, Yin H H, Wen L, Ji A C, Sun Q 2021 *Phys. Rev. A* **104** 053313

[18] Roux K, Konishi H, Helson V, Brantut J P 2020 *Nat. Commun.* **11** 2974

[19] Zhang X T, Chen Y, Wu Z M, Wang J, Fan J J, Deng S J, Wu H B 2021 *Science* **373** 1359

[20] Helson V, Zwettler T, Mivehvar F, Colella E, Roux K, Konishi H, Ritsch H, Brantut J P 2023 *Nature* **618** 716

[21] Guidoni L, Triché C, Verkerk P, Grynberg G 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 3363

[22] Roati G, D'Errico C, Fallani L, Fattori M, Fort C, Zaccanti M, Modugno G, Modugno M, Inguscio M 2008 *Nature* **453** 895

[23] Modugno M 2009 *New J. Phys.* **11** 033023

[24] Singh K, Saha K, Parameswaran S A, Weld D M 2015 *Phys. Rev. A* **92** 063426

[25] Salamon T, Celi A, Chhajlany R W, Frérot I, Lewenstein M, Tarruell L, Rakshit D 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 030504

[26] Luo X W, Zhang C W 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 103201

[27] Meng Z M, Wang L W, Han W, Liu F D, Wen K, Gao C, Wang P J, Chin C, Zhang J 2023 *Nature* **615** 231

[28] Kouznetsov D, Van Dorpe P, Verellen N 2022 *Phys. Rev. A* **105** L021304

[29] Liu X Y, Zeng J H 2024 *Adv. Photonics Nexus* **3** 036006

[30] Wang C, Gao C, Zhang J, Zhai H, Shi Z Y 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 163401

[31] Johnstone D, Mishra S, Zhu Z X, Sanchez-Palencia L 2025 *Phys. Rev. A* **111** 043305

[32] Xu L, Chen S L, Yang X Y, Zhang X F 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100307. (in Chinese) [许丽, 陈思霖, 杨雪滢, 张晓斐 2023 物理学报 **72** 100307]

录用稿件，非最终出版稿

[33] Tu P, Zhao X, Xi B L, Shao K H, Xi Z H, Gou J M, Wang Y Z, Shi Y R 2026 *Acta Phys. Sin.* **75** 030601. (in Chinese) [涂朴, 赵茜, 席保龙, 邵凯花, 席忠红, 苟金明, 王永智, 石玉仁 2026 物理学报 **75** 030601]

[34] Wu J, Lu Z P, Xu Z H, Guo L P 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 113702. (in Chinese) [吴瑾, 陆展鹏, 徐志浩, 郭利平 2022 物理学报 **71** 113702]

[35] Wu B H, Yang X X, Zhang W, Chen Y 2025 *Phys. Rev. Res.* **7** 013056

[36] Fan J J, Yang Z M, Zhang X, Qi J S, Huo L L, Wu H B 2026 *Sci. Adv.* **12** eaee0634

[37] Zhou L, Li Z C, Zhang K Y, Lan Z H, Celi A, Zhang W P 2025 *Phys. Rev. A* **112** 043718

[38] Lewenstein M, Sanpera A, Ahufinger V, Damski B, Sen(De) A, Sen U 2007 *Adv. Phys.* **56** 243

[39] Gross C, Bloch I 2017 *Science* **357** 995

[40] Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1215

[41] Pethick C J, Smith H 2008 *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases.* 2nd edn. (Cambridge: Cambridge University Press)

[42] Xu Y L, Sun F X, He Q Y 2026 *Phys. Rev. A* **113** 023717

[43] Li X L, Dreon D, Zupancic P, Baumgärtner A, Morales A, Zheng W, Cooper N R, Donner T, Esslinger T 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** L012024

[44] Li Z C, Fan B X, Zhou L, Zhang W P 2024 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **67** 233011

录用稿件，非最终出版稿

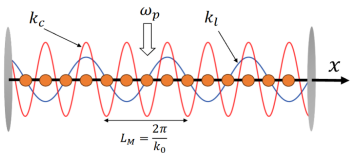
Moiré superradiance of a quantum-degenerate atomic Fermi gas in an optical cavity*

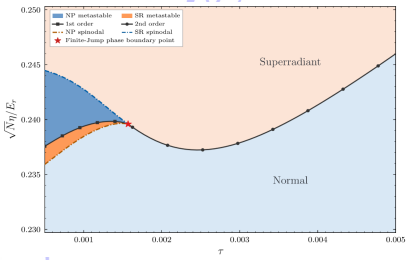
ZHOU Haodong ZHANG Xing YU Siqi ZHOU Lu†

(*School of Physics, East China Normal University, Shanghai 200241, China*)

Abstract

We investigate moiré superradiance in the system of a spin–polarized quantum–degenerate atomic Fermi gas coupled to an optical cavity. Imposing an external optical lattice on the atoms creates a one–dimensional moiré lattice in the system, and the moiré parameter can be tuned via the incommensurability between the externally imposed lattice and the intracavity optical lattice. Our study unveils that the critical pump strength signaling the superradiant phase transition depends strongly on the moiré parameter. From a microscopic scattering analysis, we find that as the moiré parameter increases, the kinetic energy cost of atomic density self–ordering is reduced, while the cavity coupled particle–hole spectral weight shifts toward lower frequencies, thereby enhancing the static density response. We also study the effect of temperature on moiré superradiance. Thermal broadening of the occupation distribution modifies the contribution of low energy channels near the Fermi level to higher order free energy coefficients, causing the superradiant transitions to change from second–order to discontinuous first–order as the temperature decreases. By analyzing the global minimum and local curvature of the free energy, we identify a finite–jump phase boundary point and metastability regions of the normal and superradiant phases, map out a phase diagram in the pumping–temperature parameter space, and further find that in the vicinity of this boundary point, a first–order phase transition occurs between superradiant phases. These results provide a new perspective on manipulating fermionic superradiance with a moiré structure, and open new possibilities for implementing a quantum-enhanced atomic thermometer.





Keywords: Spin-polarized Fermi gas, moiré superradiance, cavity quantum electrodynamics, Landau phase transition theory

* Project supported by the Innovation Program for Quantum Science and Technology (Grant No. 2021ZD0303200), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12074120), and the Shanghai Science and Technology Innovation Project (Grant No. 24LZ1400600).

† Corresponding author. E-mail: lzhou@phy.ecnu.edu.cn