

球面扁薄圓壳的跳躍問題*

胡 海 昌

(中國科學院數學研究所)

一. 引 言

扁薄壳和波紋薄板在加載荷或去載荷過程中所產生的跳躍現象,是比較容易觀察到的。可是這方面的理論問題却直到最近才有人研究。很顯明的,跳躍問題是一個非線性的問題,因此它的解決必須求諸非線性的理論。在 1945 年, В. И. 費奧道斯也夫^[1]應用 Л. Ю. 巴諾夫^[2]提出的非線性彈性力學中的伽遼金方法,研究了波紋薄圓板在均佈載荷作用下的大撓度問題,並討論了可能產生的跳躍現象。之後 В. И. 費奧道斯也夫^[3]又用同樣的方法研究了球面扁薄圓壳在均佈載荷作用下的大撓度問題和相伴的跳躍問題。

在同一時期,錢偉長教授 (1945)^[4]用能量法研究了球面扁薄圓壳在對稱線佈載荷作用下的跳躍問題。在與實驗數據比較之後,錢偉長教授^[5]提出了一個半理論半經驗的公式以供設計應用。錢偉長教授的結果都沒有發表,因此在本文中將作簡單的介紹。

球面扁薄壳的跳躍問題和球面薄壳在均佈壓力作用下的穩定問題有重要的類似的方面,即兩者都是非線性的現象,並且這兩個問題中的數學方程十分相近。在很早以前,人們就發現由線性理論計算所得的球面薄壳的臨界載荷,較實驗所得的大得很多(約三至四倍)。在 1939 年,卡門和錢學森^[6]首先認為球面薄壳的屈曲現象是一個非線性的現象。但是他們在著作 [6] 中對於該問題的數學表述作得十分簡略。之後 K. O. 弗里特里^[7]和錢學森^[8]改進了原來的表述。最近 X. M. 穆什達里和 P. Г. 蘇爾金^[9]又重新研究了球面薄壳的穩定問題。他們修正了卡門和錢學森的兩點疏忽的地方。

* 1954 年 3 月 14 日收到。

本文的目的主要在討論球面扁薄圓壳在均佈邊緣力矩作用下的跳躍問題，和其他的非線性的問題一樣，本問題中的非線性方程的準確的解很難求得。我們從說明跳躍現象的物理性質着手，因而有可能在解決兩個線性問題之後求出一系列有用的結果。我們求得跳進力矩和跳回力矩的平均值與扁壳的幾何特性 k 的關係。這是一個在理論上完全準確的關係。我們求得可能產生跳躍現象的臨界 k 的近似值（差誤小於 1.6%），和保證無量綱的邊緣力矩 m 是邊緣傾角 β 的單值函數的臨界 k 的近似值（差誤至多 1.5%）。我們還求得當 m 是 β 的單值函數的時候， m 與 β 的近似關係以及跳進力矩和跳回力矩與 k 的近似關係。

二、對稱線佈載荷作用下的球面扁薄圓壳的跳躍問題

今設有一厚度為 h ，跨度為 $2a$ ，拱起為 f 的球面扁薄圓壳，在半徑等於 b 的圓周上負擔均勻線佈載荷 p ，如圖 1 所示。問題是欲求撓度與外界載荷 p 的關係，特別是有關跳躍現象的性質。

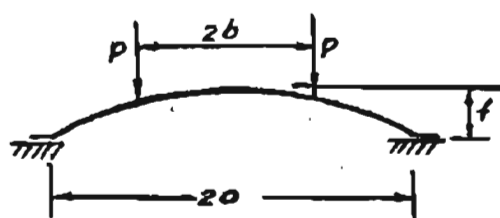


圖 1.

這個問題首先由錢偉長教授^[4,5]在 1945 年用能量法解決的。

（一）基本方程及其簡化

薄板薄壳的一般理論，在錢偉長教授的著作[10]中已有全面的研究。在這篇著作中，作者將各種薄板薄壳的問題分為若干不同的類型，並得出每一種類型的方程。因此欲求得本問題中的基本方程，只需決定本問題是屬於那一類型。假定球面扁薄壳的跳躍問題是屬於 SS12 這一類型。同時由於載荷是對稱的關係，我們假定撓度亦是對稱的。¹⁾於是根據著作[10]方程(12.34)我們得撓度 w 和徑向薄膜內力 N_r 所適合的方程：

$$\frac{D}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - q - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r N_r \left(\frac{2f}{a^2} r + \frac{dw}{dr} \right) \right] = 0, \quad (1-a)$$

¹⁾ 在非線性的問題中，對稱載荷不一定產生對稱撓度。當載荷頗大時，不對稱的撓度倒是穩定的。例如見 Д. Ю. Панов 和 В. И. Феодосьев 的著作：О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах, ПММ, 12 (1948), 388.

$$\frac{1}{hE} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{2f}{a^2} r \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0. \quad (1-b)$$

式中 r 是某點至中心點的距離， E 是壳體的楊氏彈性係數，

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

是抗彎剛度。求得 w 和 N_r 後，便可按下列公式求算徑向和周向彎矩 M_r , M_t ，周向薄膜內力 N_t 和徑向薄膜位移 u ：

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \\ M_t &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$N_t = N_r + r \frac{dN_r}{dr}; \quad (3)$$

$$u = \frac{r}{hE} \left\{ (1-\mu) N_r + r \frac{dN_r}{dr} \right\}. \quad (4)$$

將方程 (1-a) 乘以 rdr ，然後積分一次，得

$$D r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - \int_0^r r q dr - r N_r \left(\frac{2f}{a^2} r + \frac{dw}{dr} \right) = 0. \quad (5)$$

在載荷如圖 1 所示的場合，

$$\left. \begin{aligned} \text{當 } 0 \leq r < b \text{ 時, } \int_0^r r q dr &= 0; \\ \text{當 } b < r \leq a \text{ 時, } \int_0^r r q dr &= pb. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因此在這種場合方程 (5) 化為：

當 $0 \leq r < b$ 時，

$$D r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - r N_r \left(\frac{2f}{a^2} r + \frac{dw}{dr} \right) = 0; \quad (7-a)$$

當 $b < r \leq a$ 時，

$$D r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - p b - r N_r \left(\frac{2f}{a^2} r + \frac{dw}{dr} \right) = 0. \quad (7-b)$$

在 $r = b$ 處, w , $\frac{dw}{dr}$, $\frac{d^2w}{dr^2}$, N_r , $\frac{dN_r}{dr}$ 都是連續的. 假定扁壳的支承狀況是 $M_r = 0$, $N_r = 0$, 那麼 w 和 N_r 便應適合下列邊界條件:

當 $r = a$ 時,

$$w = 0, \quad \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \quad (8-a)$$

$$N_r = 0. \quad (8-b)$$

所以總起來說, 在本節所欲討論的問題, 撓度 w 和徑向薄膜內力 N_r 應適合方程 (1-b), (7) 和邊界條件 (8).

(二) 能量解法

錢偉長教授用以解球面扁薄圓壳在對稱線佈載荷作用下的跳躍問題的方法是勢能原理. 這個原理可說明如下: “在所有適合應變協調方程的應力應變狀態中, 真正的應力應變狀態使總勢能達極值”. 在本節的問題中, 方程 (1-b) 是應變協調方程, 因此若以 w , N_r 為基本未知函數, 那麼在應用勢能原理時 w , N_r 應適合方程 (1-b).

今設

$$w = w_0 (1 - \rho^2) \left[1 - \frac{1 + \mu}{5 + \mu} \rho^2 \right], \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad (9)$$

其中 w_0 是中心點的撓度, 同時亦是待定的常數. 這個算式已適合邊界條件 (8-a). 若取 $\mu = 0.3$, 則得

$$w = w_0 (1 - \rho^2) (1 - 0.2453 \rho^2). \quad (10)$$

將此式代入方程 (1-b), 便得 N_r 的一個方程. 從這個方程和邊界條件 (8-b), 便可求得

$$N_r = - \frac{f h E w_0}{a^2} (0.54088 - 0.62264 \rho^2 + 0.08188 \rho^4) + \frac{h E w_0^2}{a^2} (0.29589 - 0.38828 \rho^2 + 0.10116 \rho^4 - 0.01003 \rho^6). \quad (11)$$

於是從公式 (3) 得

$$N_r = -\frac{fhE\omega_0}{a^2} (0.54088 - 1.86782\rho^2 + 0.40940\rho^4) + \frac{hE\omega_0^2}{a^2} (0.29589 - 1.16484\rho^2 + 0.50580\rho^4 - 0.07021\rho^6). \quad (12)$$

扁壳的總勢能可以分為三部分，第一部分是彎曲應變能：

$$V_b = \pi D \int_0^a \left\{ \left(\frac{d^2\omega}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 + 2\mu \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \frac{d^2\omega}{dr^2} \right\} r dr = 0.3300 \frac{\pi E h^5}{a^2} \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^2. \quad (A)$$

第二部分為薄膜應力的應變能：

$$V_m = \frac{\pi}{Eh} \int_0^a (N_r^2 + N_t^2 - 2\mu N_r N_t) r dr = \frac{\pi E h^5}{a^2} \left\{ 0.04184 \kappa^2 \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^2 - 0.08500 \kappa \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^3 + 0.04335 \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^4 \right\}, \quad (B)$$

其中

$$\kappa = \frac{2f}{h}. \quad (13)$$

第三部分為外力的勢能：

$$V_p = -F\omega_0(1-\alpha^2)(1-0.2453\alpha^2) = -\frac{\pi E h^5}{a^2} Q \frac{\omega_0}{h}, \quad (C)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{b}{a}, & F &= 2\pi b p, \\ Q &= \frac{Fa^2}{\pi E h^4} (1-\alpha^2)(1-0.2453\alpha^2). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

將 (A), (B), (C) 三式相加，得扁壳的總勢能為：

$$V = -\frac{\pi E h^5}{a^2} Q \frac{\omega_0}{h} + 0.3300 \frac{\pi E h^5}{a^2} \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^2 + \frac{\pi E h^5}{a^2} \left\{ 0.04184 \kappa^2 \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^2 - 0.08500 \kappa \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^3 + 0.04335 \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^4 \right\}. \quad (15)$$

根據勢能原理, w_0 應使 $\frac{dV}{dw_0} = 0$, 即

$$Q = (0.6600 + 0.08368 \kappa^2) \left(\frac{w_0}{h} \right) - 0.2550 \kappa \left(\frac{w_0}{h} \right)^2 + 0.1734 \left(\frac{w_0}{h} \right)^3. \quad (16)$$

這便是中心點的撓度 w_0 與外力 p 之間的近似關係。對於若干個不同的 κ 值, Q 與 $\frac{w_0}{h}$ 之間的關係如圖 2 (見 111 頁) 所示。

從圖 2 可以看出, 當 κ 稍大時, Q 便有一個最大值與一個最小值。根據後面的說明 (見第三節第(五)小節) 可知在這種場合便可能產生跳躍現象。與跳進載荷相當的 Q_s 為 Q 的最大值, 與跳回載荷相當的 Q_R 為 Q 的最小值。根據公式 (16) 求 Q 的最大值和最小值, 我們得

$$\left. \begin{aligned} Q_s &= (0.3236 \kappa + 0.0001588 \kappa^3) + 0.00774 (\kappa^2 - 16)^{3/2}, \\ Q_R &= (0.3236 \kappa + 0.0001588 \kappa^3) - 0.00774 (\kappa^2 - 16)^{3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Q_s , Q_R 與 κ 的關係如圖 3 (見 112 頁) 的虛線所示。

以上是根據勢能原理求得的近似結果。觀察圖 3 可見理論求得的 Q_s 和 Q_R 較實驗求得的稍小。為了減少理論與實驗之間的差誤, 錢偉長教授在著作 [5] 中採用了半理論半經驗的方法。

作為公式 (16) 的一個推廣, 我們假定

$$Q = (n + m\kappa^2) \frac{w_0}{h} - l\kappa \left(\frac{w_0}{h} \right)^2 + p \left(\frac{w_0}{h} \right)^3, \quad (18)$$

其中 n , m , l , p 為有待於根據實驗數據決定的常數。從 (18) 式可求得 Q_s , Q_R 的形式如下:

$$\left. \begin{aligned} Q_s &= \mu\kappa^3 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\kappa^2} + \zeta \right) - 1 + \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\eta}{\kappa^2} + \zeta \right) \right]^{3/2} \right\}, \\ Q_R &= \mu\kappa^3 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\kappa^2} + \zeta \right) - 1 - \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\eta}{\kappa^2} + \zeta \right) \right]^{3/2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中 μ , η , ζ 為另外三個常數。錢偉長教授根據 $\alpha = 0.8831$ 的實驗數據最後求得:

$$\eta = 12.76, \quad \zeta = 2.065, \quad \mu = 0.05912. \quad (20)$$

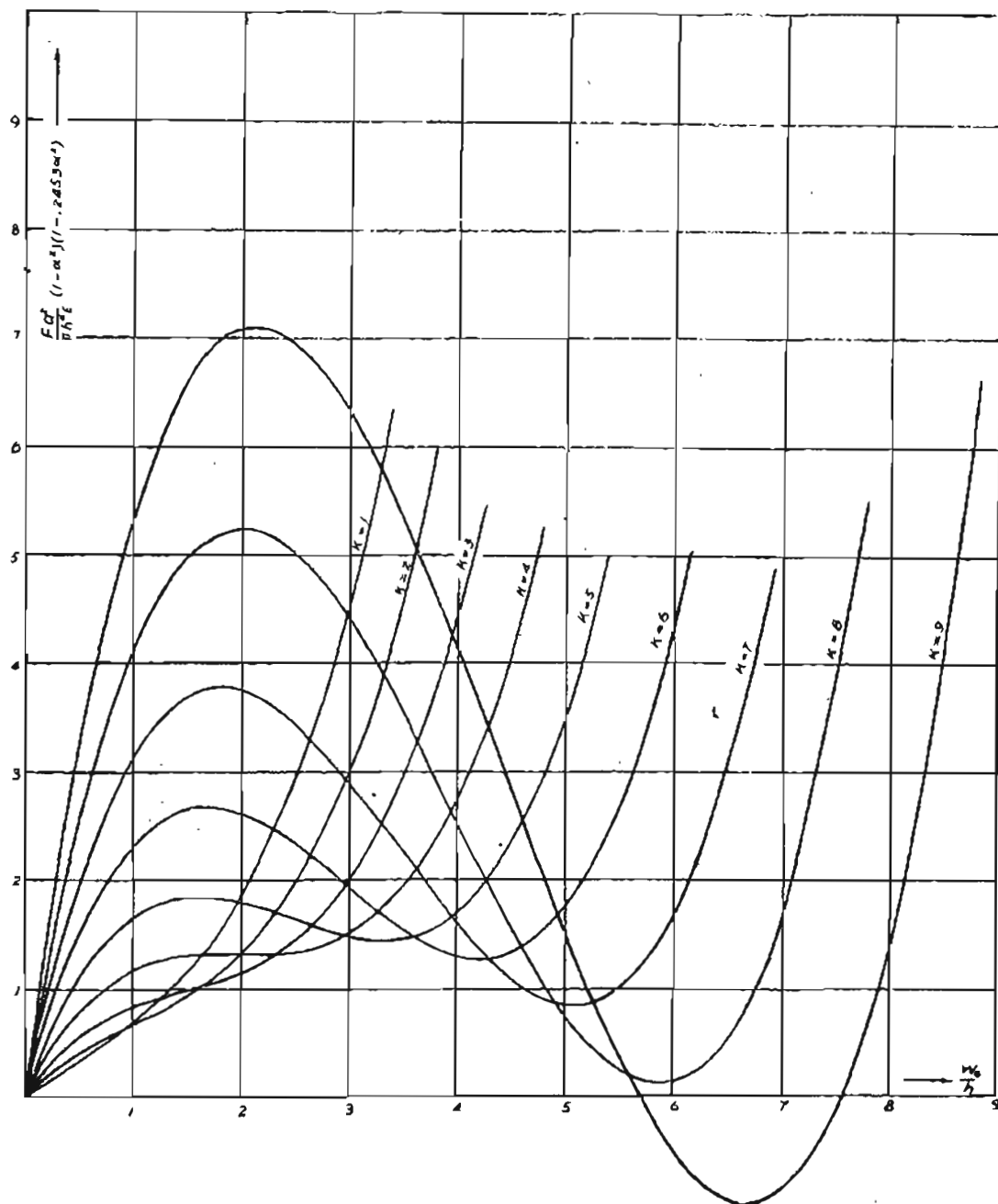


圖 2.

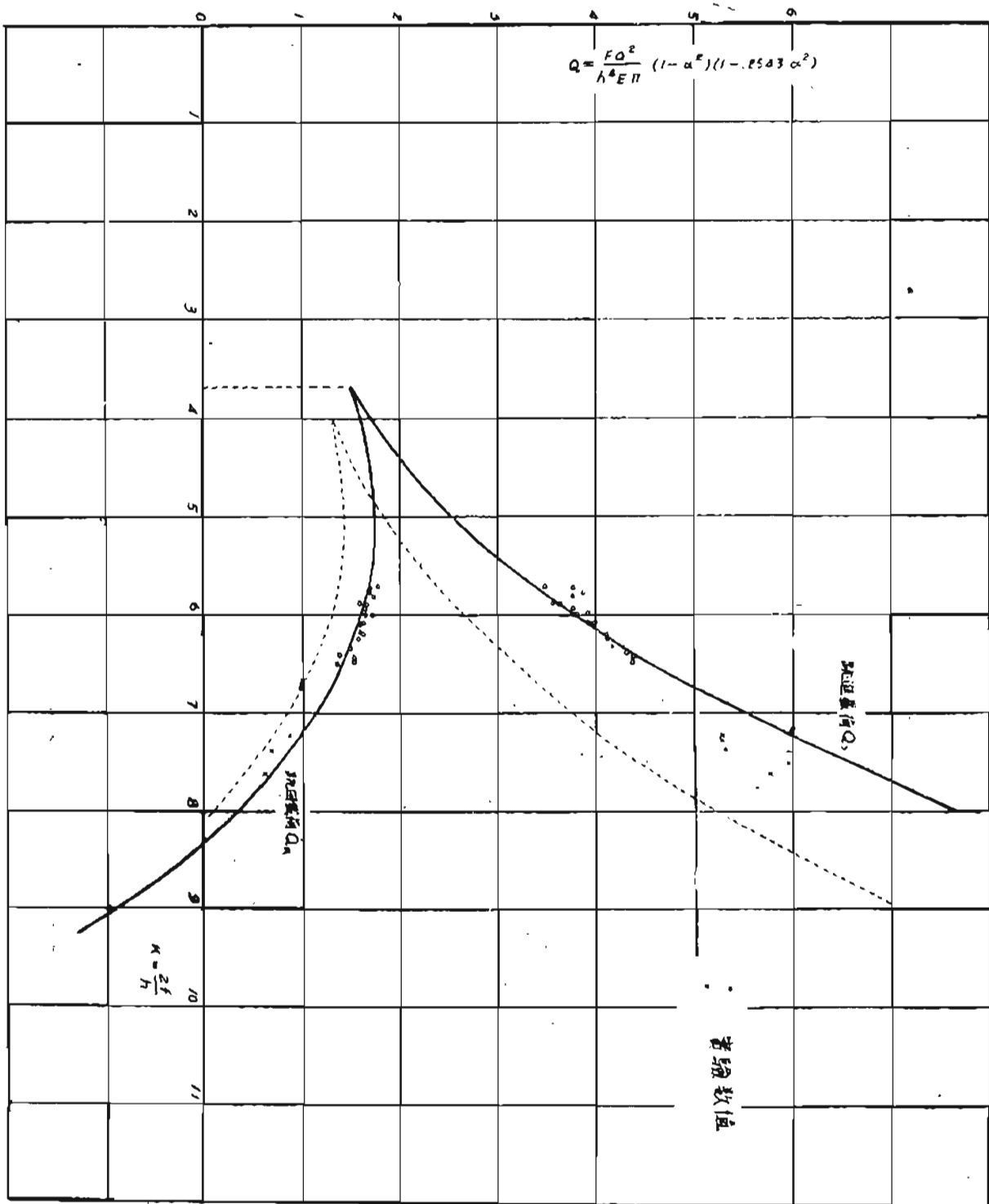


圖 3.

公式 (19) 會同係數 (20), 可作為設計用的半經驗公式 ($\alpha = 0.8831$). 半理論半經驗求得的 Q_S , Q_R 與 κ 的關係如圖 3 的實線所示.

三. 在邊緣力矩作用下的球面扁薄圓壳的跳躍問題

(一) 基本方程及其簡化

今考慮一個厚度為 h , 跨度為 $2a$, 拱起為 f 的球面扁薄圓壳在邊緣力矩作用下的跳躍問題, 參攷圖 4. 因為在扁壳上無分佈載荷, 所以從方程 (1) 得



圖 4.

$$\frac{D}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r N_r \left(\frac{2f}{a^2} r + \frac{dw}{dr} \right) \right] = 0, \quad (21-a)$$

$$\frac{1}{hE} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{2f}{a^2} r \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0. \quad (21-b)$$

根據公式 (2), 本問題中的邊界條件為:

當 $r = a$ 時,

$$w = 0, \quad D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -M, \quad N_r = 0. \quad (22)$$

將方程 (21-a) 乘以 rdr , 然後積分一次, 得

$$D r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - r N_r \left(\frac{2f}{a^2} r + \frac{dw}{dr} \right) = 0. \quad (23)$$

為了簡化此後的計算, 茲引用下列各無量綱的數量:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a}, \quad y = \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{w}{h}, \quad \theta = -\frac{dy}{d\rho}, \\ S_r &= \frac{12(1-\mu^2)a^2}{Eh^3} N_r, \quad S = \rho S_r, \\ k^2 &= 2\sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{f}{h}, \quad m = \frac{12(1-\mu^2)\sqrt{12(1-\mu^2)}a^2}{Eh^4} M. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

利用這些無量綱的數量, 方程 (23), (21-b) 和邊界條件 (22) 分別簡化為:

$$-\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta) + k^2 S = -\frac{\theta S}{\rho}, \quad (25-a)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho S) - k^2 \theta = -\frac{\theta^2}{2\rho}, \quad (25-b)$$

$$\text{當 } \rho = 1 \text{ 時, } \frac{d\theta}{d\rho} + \mu \frac{\theta}{\rho} = m, \quad S = 0. \quad (25-c)$$

這是一組非線性的聯立方程。這組方程雖然比在線佈載荷作用下的或均佈載荷作用下的方程簡單許多, 但是當 m 是任意數時, 它的準確的解還是很難找到, 因而不得不求諸近似解法。不過這裏我們可以注意到, 除了 $m=0$, $\theta=0$, $S=0$ 這個無意義的解之外, 尚有兩個準確的解容易求得。第一個相當於扁壳變成一個平板的場合, 這時,

$$\theta = k^2 \rho, \quad S = -\frac{k^4}{16} \rho (1-\rho^2), \quad m = (1+\mu) k^2. \quad (26)$$

第二個相當於扁壳翻了個身, 這時,

$$\theta = 2k^2 \rho, \quad S = 0, \quad m = 2(1+\mu) k^2. \quad (27)$$

爲了便於討論扁壳彎曲到近乎平板時的性質, 可取如下的新函數 θ' , S' , m' 來代替原來的函數 θ , S , m :

$$\theta = k^2 \rho + \theta', \quad S = -\frac{k^4}{16} \rho (1-\rho^2) + S', \quad m = (1+\mu) k^2 + m'. \quad (28)$$

將 (28) 式代入方程 (25), 我們得 θ' , S' 所適合的方程及邊界條件如下:

$$-\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta') + \frac{k^4}{16} (1-\rho^2) \theta' = -\frac{\theta' S'}{\rho}, \quad (29-a)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho S') = -\frac{\theta'^2}{2\rho}, \quad (29-b)$$

$$\text{當 } \rho = 1 \text{ 時, } \frac{d\theta'}{d\rho} + \mu \frac{\theta'}{\rho} = m', \quad S' = 0. \quad (29-c)$$

方程 (25) 和 (29) 是在邊緣力矩作用下的球面扁薄圓壳的基本方程。以下數小節將討論它們的近似解法。

(二) 線性理論

在本節我們先來討論球面扁薄圓壳在邊緣力矩作用下的線性理論。這個理論將提供一些有用的結果。

在方程 (25) 中略去 θS 和 θ^2 兩項, 使得線性理論中的方程和邊界條件:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta) + k^2 S = 0, \quad (30-a)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho S) - k^2 \theta = 0, \quad (30-b)$$

$$\text{當 } \rho = 1 \text{ 時, } \frac{d\theta}{d\rho} + \mu \frac{\theta}{\rho} = m, \quad S = 0. \quad (30-c)$$

從 (30-a), (30-b) 消去 S , 得 θ 的一個方程如下:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta) + k^4 \theta = 0. \quad (31)$$

由於在 $\rho = 0$ 處 θ 是有限的, 所以方程 (31) 的通解可寫成爲

$$\theta = A J_1(jk\rho) + \bar{A} J_1(j^3 k\rho), \quad (D)$$

其中 $J_1(z)$ 是第一類第一級貝塞爾函數, $j = \sqrt{i} = \sqrt[4]{-1}$, A 是複常數, $\bar{A}$ 是 A 的共軛複數。設

$$(\theta)_{\rho=1} = \beta, \quad (32)$$

那麼算式 (D) 化爲

$$\theta = \frac{\beta}{2} \left\{ \frac{J_1(jk\rho)}{J_1(jk)} + \frac{J_1(j^3 k\rho)}{J_1(j^3 k)} \right\}. \quad (33)$$

和這個 θ 相應的 S 可根據方程 (30-b) 和邊界條件 (30-c) 求得。結果是

$$S = \frac{j^2 \beta}{2} \left\{ \frac{J_1(jk\rho)}{J_1(jk)} - \frac{J_1(j^3 k\rho)}{J_1(j^3 k)} \right\}. \quad (34)$$

邊緣力矩 m 與邊界上的傾度 β 之間的關係可以從 (30-c) 求得。結果是

$$\frac{m}{\beta} = m_1 = -1 + \mu + \frac{k}{2} \left\{ \frac{j J_0(jk)}{J_1(jk)} + \frac{j^3 J_0(j^3 k)}{J_1(j^3 k)} \right\}. \quad (35)$$

m_1 的若干數值如表 1 所示。

表 1. $m_1 = m/\beta$ 的數值 ($\mu = 1/2$).

k m_1	0 1.3333	0.5 1.3339	1.0 1.3435	1.5 1.3850	2.0 1.4899
k m_1	2.5 1.6839	3.0 1.9691	3.5 2.3165	3.6 2.3909	3.7 2.4645
k m_1	3.8 2.5382	3.9 2.6134	4.0 2.6890	4.1 2.7640	4.2 2.8371

將公式 (33) 積分一次, 便得無量綱的撓度 y 的算式

$$y = \int_0^1 \theta d\rho = \frac{\beta}{2k} \left\{ \frac{J_0(jk\rho) - J_0(jk)}{j J_1(jk)} + \frac{J_0(j^3 k \rho) - J_0(j^3 k)}{j^3 J_1(j^3 k)} \right\}. \quad (36)$$

當 k 趨近於零時, 公式 (33), (34), (35), (36) 分別趨近於

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \beta\rho, \quad S = 0, \\ \frac{m}{\beta} &= 1 + \mu, \quad y = \frac{\beta}{2} (1 - \rho^2). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

這些公式和圓形平板的公式相同.

當 k 很大而 ρ 不很小時, 我們可應用下列幾近公式:

$$\left. \begin{aligned} J_0(jk\rho) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k\rho}} \exp \left\{ \frac{jk\rho}{\sqrt{2}} + j^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{jk\rho}{\sqrt{2}} \right) \right\}, \\ J_1(jk\rho) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k\rho}} \exp \left\{ \frac{jk\rho}{\sqrt{2}} + j^2 \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{jk\rho}{\sqrt{2}} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

應用這些公式, 算式 (33), (34), (35) 分別簡化為:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{\beta}{\sqrt{\rho}} \exp \left\{ -\frac{k}{\sqrt{2}} (1-\rho) \right\} \cos \frac{k}{\sqrt{2}} (1-\rho), \\ S &= -\frac{\beta}{\sqrt{\rho}} \exp \left\{ -\frac{k}{\sqrt{2}} (1-\rho) \right\} \sin \frac{k}{\sqrt{2}} (1-\rho), \\ \frac{m}{\beta} &= -1 + \mu + \frac{k}{2\sqrt{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

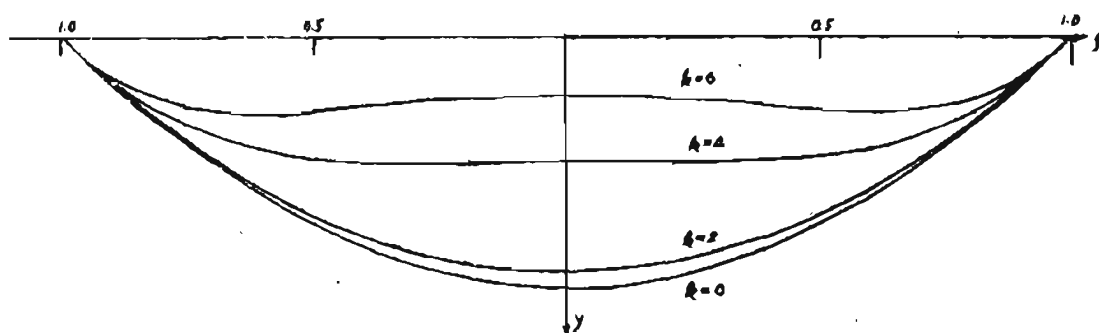


圖 5.

圖 5 示撓度曲線的幾個典型形狀。當 k 很小時，撓度曲線的形狀和平板 ($k=0$) 的相似，如圖中的 $k=2$ 。當 k 稍大時，撓度曲線便有一個最小值，如圖中的 $k=4, 6$ 。當 k 更大時，撓度曲線可能有幾個最小值。撓度曲線有 n 個最小值與有 $(n+1)$ 個最小值的分界點的 k 值，必定適合下面的方程

$$\left(\frac{d\theta}{d\rho} \right)_{\rho=0} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{1}{k} \operatorname{Im} j J_1(jk) = 0. \quad (40)$$

這個方程的前兩根為

$$k_1 = 3.77, \quad k_2 = 8.28. \quad (41)$$

茲進一步討論 $k_1 < k < k_2$ 的場合。當 m 很小時，線性理論是適用的，因此撓度曲線的形狀有如圖 5 中的 $k=4$ 。在這種場合，中心點的彎矩是一負數。但是當 m 很大時，例如 $m = 2(1+\mu)k^2$ 中心點的彎矩必然是一個正數，而撓度曲線的形狀有如圖 5 中的 $k=0$ 。我們很難想像從一個有起伏的撓度曲線轉變為一個沒有起伏的撓度曲線能在平穩連續的過程中完成。換句話說，這個過程中間必定有一個不連續的跳躍。由此可知， $k_1 = 3.77$ 是可能產生跳躍現象的臨界 k 值的上限。後面的計算求得 k 的臨界值是 3.54，證明上述的預計是不錯的。

(三) 平板狀態的穩定性

在第(一)小節中我們已經指出，當扁殼彎曲到平板狀態時，方程 (25) 的準確的解是

$$\theta = k^2 \rho, \quad S = -\frac{k^4}{16} \rho(1-\rho^2), \quad m = (1+\mu)k^2. \quad (26)$$

與此相應的無量綱薄膜應力為

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{S}{\rho} = -\frac{k^4}{16} (1-\rho^2), \\ S_t &= S_r + \rho \frac{dS_r}{d\rho} = -\frac{k^4}{16} (1-3\rho^2). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

從這兩個公式可以看出，在整個扁壳內， S_r 全是壓力， S_t 在中心部分是壓力，在邊緣部分是拉力。同時 S_r 和 S_t 都隨 k 的增加而增加。由此便產生了一個問題，即這種平板狀態是不是穩定的。顯然平板狀態是所有的平衡狀態（對於不同的 m 值而言）中最不穩定的一種。因此假如平板狀態是穩定的，那麼便不可能有跳躍現象產生；反之，便可能產生跳躍現象。所以考慮平板狀態是否穩定而得的 k 的臨界值，亦就是扁壳是否可能產生跳躍現象的臨界值。在本節我們將近似地計算這個臨界值。

設 θ 和 S 有一微小的增加 θ' 和 S' ，但仍維持邊緣力矩 $m = (1+\mu)k^2$ 使之不變。在方程 (29-a) 中略去 $\theta'S'$ 一項不計，得

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta') + \frac{k^4}{16} (1-\rho^2) \theta' = 0, \quad (43-a)$$

$$\text{當 } \rho=1 \text{ 時, } \frac{d\theta'}{d\rho} + \mu \frac{\theta'}{\rho} = 0. \quad (43-b)$$

當 k 取某一臨界值時，方程 (43) 便有不恆等於零的解存在。在數學上這是一個本徵值問題。

設 k_i, k_j 為方程 (43) 的兩個不相等的本徵值，設 $\theta' = \varphi_i(\rho)$ ， $\theta' = \varphi_j(\rho)$ 為相應的本徵函數。根據定義得

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\varphi_i) + \frac{k_i^4}{16} (1-\rho^2) \varphi_i = 0,$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\varphi_j) + \frac{k_j^4}{16} (1-\rho^2) \varphi_j = 0.$$

將第一式乘以 $\rho\varphi_j$ ，第二式乘以 $\rho\varphi_i$ ，然後兩式相減，得

$$\frac{1}{16} (k_i^4 - k_j^4) \rho(1-\rho^2) \varphi_i \varphi_j = \varphi_i \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\varphi_j) - \varphi_j \rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\varphi_i).$$

將此式從 0 到 1 積分一次，注意到邊界條件 (43-b)，便得

$$\frac{1}{16} (k_1^4 - k_i^4) \int_0^1 \rho (1-\rho^2) \varphi_i \varphi_i d\rho = \left\{ \varphi_i \frac{d}{d\rho} (\rho \varphi_i) - \varphi_i \frac{d}{d\rho} (\rho \varphi_i) \right\} \Big|_0^1 = 0.$$

因為前已假定 $k_i \neq k_j$ ，所以

$$\int_0^1 \rho (1-\rho^2) \varphi_i \varphi_i d\rho = 0. \quad (44)$$

這個方程表明所有的本徵函數都相互正交。此後我們假定 φ_i 已正則化，即

$$\int_0^1 \rho (1-\rho^2) \varphi_i \varphi_i d\rho = 1. \quad (45)$$

這樣 φ_i 便構成一組正交正則系。

第一個本徵值 k_1 和第一個本徵函數 φ_1 可按下述方式近似地求得。設 Φ_0 為某一適當選擇的函數。從 Φ_0 ，根據下列方程和邊界條件逐次決定 $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ ：

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \Phi_n) + \frac{1}{16} (1-\rho^2) \Phi_{n-1} = 0, \quad (46-a)$$

$$\text{當 } \rho=1 \text{ 時, } \frac{d\Phi_n}{d\rho} + \mu \frac{\Phi_n}{\rho} = 0. \quad (46-b)$$

假如 Φ_0 是 ρ 的一個多項式，那麼逐次求 $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ 便無困難。在另一方面，根據正交函數的性質， Φ_0 可以用 φ_i 展開如下：

$$\Phi_0 = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i. \quad (47)$$

從這個算式出發，再利用 φ_i 所適合的方程，不難證明

$$\Phi_n = \frac{a_1}{k_1^{4n}} \varphi_1 + \frac{a_2}{k_2^{4n}} \varphi_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{k_i^{4n}} \varphi_i. \quad (48)$$

如果 a_1 不等於零，那麼當 n 很大時上列級數的第一項便是最主要的一項，因此 Φ_n 可視為第一個本徵函數的某一倍數。為了決定 k_1 ，茲先記

$$F_n = \Phi_{n-1} - k_1^4 \Phi_n = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i (k_i^4 - k_1^4)}{k_i^{4n}} \varphi_i. \quad (49)$$

利用正交條件 (44), 從上式可得

$$\int_0^1 \rho (1-\rho^2) F_n \varphi_1 d\rho = 0. \quad (50)$$

考慮具體的屈曲問題, 可以看出 φ_1 在間段 $0 \leq \rho \leq 1$ 內的符號 (正或負) 不變. 因此方程 (50) 表明 F_n 在某些間段內是正數, 在另一些間段內是負數. 由此可知 $F_n = 0$ 在間段 $0 \leq \rho \leq 1$ 的範圍內至少有一個根. 設 $\rho = \xi$ 便是這樣的一個根, 即

$$\Phi_{n-1}(\xi) - k_1^4 \Phi_n(\xi) = 0,$$

由此得

$$k_1^4 = \frac{\Phi_{n-1}(\xi)}{\Phi_n(\xi)}. \quad (51)$$

因此我們可以肯定

$$\min \frac{\Phi_{n-1}(\rho)}{\Phi_n(\rho)} \leq k_1^4 \leq \max \frac{\Phi_{n-1}(\rho)}{\Phi_n(\rho)}, \quad (52)$$

$$0 \leq \rho \leq 1.$$

例如取

$$\Phi_0 = \rho, \quad (53-a)$$

不難求得

$$\Phi_1 = -\frac{1}{16} \left\{ -\frac{(2+\mu)\rho}{12(1+\mu)} + \frac{\rho^3}{8} - \frac{\rho^5}{24} \right\}, \quad (53-b)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{16^2} \left\{ \frac{123+110\mu+27\mu^2}{5760(1+\mu)^2} \rho - \frac{(2+\mu)\rho^3}{96(1+\mu)} + \right. \\ \left. + \frac{(7+5\mu)\rho^5}{216(1+\mu)} - \frac{\rho^7}{36} + \frac{\rho^9}{1920} \right\}. \quad (53-c)$$

於是根據公式 (52) 得

$$\frac{7680(1+\mu)(2+\mu)}{123+110\mu+27\mu^2} \leq k_1^4 \leq \frac{7680(1+\mu)}{56+16\mu}. \quad (54)$$

若取 $\mu = 1/3$, 便得

$$146.99 \leq k_1^4 \leq 166.96,$$

即

$$3.4813 \leq k_1 \leq 3.5946. \quad (55-a)$$

因此,若取

$$k_1 = \frac{1}{2} (3.4813 + 3.5946) = 3.5379, \quad (55-b)$$

可能的誤差不足 1.6%.

(四) 接近於平板狀態時的情形

在本節我們欲討論扁壳彎曲到接近於平板狀態時的情形. 我們特別注意於求得在 $\beta' = (\theta')_{\rho=1}$ 與 m' 都很小時兩者之間的關係. 在方程 (29) 中略去二級小量不計,便得如下的方程與邊界條件:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta') + \frac{k^4}{16} (1-\rho^2) \theta' = 0, \quad (56-a)$$

$$\text{當 } \rho=1 \text{ 時, } \frac{d\theta'}{d\rho} + \mu \frac{\theta'}{\rho} = m'. \quad (56-b)$$

設

$$\theta' = \frac{m'}{1+\mu} (\rho + \Theta), \quad (57)$$

那麼 Θ 適合下面的方程和邊界條件:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\Theta) + \frac{k^4}{16} (1-\rho^2) \Theta = -\frac{k^4}{16} \rho (1-\rho^2), \quad (58-a)$$

$$\text{當 } \rho=1 \text{ 時, } \frac{d\Theta}{d\rho} + \mu \frac{\Theta}{\rho} = 0. \quad (58-b)$$

與方程 (43) 比較,可見 Θ 所適合的方程和邊界條件,與本徵函數所適合的相似. 當 k 很小時或 k 接近於 k_1 時, Θ 可近似地表示為

$$\Theta = \frac{\theta'}{1 - \left(\frac{k}{k_1}\right)^4}, \quad (59)$$

其中 θ' 適合下列方程和邊界條件:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho\theta') = -\frac{k^4}{16} \rho (1-\rho^2), \quad (60-a)$$

$$\text{當 } \rho=1 \text{ 時, } \frac{d\theta'}{d\rho} + \mu \frac{\theta'}{\rho} = 0, \quad (60-b)$$

解此方程得

$$\theta' = \frac{k^4}{16} \left\{ \frac{(2+\mu)\rho}{12(1+\mu)} - \frac{\rho^3}{8} + \frac{\rho^5}{24} \right\}. \quad (61)$$

因此最後近似地得

$$\theta' = \frac{m'}{1+\mu} \left\{ \rho + \frac{k^4}{16 \left[1 - \left(\frac{k}{k_1} \right)^4 \right]} \left[\frac{(2+\mu)\rho}{12(1+\mu)} - \frac{\rho^3}{8} + \frac{\rho^5}{24} \right] \right\}. \quad (62)$$

在這公式中命 $\rho = 1$, 並記 $(\theta')_{\rho=1} = \beta'$ 便得

$$\frac{m'}{\beta'} = m'_1 = \frac{(1+\mu) \left[1 - \left(\frac{k}{k_1} \right)^4 \right]}{1 - \left(\frac{k}{k_1} \right)^4 + \frac{k^4}{192(1+\mu)}}. \quad (63)$$

若取 $\mu = 1/3$, $k_1 = 3.5379$, 則 m'_1 的若干數值如表 2 所示.

表 2. m'_1 的數值.

k m'_1	0	0.5	1.0	1.5	2.0
	1.33333	1.33307	1.32811	1.30663	1.24656
k m'_1	2.5	3.0	3.5	3.6	3.7
	1.10809	0.80559	0.08956	-0.14048	-0.48840
k m'_1	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2
	-0.91235	-1.48830	-2.30965	-3.57047	-5.73215

(五) 力矩與傾度之間的關係 跳進與跳回力矩

在以上數小節, 我們解出了兩個線性問題. 我們不預備進一步去求解非線性的方程 (25) 和 (29). 根據以上求得的數據, 我們已有可能近似地求出力矩 m 與傾度 β 之間的非線性的關係.

當 $k < k_1$ 時, 對應於一個 m 只有一個傾度 θ , 因此在這種場合 β 是 m

的單值函數。當 $k > k_1$ 時，對應於一個 m 便可能有幾個傾度 θ ，因此在這種場合， β 是 m 的多值函數。但是當 k 不太大時， m 是 β 的單值函數。茲先設法決定 k 的臨界值 k_1 ，使得當 $k < k_1$ 時 m 是 β 的單值函數。

假如已決定 θ ，那麼 m 也就唯一地決定了。因此上述問題可轉化為：決定 k 的臨界值 k_1 ，使得當 $k < k_1$ 時， θ 是 β 的單值函數。

和第(三)小節的情形相似，在本問題中最不穩定的狀態亦是平板狀態。因此臨界值 k_1 亦就是下列方程和邊界條件的第一個本徵值：

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \theta') + \frac{k^4}{16} (1 - \rho^2) \theta' = 0, \quad (64-a)$$

$$\text{當 } \rho=1 \text{ 時, } \theta' = 0. \quad (64-b)$$

k_1 的上下限可用與第(三)小節相同的方法求得。如設

$$\Phi_0 = \rho, \quad (65-a)$$

便可求得

$$\Phi_1 = \frac{1}{16 \times 24} (2\rho - 3\rho^3 + \rho^5), \quad (65-b)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{16^2 \times 24^2 \times 10} (27\rho - 60\rho^3 + 50\rho^5 - 20\rho^7 + 3\rho^9), \quad (65-c)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = \frac{1}{16^3 \times 24^3 \times 10^2 \times 7} (2252\rho - 5670\rho^3 + 6090\rho^5 - 3850\rho^7 + \\ + 1470\rho^9 - 322\rho^{11} + 30\rho^{13}). \end{aligned} \quad (65-d)$$

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{16 \times 24 \times 70 \times (27 - 33\rho^2 + 17\rho^4 - 3\rho^6)}{2252 - 3418\rho^2 + 2672\rho^4 - 1178\rho^6 + 292\rho^8 - 30\rho^{10}},$$

$$\min \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = 332.3, \quad \max \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = 364.5,$$

因此

$$332.3 \leq k_1^4 \leq 364.5,$$

即

$$4.237 \leq k_1 \leq 4.369. \quad (66-a)$$

若取

$$k_s = \frac{1}{2} (4.237 + 4.369) = 4.303, \quad (66-b)$$

則 k_s 可能的差誤僅 1.5%.

在以下的討論中,我們將局限於 $k \leq 4.237$. 在這種場合, m 就必定是 β 的單值函數,

$$m = m(\beta), \text{ 或 } m' = m'(\beta'). \quad (67)$$

根據以上數小節所得的結果,可見 (m, β) 曲線有如下四點性質 (參攷圖 6):

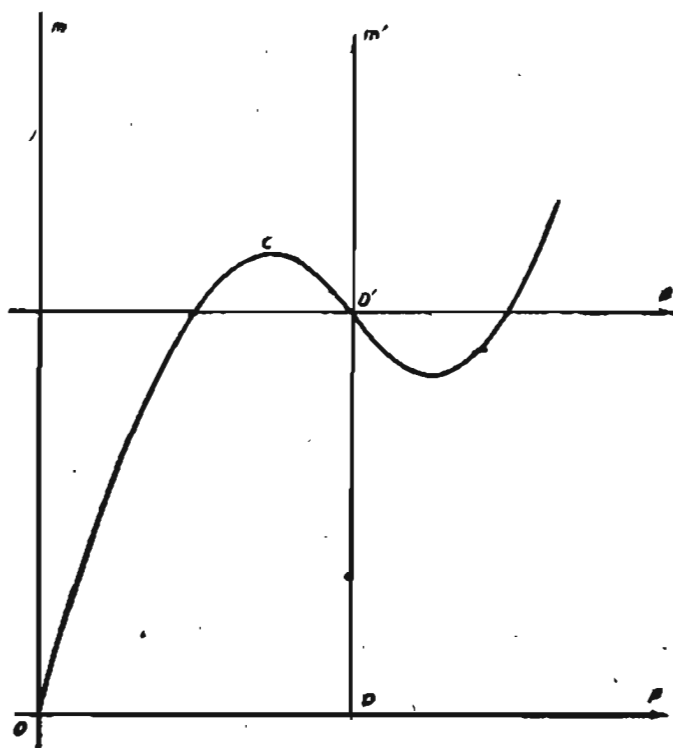


圖 6.

- 1) 在原點 O 的切線的斜度為 m_1 , 見方程 (35);
- 2) 曲線經過 O' 點, 此點的坐標為 $\beta = k^2$, $m = (1 + \mu) k^2$, 見方程 (26);
- 3) 在 O' 點的切線的斜度為 m'_1 , 見方程 (63);
- 4) 曲線對於 $O'\beta'$, $O'm'$ 兩軸是反對稱的. 這可以從方程 (29) 看到.

除了上述四點外, 曲線與 $O\beta$ 軸之間的面積 $OCO'D$ 還可簡單地求得. 這塊面積代表邊緣力矩所作之功. 根據能量守恆原理, 它亦就是扁殼的應變能.

扁壳的彎曲應該是

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\frac{d}{d\rho} (\rho\theta) \right]^2 - 2(1-\mu) \theta \frac{d\theta}{d\rho} \right\} d\rho,$$

扁壳的薄膜應變能是

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\frac{d}{d\rho} (\rho S) \right]^2 - 2(1+\mu) S \frac{dS}{d\rho} \right\} d\rho.$$

因此扁壳中的總應變能 U 為

$$U = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\frac{d}{d\rho} (\rho\theta) \right]^2 - 2(1-\mu) \theta \frac{d\theta}{d\rho} \right\} d\rho + \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\frac{d}{d\rho} (\rho S) \right]^2 - 2(1+\mu) S \frac{dS}{d\rho} \right\} d\rho. \quad (68)$$

將 θ 和 S 的算式 (26) 代入此式,並算出積分,得

$$\int_0^{k^2} m(\beta) d\beta = \frac{1}{2} (1+\mu) k^4 + \frac{k^8}{768}, \quad (69-a)$$

或

$$\int_{-k^2}^0 m'(\beta') d\beta' = -\frac{1}{2} (1+\mu) k^4 + \frac{k^8}{768}. \quad (69-b)$$

這樣我們一共知道了 (m, β) 曲線的五個性質。為了近似地寫出 $m(\beta)$ 或 $m'(\beta')$, 我們可假定

$$\frac{m'}{k^2} = m'_1 \frac{\beta'}{k^2} + m'_3 \left(\frac{\beta'}{k^2} \right)^3 + m'_5 \left(\frac{\beta'}{k^2} \right)^5 + m'_7 \left(\frac{\beta'}{k^2} \right)^7. \quad (70)$$

利用條件 1), 2) 和方程 (69), 我們便能決定 m'_3, m'_5, m'_7 . 這樣我們求得

$$m'_3 = \frac{11}{2} (1+\mu) + \frac{m_1}{2} - 6 m'_1 - \frac{k^4}{32}, \quad (71-a)$$

$$m'_5 = -\frac{15}{2} (1+\mu) - \frac{3}{2} m_1 + 9 m'_1 + \frac{k^4}{16}, \quad (71-b)$$

$$m'_7 = 3 (1+\mu) + m_1 - 4 m'_1 - \frac{k^4}{32}. \quad (71-c)$$

m'_3, m'_5, m'_7 的若干數僅如表 3 所示.

表 3. m'_3, m'_6, m'_7 的數值.

k	0	0.5	1.0	1.5	2.0
m'_3	0	-0.00007	0.00517	0.02784	0.09892
m'_6	0	0.000061	0.00024	-0.00139	-0.01581
m'_7	0	-0.00029	-0.00019	0.00026	0.00366
k	2.5	3.0	3.5	3.6	3.7
m'_3	0.30606	0.95312	3.26542	4.12288	5.63924
m'_6	-0.11168	-0.64092	-3.29081	-4.35313	-6.37887
m'_7	0.03087	0.21554	1.26927	1.70406	2.56137
k	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2
m'_3	7.56049	10.34036	14.53574	21.30766	23.42073
m'_6	-8.98638	-12.85587	-18.82038	-28.61924	-46.39690
m'_7	3.67157	5.33715	7.92762	12.45239	20.04165

公式 (70) 會同公式 (71) 便規定了邊緣力矩與傾度之間的關係。 $k=3.8, 3.9, 4.0, 4.1$ 等四條曲線如圖 7 所示。從此圖可以看出, 當 $k > k_1$ 時, (m, β) 曲線在 O' 點附近便有一個最大值與一個最小值。當 k 頗大時 (例如 $k=4.1$), 那麼在 O 點附近又出現了一個最大值與一個最小值。事實上在 O 點附近並無跳躍產生, 關於這一點將在下節討論。如果將在 O 點附近的最大值與最小值略去不計, 那麼當 $k > k_1$ 時 (m, β) 曲線的形狀如圖 8 所示。曲線上任一點 P 都代表一種可能的平衡狀態。今設想做一實驗如下: 首先讓外界邊緣力矩 m 從零逐漸增加, 於是代表平衡狀態的 P 點便從 O 點出發沿曲線 OAB 上升而直至於 B 點。若 m 再增加而超過 B 點的 m 值, 那麼 P 點必從 B 點跳至 C 點, 因為在 $BO'EC$ 段內的 m 值均比 B 點的 m 值小。由此可知在加載荷過程中有一次跳躍, 相當於 P 點從 B 到 C 。跳進力矩 m_c 便為 m 的最大值。之後若 m 再增加, 那麼 P 點便沿 CD 上升。今設想當 P 到達 D 點後 m 逐漸減少, 於是 P 點便沿 DCE 下降而至於 E 點。當 m 再減小時, P 點必定從 E 點跳至 A 點, 因為在線段 $EO'BA$ 內的 m 值都比 E 點的 m 值

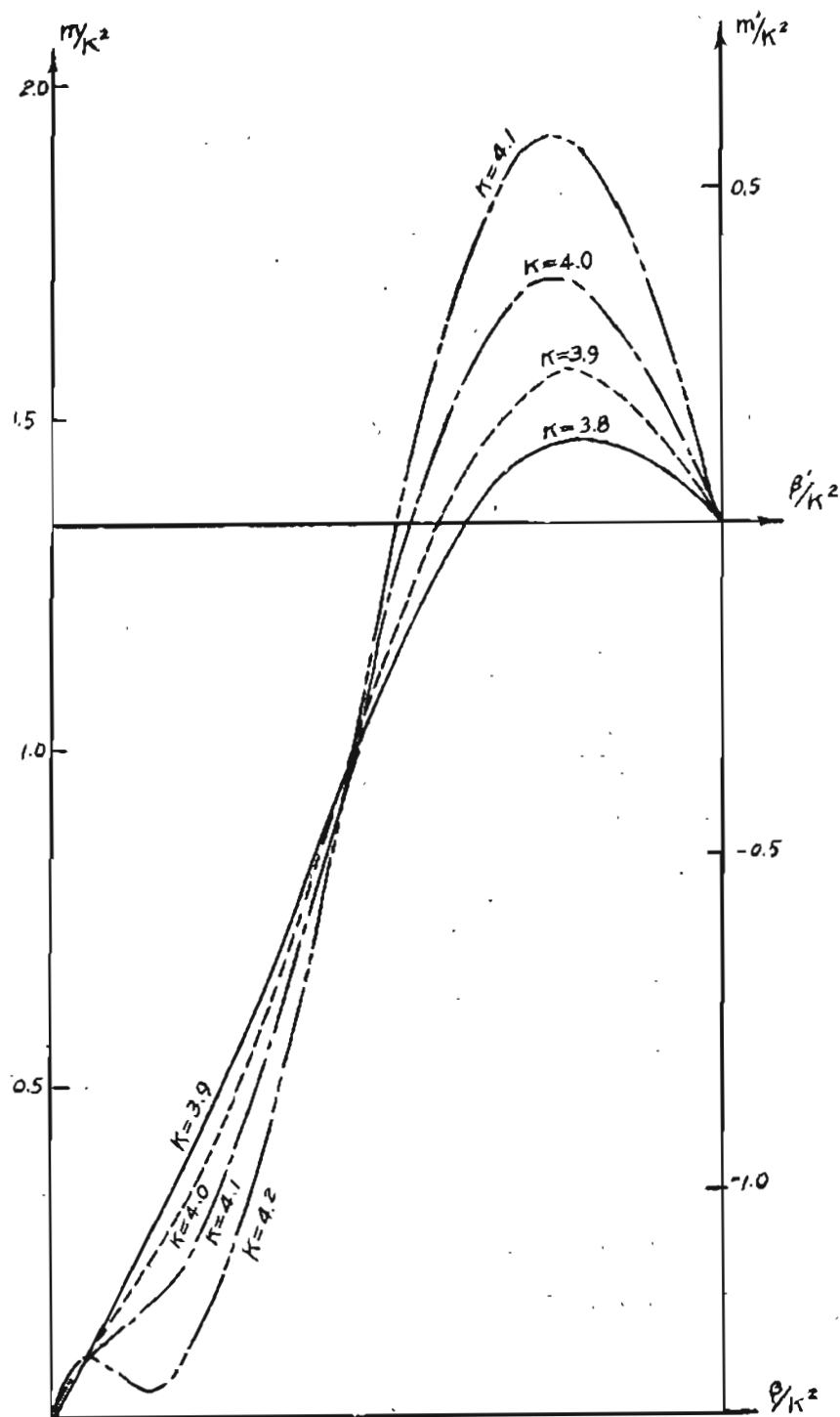


圖 7.

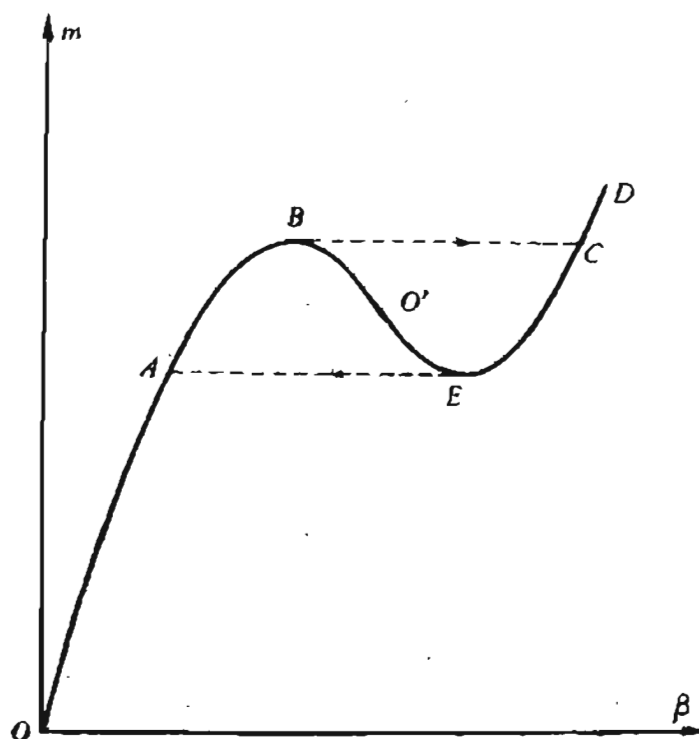


圖 8.

大。由此可知在去載荷過程中有一次跳躍，相當於 P 點從 E 到 A 。跳回力矩 m_b 便是 m 的最小值。

根據公式 (70) 求 m 的最大值與最小值，我們得 m_s , m_b 與 k 的關係如圖 9 所示。圖中的原點是 $m = 0$, $k = 3.5$ 。

由於 (m, β) 曲線關於 β' 軸是反對稱的，可知

$$\frac{1}{2} (\max m + \min m) = O' \text{ 點的 } m,$$

即

$$\frac{1}{2} (m_s + m_b) = (1 + \mu) k^2. \quad (72)$$

這是一個在理論上完全準確的關係式，它表明跳進力矩與跳回力矩的平均值與 k 的平方成正比，即與 f/h 成正比。

四. 結 論

球面扁薄圓壳的跳躍問題，本質上是一個非線性的問題，在數學上十分複雜。我們從說明跳躍現象的物理性質着手，因而有可能在解決兩個線性問題之後求

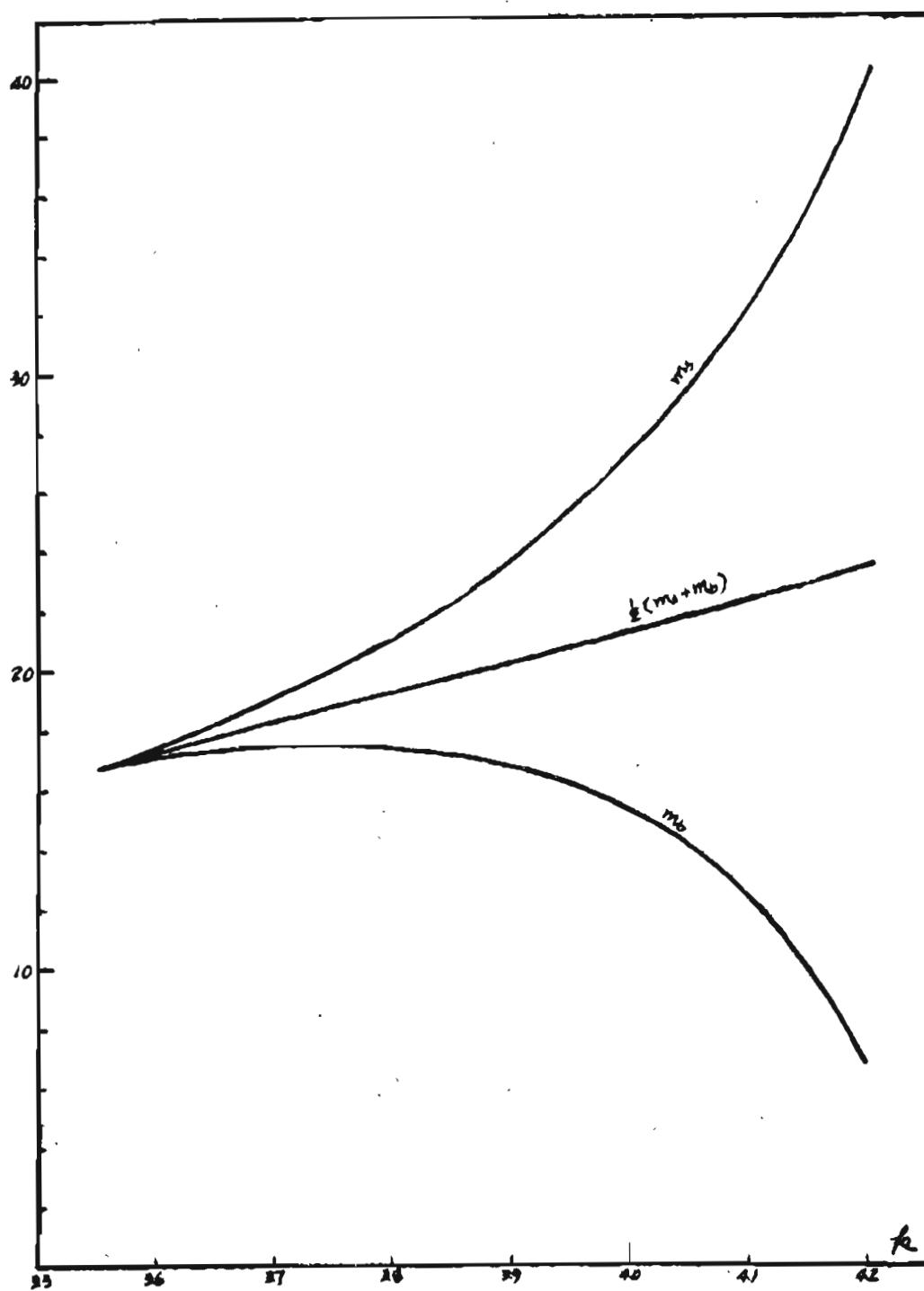


圖 9.

出一系列有用的結果。我們證明跳進力矩與跳回力距的平均值與 k^2 成正比。這在理論上是一個完全準確的關係式。我們還求得可能產生跳躍現象的臨界 k 的近似值，和保證 m 是 β 的單值函數的臨界 k 的近似值。前者的差誤僅小於 1.6%，後者的差誤僅 1.5%。據作者所知在薄板薄壳的大撓度問題中未曾有人求得這樣精密可靠的結果。

至於 m 與 β 的關係，那麼在 k 接近於 k_1 時結果是相當良好的，但是當 k 比 k_1 大得多時，便產生了一個不合理的結果。這個不合理的結果主要是由於 m_1' 的不準確所引起的。公式 (63) 表明 m_1' 隨 k 的增加而減小，但在實際上，當 $k=k_2$ 時， $m_1'=0$ ，並不是絕對值頗大的一個負數。由此可知當 $k>k_1$ 時，由公式 (63) 決定的 m_1' 比真正的小（即它的絕對值比真正的大）。作者估計，只要付出相當大的勞力， m_1' 的公式可以得到改進，因而 m 和 β 的關係亦可得到改進。

扁薄壳和波紋圓板的跳躍現象雖然比較容易觀察到，可是精密可靠的實驗數據却十分缺乏，因此在目前本文的結果無法得到驗證。但是拿本文的理論結果去與實驗結果比較，却具有重要的意義。這不但可以驗證本文所討論的這個個別問題解決得是否滿意，同時由於本文的結果在理論上是相當準確可靠的，因此還可以驗證 SS12 型薄壳理論的適用範圍。作者希望在不久的將來在我國將有一批精密可靠的關於薄板薄壳大撓度問題的實驗結果。

作者在研究本問題時得到錢偉長教授的熱心指導，謹表示深切的謝意。

參 考 文 獻

- [1] Феодосьев, В. И., О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой. *ПММ*, 9 (1945), 389—412.
- [2] Панов, Д. Ю., Применение метода В. Г. Галеркина для решения некоторых нелинейных задач теории упругости. *ПММ*, 3 (1939), (2), 139.
- [3] Феодосьев, В. И., К расчёту хлопающей мембраны. *ПММ*, 10 (1946), 295—300.
- [4] 錢偉長, Preliminary report on the snapping pressures of a thin spherical cap. 1945 (未發表).
- [5] ———, Design formulae for the snapping pressures of a thin spherical cap. 1945 (未發表).
- [6] v. Kármán, Th., and Tsien Hsue-shen (錢學森), The buckling of spherical shells by external pressure. *J. Aero. Sci.*, 7 (1939), 43.
- [7] Friedrich, K. O., On the minimum buckling load for spherical shells, *Th. v. Kármán Anniversary Volume*, 1941, p. 258.
- [8] Tsien Hsue-shen (錢學森), A theory for the buckling of thin shells. *J. Aero. Sci.*, 9 (1942), 373.
- [9] Муштаря, Х. М., и Суркин, Р. Г., О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием равномерно распределённого нормального внешнего давления. *ПММ*, 14 (1950), 573.

- [10] Chien W. Z. (錢偉長), The intrinsic theory of thin shells and plates. Part I, General theory, *Quart. Appl. Math.*, **1** (1944), 297-327; Part II, Application to thin plates, *ibid.*, **2** (1944), 43-59; Part III, Application to thin shells, *ibid.*, **2** (1944), 120-135.

ON THE SNAPPING OF A THIN SPHERICAL CAP

HU HAI-CHANG

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, the snapping of a thin spherical cap under edge moment is considered. The snapping of the same cap under line load distributed along a circle as shown in Fig. 1 has been discussed by Chien Wei-zang^[4, 5] in two unpublished papers. His results are briefly summarized in this paper.

Consider a thin spherical cap of thickness h , span $2a$ and radius of curvature $2f/a^2$ under edge moment M per unit length uniformly distributed along the edge of the cap as shown in Fig. 4. The deflection w and the membrane radial stress N_r at a distance r from the axis of the cap satisfy the equations

$$\frac{D}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r N_r \left(\frac{2f}{a^2} r + \frac{dw}{dr} \right) \right] = 0, \quad (21a)$$

$$\frac{1}{hE} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{2f}{a^2} r \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0, \quad (21b)$$

with the boundary conditions

$$w = 0, \quad D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -M_r, \quad N_r = 0 \quad \text{at} \quad r = a. \quad (22)$$

By integrating Eq. (21a), we get

$$Dr \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - r N_r \left(\frac{2f}{a^2} r + \frac{dw}{dr} \right) = 0. \quad (23)$$

In order to simplify the following calculations, let us introduce the following dimensionless variables:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a}, \quad y = \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{w}{h}, \quad \theta = -\frac{dy}{d\rho}, \\ S_r &= \frac{12(1-\mu^2)a^2}{Eh^3} N_r, \quad S = \rho s_r, \\ k^2 &= 2\sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{t}{h}, \quad m = \frac{12(1-\mu^2)\sqrt{12(1-\mu^2)}a^2}{Eh^4} M. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

By regarding θ and S as functions of ρ , Eqs. (23), (21b) and boundary conditions (22) reduce to

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \theta) + k^2 S = -\frac{\theta S}{\rho}, \quad (25a)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho S) - k^2 \theta = -\frac{\theta^2}{2\rho}, \quad (25b)$$

$$\frac{d\theta}{d\rho} + \mu \frac{\theta}{\rho} = m, \quad S = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1. \quad (25c)$$

This is a system of two non-linear differential equations. Exact solution of these equations is very difficult. An approximate solution is given in this paper. Here we may note that two simple exact solutions can be found when m takes two special values. The first corresponds to the case when the cap is bent into a flat plate. In this case

$$\theta = k^2 \rho, \quad S = -\frac{k^4}{16} \rho (1-\rho^2), \quad m = (1+\mu) k^2. \quad (26)$$

The second corresponds to the case when the cap is turned over into an inverted spherical cap. In this case

$$\theta = 2k^2 \rho, \quad S = 0, \quad m = 2(1+\mu) k^2. \quad (27)$$

In order to investigate the behavior of the cap near the form of a flat plate, it is convenient to make the following substitution:

$$\theta = k^2 \rho + \theta', \quad S = -\frac{k^4}{16} \rho (1-\rho^2) + S', \quad m = (1+\mu) k^2 + m'. \quad (28)$$

Substituting expressions (28) into Eqs. (25), we get

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \theta') + \frac{k^4}{16} (1-\rho^2) \theta' = -\frac{\theta' S'}{\rho}, \quad (29a)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho S') = -\frac{\theta'^2}{2\rho}, \quad (29b)$$

$$-\frac{d\theta'}{d\rho} + \mu \frac{\theta'}{\rho} = m', \quad S' = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1. \quad (29c)$$

Equations (25) and (29) are fundamental equations in this paper.

We begin with the investigation of the small bending of the cap in accordance with the classical linear theory. By neglecting second order terms in Eqs. (25), we get

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \theta) + k^2 S = 0, \quad (30a)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho S) - k^2 \theta = 0, \quad (30b)$$

$$\frac{d\theta}{d\rho} + \mu \frac{\theta}{\rho} = m, \quad S = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1. \quad (30c)$$

The solution of Eqs. (30) under the boundary conditions

$$\theta = \beta, \quad S = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1$$

is

$$\theta = \frac{\beta}{2} \left\{ \frac{J_1(jk\rho)}{J_1(jk)} + \frac{J_1(j^3k\rho)}{J_1(j^3k)} \right\}, \quad (33)$$

$$S = \frac{j^2\beta}{2} \left\{ \frac{J_1(jk\rho)}{J_1(jk)} - \frac{J_1(j^3k\rho)}{J_1(j^3k)} \right\}, \quad j = \sqrt{-1} = \sqrt{i}. \quad (34)$$

The relation between the edge moment m and edge slop β can be found from Eq. (30c). Thus we obtain

$$\frac{m}{\beta} = m_1 = -1 + \mu + \frac{k}{2} \left\{ \frac{jJ_0(jk)}{J_1(jk)} + \frac{j^3J_0(j^3k)}{J_1(j^3k)} \right\}. \quad (35)$$

Values of m_1 for several values of k are given in Table 1.

Integrating formula (33), we get

$$y = \frac{\beta}{2k} \left\{ \frac{J_0(jk\rho) - J_0(jk)}{jJ_1(jk)} + \frac{J_0(j^3k\rho) - J_0(j^3k)}{j^3J_1(j^3k)} \right\}. \quad (36)$$

Deflection curves for $k=0, 2, 4, 6$ are shown in Fig. 5. When k is small, deflection curves resemble that of a flat plate. But when k is large, deflection curves have several waves. The transition from n waves to $(n+1)$ waves occurs when k satisfies the following condition:

$$\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)_{\rho=0} = 0, \quad i. e. \quad \frac{1}{k} \operatorname{Im} j J_1(jk) = 0. \quad (40)$$

The first two roots of this equation are

$$k_1 = 3.77, \quad k_2 = 8.28. \quad (41)$$

Let us now consider in some details the case when $k_1 < k < k_2$. When m is small, the bending moment at the center of the cap is negative and the shape of the deflection curve resembles to that for $k=4$ as shown in Fig. 5. But when m is sufficiently large, it is evident that the bending moment at the center of the cap must be positive and the corresponding deflection curve resembles that for $k=0$ as shown in Fig. 5. The transition from a waved deflection curve to an unwaved deflection curve cannot occur in a continuous process. The transition must be carried out by a sudden jump, i.e. by snapping or return back process. Therefore $k=3.77$ may be regarded as the upper bound of k for the occurrence of snapping. A more precise value given below is $k \approx 3.54$, which justifies the above reasoning.

In order to determine the critical value of k for the occurrence of snapping, it is sufficient to consider the stability of the cap when it is bent to the form of a flat plate. It is quite clear that the form of a flat plate is the most unstable state of all deformations corresponding to different values of m . If this state is stable, there will be no snapping action. If this state is unstable, then snapping is possible. Therefore the critical value of k for the instability of the flat plate form is also the critical value for the occurrence of snapping.

The critical value of k for the instability of the flat plate form is the first eigenvalue of the following differential equation:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \theta') + \frac{k^4}{16} (1 - \rho^2) \theta' = 0, \quad (43a)$$

$$\frac{d\theta'}{d\rho} + \mu \frac{\theta'}{\rho} = 0 \quad \text{at} \quad \rho = 1. \quad (43b)$$

This value is determined by an approximate method. It is found that

$$3.4813 \leq k_1 \leq 3.5946. \quad (55a)$$

Therefore if we take

$$k_1 = 3.5379, \quad (55b)$$

the possible error of this value is less than 1.6%.

We next investigate the behavior of the cap near the form of a flat plate. Our purpose

is to find out the relation between $\beta' = (\theta')_{\rho=1}$ and m' when β' is small. By neglecting second order terms in Eqs. (29), we get

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \theta') + \frac{k^4}{16} (1 - \rho^2) \theta' = 0, \quad (56a)$$

$$\frac{d\theta'}{d\rho} + \mu \frac{\theta'}{\rho} = m' \quad \text{at } \rho = 1. \quad (56b)$$

This equation is solved approximately. We obtain an approximate relation between m' and β' as follows:

$$\frac{m'}{\beta'} = m'_1 = \frac{(1 + \mu) \left[1 - \left(\frac{k}{k_1} \right)^4 \right]}{1 - \left(\frac{k}{k_1} \right)^4 + \frac{k^4}{192(1 + \mu)}}. \quad (63)$$

Several values of m'_1 , taking $k_1 = 3.5379$, are given in Table 2.

Up to now we have discussed only two linear problems. We do not intend to solve the non-linear equations (25) or (29). Based upon the previous results, it is possible to construct approximately the non-linear relation between m and β .

When $k > k_1$, corresponding to one value of m there may be several deflection curves. Therefore in this case β is a multiply valued function of m . But for not too large values of k , m may be a single valued function of β . It is found that the critical value k_c of k that, when $k < k_c$, m is a single valued function of β lies in the interval

$$4.237 \leq k_c \leq 4.369. \quad (66a)$$

Therefore, when $k \leq 4.237$, m is certainly a single valued function of β . In this case m may be expressed by a power series of β , or, what is the same thing, m' may be expressed by a power series of β' .

According to the results obtained previously, the curve $m = m'(\beta')$ in the (β', m') plane (Fig. 6) have the following properties:

- 1) The slope of the tangent at the origin O is m_1 , see Eq. (35).
- 2) The curve passes through the point O' with coordinates $\beta = k^2$, $m = (1 + \mu) k^2$, see Eq. (26).
- 3) The slope of the tangent at the point O' is m'_1 , see Eq. (63).
- 4) The curve is skew-symmetric with respect to coordinate axes $O'\beta'$, $O'm'$. This follows immediately from Eq. (29).

Besides these results, the area $OCO'D$ in Fig. 6 can be found without any difficulty. This area represents the work done by the external edge moment m . According to the principle of conservation of energy, it must equal to the strain energy of the cap at the state corresponding to the point O' . In this way we find

$$\int_{-k^2}^0 m'(\beta') d\beta' = -\frac{1}{2}(1+\mu)k^4 + \frac{k^8}{768}. \quad (69b)$$

Thus for the approximate representation of the relation between m' and β' , we assume a curve of 7-th degree

$$\frac{m'}{k^2} = m'_1 \frac{\beta'}{k^2} + m'_3 \left(\frac{\beta'}{k^2}\right)^3 + m'_5 \left(\frac{\beta'}{k^2}\right)^5 + m'_7 \left(\frac{\beta'}{k^2}\right)^7, \quad (70)$$

where m'_1, m'_3, m'_5, m'_7 , are determined by the properties cited above. In this way we obtain

$$\left. \begin{aligned} m'_3 &= \frac{11}{2}(1+\mu) + \frac{m_1}{2} - 6m'_1 - \frac{k^4}{32}, \\ m'_5 &= -\frac{15}{2}(1+\mu) - \frac{3}{2}m_1 + 9m'_1 + \frac{k^4}{16}, \\ m'_7 &= 3(1+\mu) + m_1 - 4m'_1 - \frac{k^4}{32}. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Several values of m'_3, m'_5, m'_1 are given in Table 3.

Equation (70) in conjunction with coefficients (71) defines approximately the relation between the edge moment m and the edge slope β . In Fig. 7 is shown m - β curves for $k=3.8, 3.9, 4.0, 4.1$.

Let us now examine in some detail the behavior of the $m=m(\beta)$ curve in connection with the stability of deformation. For $k < k_1$, m is a steadily increasing function of β . For $k > k_1$, the function $m=m(\beta)$ has relative maximum and minimum. Apart from a slight difference near the origin O , a typical curve for $k > k_1$ is shown in Fig. 8, where the curve at the right hand side of the m' -axis has been added. It may be proved that the maximum value of m is the snapping moment m_s in the process of loading and the minimum value of m is the return back moment m_b in the process of unloading. Values of m_s and m_b found from Eq. (70) are plotted in Fig. 9 in dependence with k .

Since m - β curves are skew-symmetric with respect to axes $O'\beta', O'm'$, it is easily seen that

This is an exact relation theoretically.