

關於固體的現實應力空間*

劉 叔 儀

(北京鋼鐵工業學院)

提 要

固體不能在一切應力狀態下無限受力這意味着只是某一部份應力空間對固體有現實意義。本文所謂“固體的現實應力空間”即指此一部份應力空間而言。在恆溫狀態下，固體的現實應力空間成何形狀？其組成及性質如何？這個問題到現在為止甚至沒有一個具體的概念。本文主要引用兩方面的理論，結合起來分析這一個重要問題：一為作者前文中所得理論分析結論^[1]；一為彌氏 (von-Mise) 塑性方程。本文分析說明：

在恆溫狀態下，固體之現實應力空間為鐘形，對稱於流體靜應力軸，鐘頂在純張力象限，為最低位能狀態、彈性柱、塑性區域斷、裂鐘面及一未知曲面所構成。此鐘形應力空間之構造及性質，明確地反映了一固體在一切應力狀態之可塑性與不可塑性，符合於現存實驗事實及工業經驗所提供的概念。鐘形應力空間的構造與性質，提供合符事實而且理論概念明確的條件以作各種變形過程之分類。對固體現實應力空間問題提出一個具體明確的概念，本文是第一次。

一. 引 言

在恆溫狀態下，固體的現實應力空間成何形狀？其組成及性質如何？這個問題，到現在為止還沒有一個具體的概念，雖然過去的研究提出了一些啟發性的意見。1943 年福利得曼 (П. Б. Фридман)^[2] 提出一個局部的理論，以最大切應力作塑性變形及斷裂條件，另以一正應力作另一斷裂條件，如第一圖所示。這個學說，在技術上應用較廣，在大學力學教材中也被採用，它對於本問題不但開闢了一條思想路線，同時也在本問題的了解中推進了一步。但如顧伯金 (С. И. Кубкин) 所指出^[3]，這一學說應用到壓力變形過程，遭遇到一些困難。顧伯金根據張力、壓力及擠壓三種典型變形過程中的裂斷應力與應力應

*1953 年 11 月 20 日收到。

變曲線,提出另一學說,足以解釋壓力加工中的塑性及“溫速度”對塑性影響,對有關問題的了解提供了啓發性的幫助。此外約漢·多恩 (J. E. Dorn)^[4] 對此問題

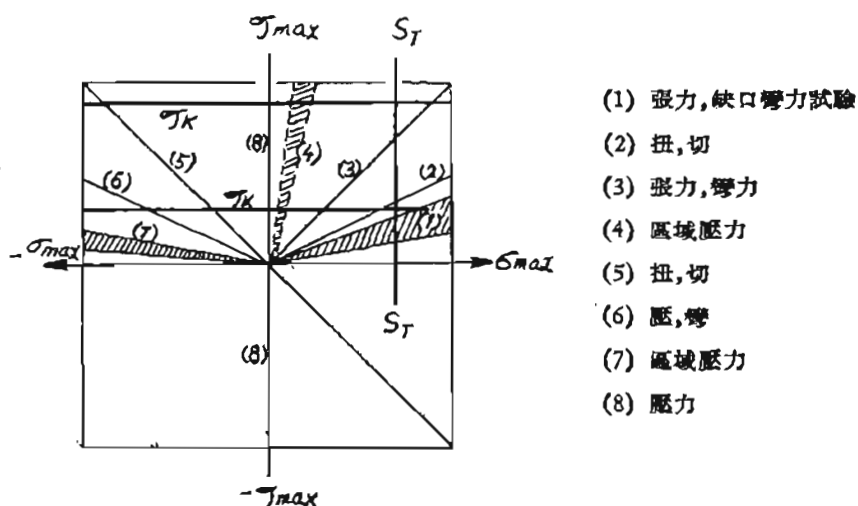


圖 1. 統一強度學說[1]。

的一方面提了一些猜測性的意見,但未貫測到理論分析中去以得出結論來,同時也未提出具體的全面意見。金山姆 (M. Gensamer) 也提出一個說法^[5],但沒有考慮切裂的可能性。

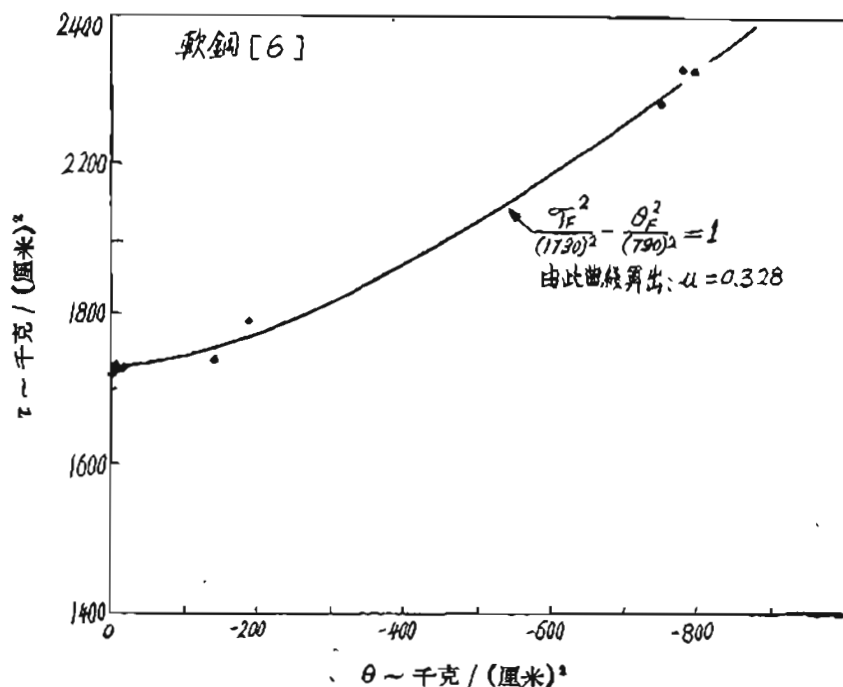
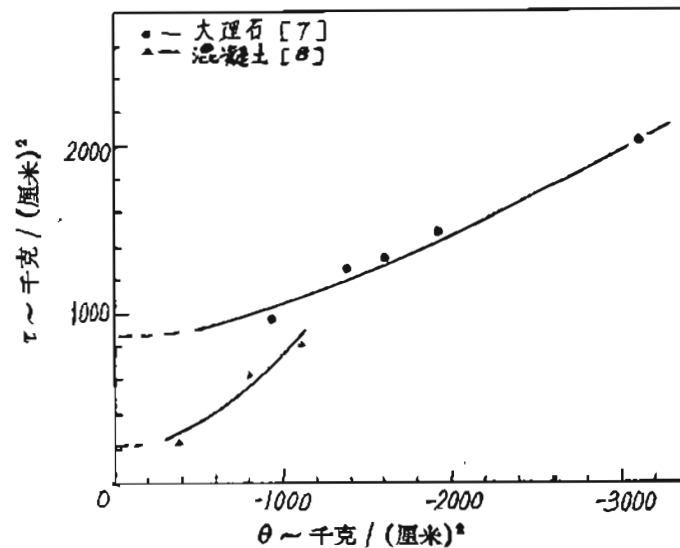
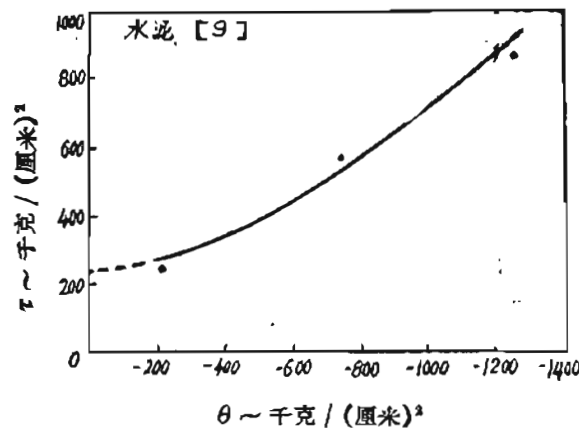


圖 2a. 軟鋼的 τ - θ 斷裂曲線[1]。

圖 2b. 大理石及混凝土之 τ - θ 斷裂曲綫[7], [8]。圖 2c. 水泥的 τ - θ 斷裂曲綫[9]。

作者在前文^[1]中所得恆溫斷裂問題的理論分析結論,提供了一個可能性以對此問題作一初步的全面分析。在本文中,根據前文結論並結合彌氏的塑性方程式來對此問題作具體分析。因為在前文中已引證了不少實驗事實,彌氏的塑性方程則是一般所接受的,而本文性質,是連繼前文的一篇理論歸納性的文章。所以不再重複前文實驗結果。以下是最近搜集到的一些實驗結果。

圖 2a 為軟鋼的實驗結果^[6],按前文所得結論,當 $\theta \leq 0$ 時,斷裂方程在 τ - θ (θ = 平均正應力; τ = 八面切應力) 平面中為一雙曲線,實驗記錄完全符合於一雙曲線。

圖 2b,c 為一些非金屬建築材料的實驗記錄^{[7],[8],[9]};因為記錄不夠,故未配上理論曲線,但這些實驗結果的變曲線性是明顯的。

二. 邊限曲面及有關曲面間之幾何關係

在本問題中,涉及三個邊限應力狀態曲面、兩個椎面和一個平面 茲分別討論之:

彌氏的塑性方程,意謂當固體內之應力狀態滿足以下等式時,塑性變形即開始發生:

$$(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2 = 2K^2,$$

或作

$$(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - (s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = K^2. \quad (1)$$

一般應力狀態下之恆溫斷裂曲面,作者在前文中所得結論為:

$$(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 2\mu(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = \frac{2E\alpha}{r_0}, \theta \geq 0; \quad (2)$$

$$(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 2\left(\frac{2-\mu}{1+4\mu}\right)(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = \frac{6E\alpha}{(1+4\mu)r_0}, \theta = 0. \quad (3)$$

以上三式中之各數量為

$s_1, s_2, s_3 =$ 三主應力;

$K =$ 單向應力下之屈服點 = 常數;

$\theta =$ 平均正應力,或流體靜應力 $= \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3)$;

$E =$ 楊氏彈性係數;

$\mu =$ 泊松比;

$r_0 =$ 微裂口半徑,近於嵌鑲塊尺寸^[11];

$\alpha =$ 單位裂口表面上之自由能。

(2), (3) 兩式各適用於所指之應力狀態。(1), (2), (3) 三式同屬於下列集體類型:

$$(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 2k(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = A^2, \quad (4)$$

各有表 1 中所示之常數值。顯然 (4) 式對稱於流體靜應力軸，該軸為三曲面之公共對稱軸。如將 (4) 式轉入以此軸為一軸之任一卡氏坐標系內，則可化為

表 1.

方 程	k	A
彌氏方程 (1)	$\frac{1}{2}$	K
斷裂方程 (2)	μ	$\sqrt{\frac{2E\alpha}{r_0}}$
斷裂方程 (3)	$\left(\frac{2-\mu}{1+4\mu}\right)$	$\sqrt{\frac{6E\alpha}{(1+4\mu)r_0}}$

標準形式。命此新坐標系為 s_x, s_y, s_z ，取流體靜應力軸為 s_z ，則其他二軸在純切平面內。由此，(4) 式化為：

$$\frac{s_x^2}{\left(\sqrt{\frac{A^2}{1+k}}\right)^2} + \frac{s_y^2}{\left(\sqrt{\frac{A^2}{1+k}}\right)^2} + \frac{s_z^2}{\left(\sqrt{\frac{A^2}{1-2k}}\right)^2} = 1. \quad (5)$$

將表 1 中之各相當數值代入 (5) 式後，則 (1)，(2)，(3) 式化為以下標準形式：

$$\frac{s_x^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}K\right)^2} + \frac{s_y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}K\right)^2} = 1; \quad (1.a)$$

$$\frac{s_x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1+\mu)r_0}}\right)^2} + \frac{s_y^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1+\mu)r_0}}\right)^2} + \frac{s_z^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1-2\mu)r_0}}\right)^2} = 1, \theta \geq 0; \quad (2.a)$$

$$\frac{s_x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1+\mu)r_0}}\right)^2} + \frac{s_y^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1+\mu)r_0}}\right)^2} - \frac{s_z^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1-2\mu)r_0}}\right)^2} = 1, \theta \leq 0. \quad (3.a)$$

可見三式均為迴轉曲面。都知道彌氏方程為一圓柱，柱軸為流體靜應力軸，半徑為 $\sqrt{\frac{2}{3}}K$ 。兩斷裂方程，為同族橢圓曲面與單葉雙曲面，兩者有效部份在純切平面上相接為一連續鐘形曲面，以後逕稱之為“斷裂鐘面”。彌氏圓柱與斷裂鐘面在

$$s_z = \sqrt{2 \left(\frac{1+\mu}{1-2\mu} \right) \left[\frac{E\mu}{(1+\mu)r_0} - \frac{K^2}{3} \right]}$$

處交於一圓，圓上部份在本問題中有特殊意義，以後逕稱之為“鐘蓋”。兩斷裂面之公共長短徑比為：

$$\frac{c}{a} = \sqrt{\frac{1+\mu}{1-2\mu}}. \quad (6)$$

由此可繪出曲面，不一定要知道 r_0 及 α 數值，而這兩數值，也缺少記錄。

此外，尚有三個有意義的曲面，各描寫一類變形過程。其一為以鐘蓋底圓為底圓之圓椎面，如以後將指出，可稱之為“脆裂椎”，其方程為

$$(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 2 \left(\frac{m^2 + 1}{2m^2 - 1} \right) (s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = 0 \quad (7.a)$$

或

$$\frac{s_x^2}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \frac{s_y^2}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} - s_z^2 = 0, \quad (7.b)$$

其中

$$m = \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{1-2\mu} \right) \left[-\frac{3E\alpha}{(1+\mu)r_0 K^2} - 1 \right]}. \quad (7.c)$$

其二為純切面，即 $\theta = 0$ 之平面：

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0. \quad (8)$$

其三為(2)式單葉雙曲面之漸近椎，如以後將指出，此椎可稱之為“不裂椎”，其方程為

$$(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 2 \left(\frac{2-\mu}{1+4\mu} \right) (s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = 0, \theta \leq 0; \quad (9.a)$$

或

$$\frac{s_x^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{1+\mu}}\right)^2} + \frac{s_y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{1+\mu}}\right)^2} - \frac{s_z^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{1-2\mu}\right)^2}} = 0, \theta \leq 0. \quad (9.b)$$

以上六曲面間之關係，如圖 3 所示。

三. 固體的現實應力空間

根據前文及以上分析，並根據以下補充論證及第四節中之討論，現在對固體在恆溫狀態下之現實應力空間，提出以下初步具體意見：

固體在恆溫狀態下之現實應力空間為一封閉鐘形，對稱於流體靜應力軸，始於原點，終於兩邊限曲面：斷裂鐘面與在純壓力象限中之一邊限曲面，並為下列各部份所構成：

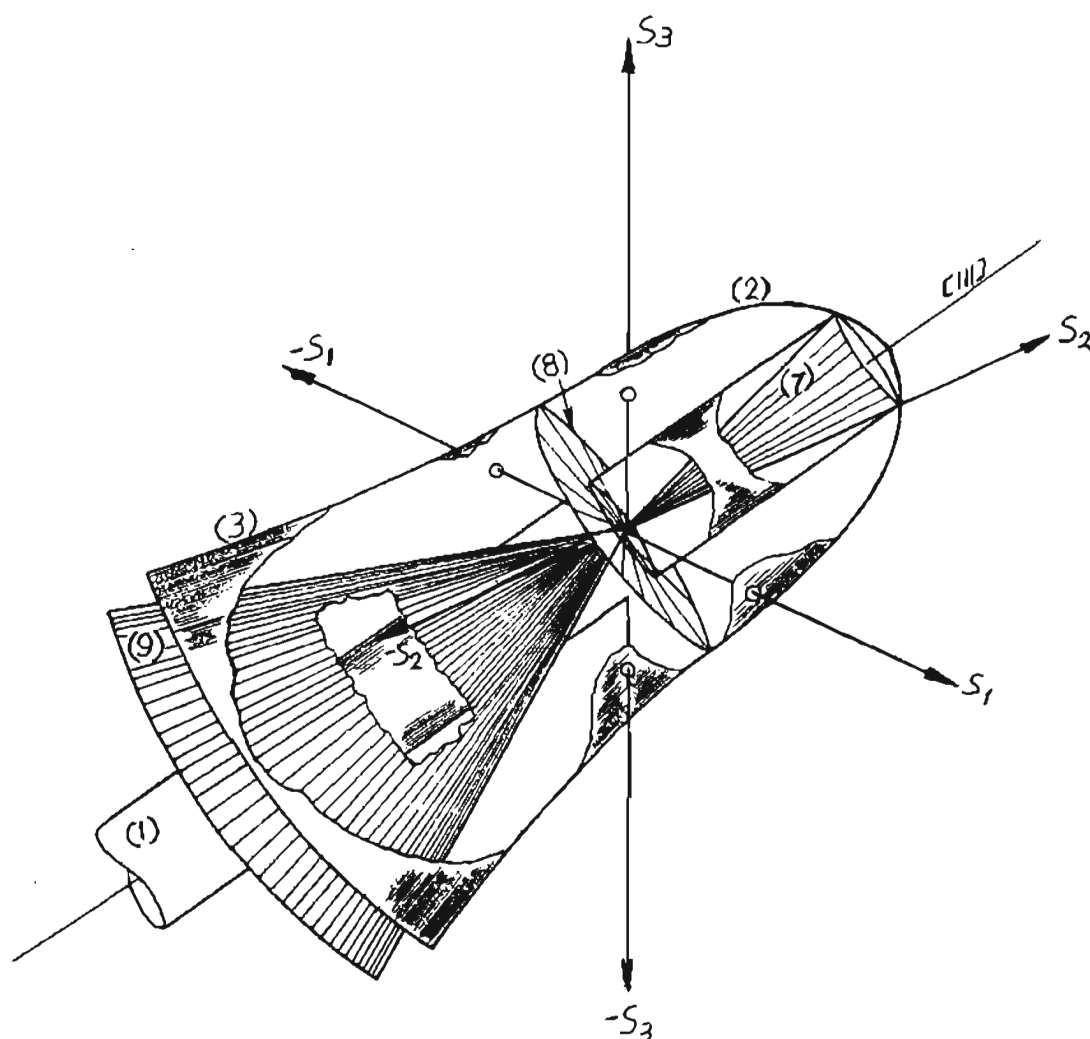


圖 3. 恆溫條件下固體現實應力空間之構造。

- | | | |
|-------------|---------|---------------------|
| (1) 彌氏圓柱面 | (7) 脆裂椎 | (1)(2)(3)(7)(8)(9)為 |
| (2) 橢圓斷裂曲面 | (8) 純切面 | 公式序數 |
| (3) 單葉雙曲斷裂面 | (9) 不裂椎 | |

- 1) 勢能最低狀態：原點，一切變形過程之起點；
- 2) 彈性柱：鐘蓋以下及壓力象限內一未知曲面間彌氏圓柱內之一切應力狀態，固體之彈性變形及彈性體積變化發生於此柱內之應力狀態下；
- 3) 塑性區域：斷裂鐘面，未知曲面與彌氏圓柱間之一切應力狀態，固體之塑性變形發生於此內之應力狀態下；
- 4) 斷裂鐘面：一切可裂變形過程之終點，固體之斷裂發生於鐘面上之應力狀態下；
- 5) 未知曲面：在純壓象限內，為工具與受力體間之相互關係所決定，在此面上，受力體之變形停止而不斷裂(詳見第四節)。

除前文計算而外，現在對上述理論提出以下論證：

本文中提出“現實”二字，意在於，在應力坐標所描寫之空間中，斷裂曲面以外的一切應力狀態，不具備任何現實意義，在未發現任何物理現象足以證明固體能在一切應力狀態下無限受力而不斷裂以前，只能認為一切有現實意義的應力狀態，不能超越斷裂曲面，至於斷裂曲面是否本文中所提的鐘面，又是另外一個問題。不過，從許多熟知的事實和物理概念，知道斷裂曲面必須滿足某些具體條件，而前文中所算出之斷裂鐘面，滿足這些條件。茲分述如次：

由晶體物理的基本觀念^[10]，當原子間的距離無限壓縮時，壓應力趨於無窮大。顯然在任何無限增加的純流體靜壓力下，斷裂為不可能，經驗證明薄片不可能被壓斷。這些基本的理論和實驗事實，引至一個結論，即斷裂曲面在純壓力象限中不封閉，流體靜壓力軸不與斷裂曲面相交。斷裂鐘面是如此。

晶體物理的基本理論中指出了一個張力下的斷裂正應力^[10]，也還沒有經驗例子證明任何固體能無限受張力而不斷裂，這些基本理論和實驗事實引至另一個結論，即在純張力象限中，斷裂曲面必須封閉。斷裂鐘面是如此。

可以理解，固體不能無限地受到純流體靜張力，當此力達到一定數值時斷裂必能發生，這是說流體靜張力軸只能與斷裂曲面交於一點。斷裂鐘面是如此，此點之流體應力 θ_m 為：

$$\theta_m = \sqrt{\frac{2 E \alpha}{3 (1 - 2 \mu) r_0}} .$$

如另一作者所指出而未算出^[11]的，在均勻連續體的基礎上，由於三主方向上

之性質相同，斷裂曲面必須對稱於流體靜應力軸。斷裂鐘面亦復如此。

根據以上論證，並因斷裂鐘面係由熱動力學基本關係算出，同時由斷裂鐘面與彌氏圓柱構成之應力空間，如下節所述，能反映一些到現在為止其他學說所不能反映的事實，並在前文中證明了所得公式大體上符合實驗記錄，在壓力下和實驗記錄很接近。因此，我們的初步意見，以為斷裂鐘面能描寫現實應力空間的斷裂外限。

關於鐘形應力空間的組成部分，除未知曲面在下節討論外，情況是夠明顯的。無須解釋。但有一名詞問題，內中之“塑性區域”，意味“彈塑性區域”，前一類名詞應用較廣，本文不擬改變。

鐘形應力空間的構造具有一些性質，特別能幫助了解各種應力狀態下的塑性及各種變形過程的特性。

一般固體力學所討論的變形問題，多屬於固定應力狀態下的變形過程，這種過程的特性，在鐘形應力空間中能完整而明確地表達出來。由鐘形應力空間的對稱性與數學力學上的應力狀態組成觀念，此應力空間中任一點 P 之位置向量 R (見圖 4) 可表示為：

$$R = \vec{\sigma} + \vec{\tau}, \quad (10)$$

$$R = [s_1, s_2, s_3], \quad |R| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2};$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} (s_1 + s_2 + s_3) = \sqrt{3} \theta, \quad (11)$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2} = \sqrt{3} \tau, \quad (12)$$

$$\tau = \frac{1}{3} \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2} = \text{八面切應力}. \quad (13)$$

顯然， $\sigma^2 + \tau^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = |R|^2$ 。

第 (10) 式中之向量 R 有下列四項物理意義：

1) R 描寫一變形過程： $R = \vec{OP}$;

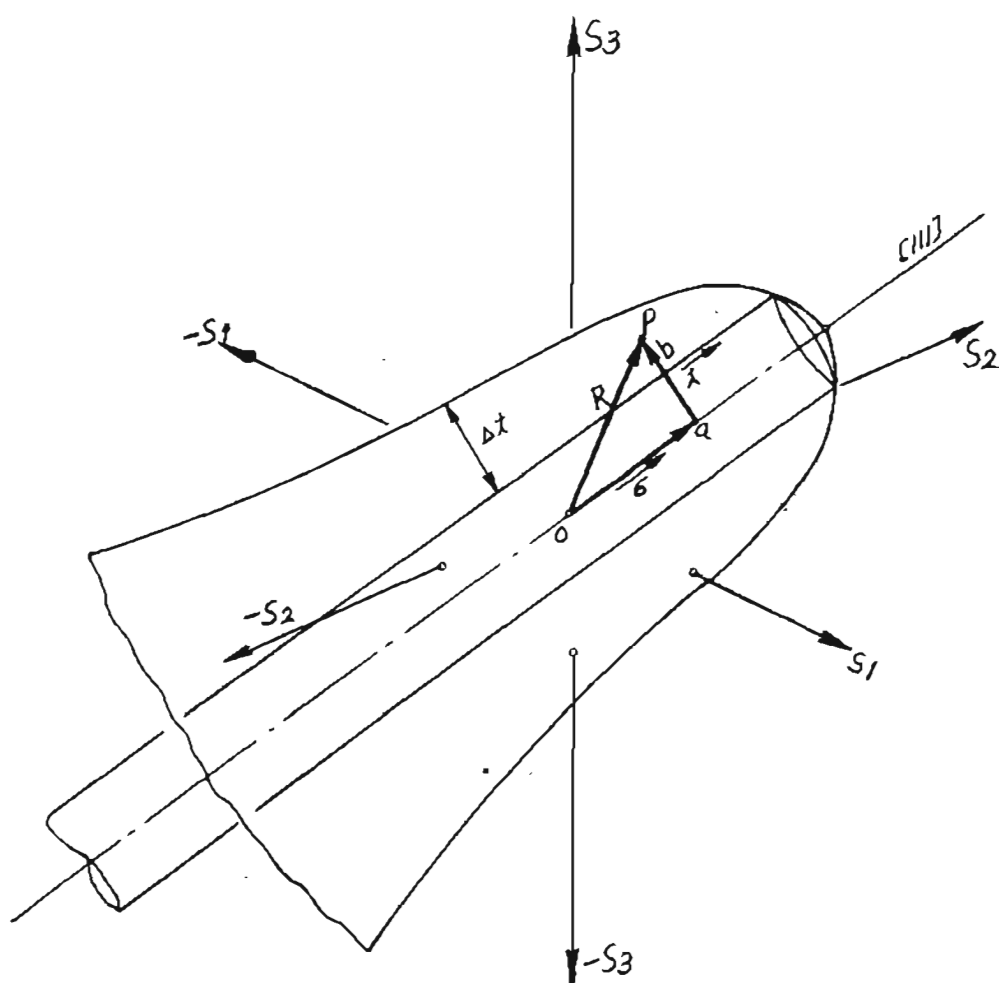


圖 4. 現實應力空間與固體變形過程。

- 2) R 描寫該過程終點之應力狀態: $R = [s_1, s_2, s_3]$;
- 3) 一變形過程為彈性體積變化與一純切變形所組成:

$$R = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$

- 4) 在一變形過程中產生彈性體變化的是 $\vec{\sigma}$ (或 $\vec{\theta}$) 而且只是 $\vec{\sigma}$ (或 $\vec{\theta}$);
產生形狀變化的是 $\vec{\tau}$ (或 $\vec{\tau}$) 而且僅僅是 $\vec{\tau}$ (或 $\vec{\tau}$).

由於這些特性, 以後提到 (10) 式時就意味這些殊性, 或簡稱該式為變形過程。如命 $\mathbf{i}$ 為 $\vec{\tau}$ 方向上之單位向量, 則變形過程之階段性可統一以變形過程本身 R 表示之:

$$R \cdot \mathbf{i} = \text{階段邊限曲面之迴轉半徑。}$$

由此，塑性變形條件為：

$$R \cdot i = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \dots \quad (1.c)$$

斷裂條件為：

$$R \cdot i = \sqrt{\frac{2 E \alpha}{r_0} \pm \left(\frac{1-2\mu}{1+\mu} \right) \sigma_f^2}, \quad \begin{cases} (+) \text{---} \theta \leq 0, \\ (-) \text{---} \theta \geq 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.c) \\ (3.c) \end{matrix}$$

在以上及以下各式中，“f”及“0”兩應力或向量註號各意味“斷裂”與“彈性”。

更重要的，是由(10)式可引至“塑性因數”的觀念。任一斷裂變形過程均可表示為：

$$R_f = (\vec{\sigma}_f + \vec{\epsilon}_0) + \Delta \vec{\epsilon}. \quad (14)$$

在此斷裂變形過程中， $\vec{\sigma}_f$ 為 R_f 之流體靜分量， $(\vec{\epsilon}_0 + \Delta \vec{\epsilon})$ 為 R_f 之純切分量。由這幾個向量的性質，可以推出以下結論：在整個變形過程中， $\vec{\sigma}_f$ 只產生彈性體積變化， $\vec{\epsilon}_0$ 只產生彈性切變形，因而塑性變形的產生完全是由於 $\Delta \vec{\epsilon}$ 而且僅僅是由於 $\Delta \vec{\epsilon}$ 。所以物體種類及變形條件(溫度速度)一定時， $\Delta \epsilon$ 之數值衡量塑性，可稱之為“塑性因數”。因為不但要作這樣一個結論，而且要用這結論去解釋問題，所以得進一步加以明確。

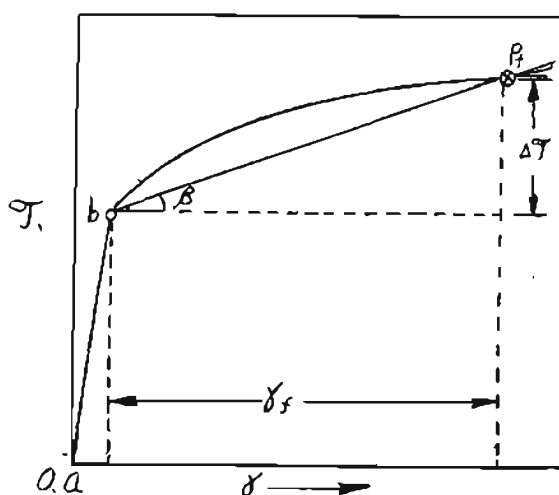


圖 5. 普遍應變硬化曲線[11]。

根據普遍應變硬化曲線的理論， τ - γ 曲線不受應力狀態之影響^[11]，也就是說，在圖 5 中，如此曲線為一直線（有些金屬是如此，例如磷青銅），則應變硬化率 $\tan \beta$ 不隨應力狀態變化，因此，斷裂時達到之塑性變形量 γ_f ，在一切應力狀態下均為：

$$\gamma_f = \frac{\Delta \tau}{\tan \beta} = \frac{\Delta \epsilon}{\sqrt{3} \tan \beta} \quad (15)$$

可見 $\Delta \epsilon$ 與 γ_f 成比例。如 τ - γ 曲線不為直線，則按照此曲線之普遍性， $\Delta \tau$ 降低時，斷裂點 P_f 沿普遍曲線降低，故 γ_f 降低，也就是說， $\Delta \epsilon$ 與 γ_f 間仍有同向變化之函數關係。因此，不管 τ - γ 曲線之形狀如何， $\Delta \epsilon$ 總是衡量塑性，故可稱之為“塑性因數”：

$$\Delta \epsilon = (\text{兩邊限曲面間之迴轉半徑差}) = \text{塑性因數}, \quad (16)$$

而 $\Delta \epsilon$ 之大小，在鐘形應力空間之縱切面上是一目瞭然的，因此，由塑性因數的觀念與此縱切面可以看出各種應力狀態下之塑性。

四. 各種變形過程

由鐘形應力空間之構造及其切面分析可以了解各種變形過程的特性及塑性變化規律。

首先研究圖 3 所反映的情況。

1. 脆裂椎：此椎內之一切變形過程均不與彌氏圓柱相交，此區域內之塑性因素 $\Delta \epsilon_0$ 為：

$$\Delta \epsilon_0 = 0$$

變形過程由彈性變形直接過渡到斷裂，故可稱此椎為脆裂椎。脆裂椎之大小及倒正，視物體之種類而定。非金屬固體在純張力下多半是脆的，故其脆裂椎之底最高只能在

$$s_1 + s_2 + s_3 = K$$

平面上，甚至可能成為倒椎（底向下），因為此類物體往往須要在很高流體靜壓力下才表現微小塑性。

2. 張力塑裂過程：在脆裂椎與純切面間一切變形過程，均經圓柱面而終於

斷裂面，塑性按流體靜張力之減少而增加，此區域內之塑性因數 $\Delta \epsilon_1$ 為：

$$\Delta \epsilon_1 > \Delta \epsilon_0 = 0.$$

3. 純切平面：此面上之一切變形過程中無體積變化，由切變形引致斷裂，其塑性因素 $\Delta \epsilon_2$ 又較張力塑裂過程為大：

$$\Delta \epsilon_2 > \Delta \epsilon_1 > \Delta \epsilon_0 = 0.$$

4. 壓力塑裂過程：純切面以下不裂椎以上之一切變形過程，包括許多工業中的金屬變形過程，此類變形過程之塑性因素 $\Delta \epsilon_3$ 為：

$$\Delta \epsilon_3 > \Delta \epsilon_2 > \Delta \epsilon_1 > \Delta \epsilon_0 = 0.$$

由上式可見，沿流體靜應軸而下，塑性逐漸增加。這個觀念是許多實驗事實所證明的，勿須贅述。

5. 不裂椎：此椎內一切固定變形過程均不與斷裂面相交，即不生斷裂。此椎內之塑性完全視所能施於固體之壓力而定。在此，牽涉到另一個重要的問題，即現實應力空間在純壓力象限內是否封閉的問題。前面討論過，斷裂曲面在此象限中必須是不封閉。然而，這並不等於說，應力空間不封閉，因為在不斷裂的變形過程中，有變形是否能無限發展的問題存在。在理論上，固然壓力增加，變形必然增加。然而在現實上，壓力到底能增加到什麼程度，又是另一個問題。在這個問題上，蘇聯學者巴甫洛夫（Иг. М. Павлов）的學說^[12]有重要意義，如下所述，根據巴氏學說，可以推論出一個結論，證明這部分應力空間必須封閉。

這問題涉及受力體與作用體間的相互關係。如受力體為非剛體而作用體為絕對剛體，則此部分應力空間為無限伸展。但絕對剛體不存在，一切現實固體所作的施力工具本身也產生變形和斷裂。在金屬壓力加工中工具與加工件間之相互關係方面，巴甫洛夫的分析原則和結論是完全正確的。巴甫洛夫在此問題上的分析路線，自然地延伸到上述應力空間部分的封閉性問題中來，這是很顯然的。在純壓應力狀態下的變形體，使其變形之工具絕對不能是純壓力狀態，工具必須有某些部分受張力和彎力，例如施高流體靜壓力於金屬的封閉工具壁中必須有環張力，一般壓力加工機械中都受彎力。根據本文理論，一切有張應力的變形過程都在不裂椎外，都終於斷裂面。因此，工具的斷裂，肯定了被壓固體在不裂椎內不能無限受力。也就是說，在現實意義上，不裂椎內的一切位置向量 R 均不

能無限伸長。因此,這部分應力空間,在現實上是封閉的。至於封閉情況、封閉規律如何,這是須待研究的一個問題。但此未知曲面之存在則是現實的。這問題不但有理論上的原則意義,而對於工業實際,也是一個重要問題。

顯然,上述理解和觀點的正確性是毫無疑意的。有一些現實的例子存在着。軋軋金屬片的工作者都很熟悉,他們的問題是軋子斷而不是金屬片斷!其實,不裂椎內變形過程之停頓,尚在工具斷裂以前。根據巴甫洛夫的學說,只要工具彈性變形與受力體彈性變形之和等於受力體之受最大壓力尺寸時,受力體之塑性變形即不可能。

6. 純體積變化過程: 即 $[-1, -1, -1]$ 軸, 在此軸上, 既無任何切變形, 亦無斷裂。

現在,通過鐘形應力空間之剖面分析,來理解一些典型變形過程。

首先,多晶金屬的張力試驗,前半為單向張力,在縮頸發生以後轉向三向張力,終於塑性因數較低的斷裂鐘面部份。這意味着,如果縮頸不發生,塑性將愈大。這雖然不是現實的,但是完全可以理解的,尤其對於材料試驗工作者是如此。

以下三類應力或應變狀態,是在力學理論與工業實際中常碰到的:

- 1) 平面應變狀態: $\epsilon_2 = 0$ (ϵ = 主應變);
- 2) 對稱應力狀態: $s_2 = s_3$, (或 $s_1 = s_2$, 或 $s_3 = s_1$);
- 3) 各種 $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ 比之三向應力狀態; 命 $\beta = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$. (在壓力加工中, 這比例叫“相對寬展”。)

根據塑性力學理論,此三類應力狀態在應力空間中為:

- 1) 平面應變狀態: $s_1 - 2s_2 + s_3 = 0$;
- 2) 對稱應力狀態: $s_2 - s_3 = 0$;
- 3) 各種 β 數值之應力狀態: $(1 + 2\beta)s_1 - (2 + \beta)s_2 + (1 - \beta)s_3 = 0$.

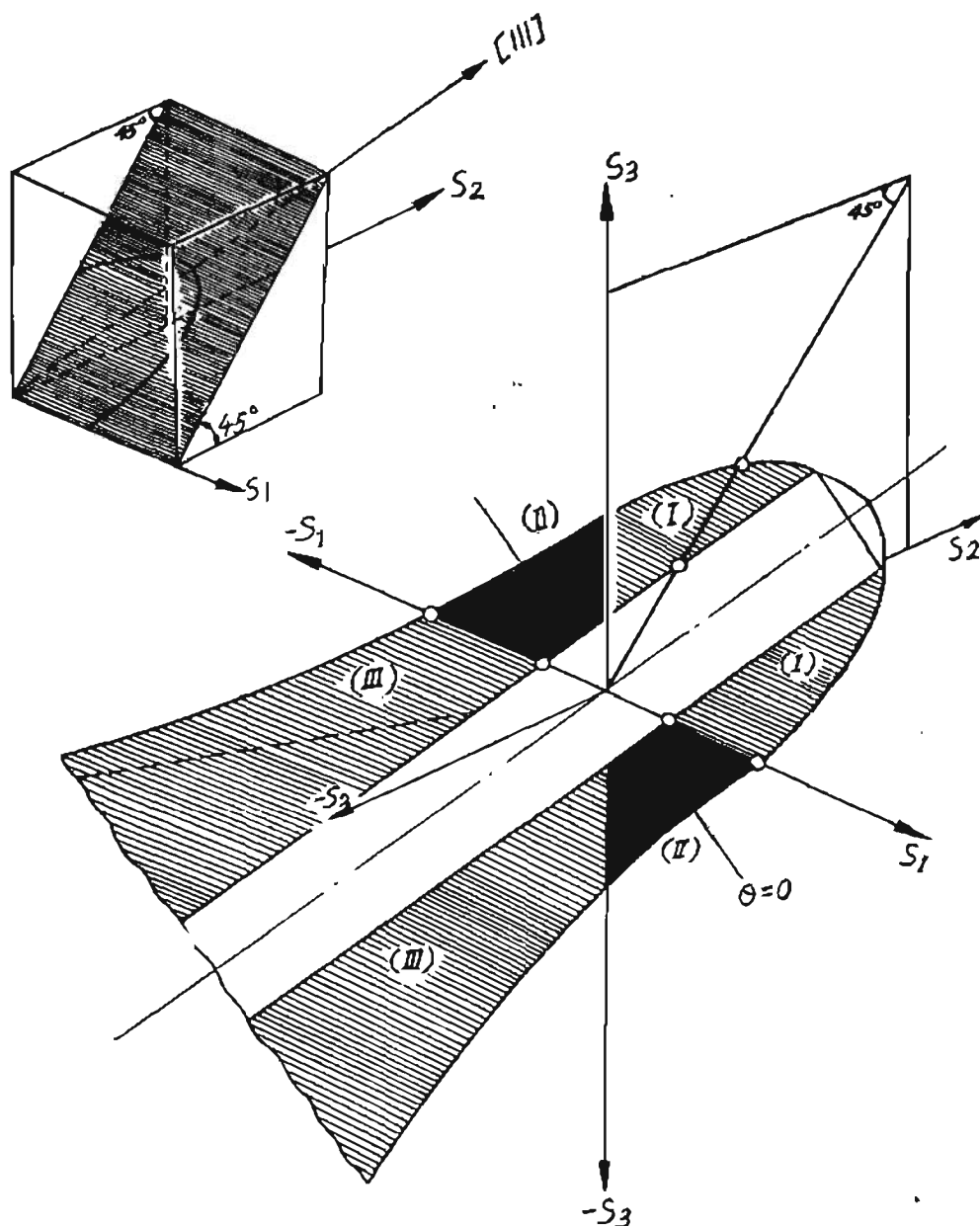
此三應力平面均通過原點,都是鐘形應力空間之縱切面。由於鐘形應力空間之迴轉對稱性,研究一個縱切面即反映此三類應力狀態之情況,如圖 6 所示 ($s_2 = s_3$)。圖中情況,表示各種變形過程之應力狀態區域及塑性大小,勿須詳加解釋,但須着重指出,工業上一切金屬壓力加工過程,除抽拔而外皆近於不裂椎或在不裂椎內。如果斷裂曲面在此象限內為封閉,則金屬壓力加工(因而整個工業)將成為不可想像。

在平面應力狀態中,現實應力平面為封閉,如圖 7 所示。但由於摩擦力之

存在，在壓力加工的問題中，沒有這種應力狀態。

現在來討論一下各種因素對鐘形應力空間形狀構造之影響：

以物體種類而言，如前已指出，脆性固體有顯然不同之鐘形應力空間。但在此須得指出，單是塑性因素 $\Delta\epsilon$ 的觀念，只足以解釋一類物體的塑性，因為



- (I) 各種張力試驗
- (II) 抽拔壓力加工過程及流體靜壓力之下張力試驗
- (III) 三向微粗軋軋擠壓等壓力加工過程，流體靜壓力下之張力及壓力試驗

圖 6. 對稱應力狀態下之各種變形過程(平面應變等與此相似)。

$$r_f = (\Delta \epsilon) \left(\frac{1}{\sqrt{3} \tan \beta} \right), \quad (15)$$

而各種固體的應變硬化率 $\tan \beta$ 不同,所以,兩種物體 $\Delta \epsilon$ 之比不等於其塑性之比,也就是說,不能用兩種物體 $\Delta \epsilon$ 之比來比較兩種物體的塑性。

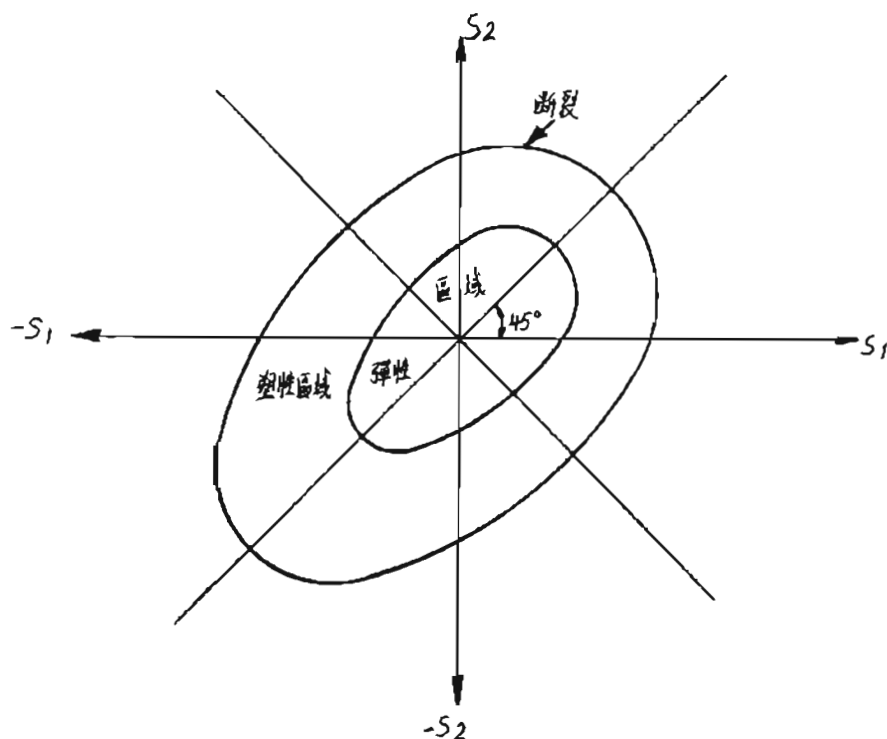


圖 7. 恆溫條件下同體之二度現實應力空間。

以溫度而言,溫度變化時,斷裂鐘面與彌氏圓柱不按比例變化,前者幾乎不受溫度影響(在離溶點較遠時),而後者之直徑 $\sqrt{\frac{2}{3}} K$ 隨溫度之升高而縮小,故溫度增加則 $\Delta \epsilon$ 增加,同時 $\tan \beta$ 降低,故塑性增加。塑性的變化趨勢是如此。至於各種脆化及不連續現象,全看該現象如何影響此二邊限曲面。

應變硬化,表現彌氏圓柱半徑之長大,按其長大之程度而消耗對應之塑性。

應變速度增加的影響,在本文的理論條件(恆溫)上,和溫度降低的影響相似。然而實際現象,可能超出恆溫條件,尤其是在高速度下是如此。高速度之影響,應該由以恆能為理論條件的學說來理解。

最後,根據本文理論,提出以下變形過程分類,如表 2 所示(參看圖 3)。

表 2. 固定應力狀態下之變形過程分類

變形過程	分類理論條件	小類別其理論分界條件
(I) 脆裂變形過程	脆裂面及其內之一切變形過程	a) 體積分裂過程: $[111]$ 軸, $\epsilon = 0$ b) 脆裂彈性變形過程: $0 < \epsilon \leq \sqrt{\frac{2}{3}} K$
(II) 塑裂變形過程	脆裂堆與不裂堆間之一切變形過程	a) 張力塑裂過程: ¹⁾ $\theta > 0$ b) 純切塑裂過程: ¹⁾ $\theta = 0$ c) 壓力塑裂過程: $\theta < 0$
(III) 不裂變形過程	不裂堆及其內部一切變形過程	a) 塑性壓力變形: $\epsilon > \sqrt{\frac{2}{3}} K$ b) 彈性壓力變形: $0 < \epsilon \leq \sqrt{\frac{2}{3}} K$ c) 彈性體積壓縮: $-[111]$ 軸, $\epsilon = 0$

¹⁾ 在非金屬脆性固體的應力空間構造中,可能無此類變形過程。

五. 結 論

根據前文及本文之分析,現在對現實應力空間問題提出以下初步意見,以供有關研究工作者考慮:

1. 在恆溫狀態下,固體之現實應力空間為一封閉鐘形,始於原點,終於兩邊限曲面:(i) 斷裂鐘面;(ii) 壓應力象限中之一未知曲面,為受力體與作用體之相互關係所決定。整個空間對於流體靜應力軸,為下裂部分所組成:

- 1) 原點: 勢能最低狀態,一切變形過程之起點;
- 2) 彈性柱: 斷裂鐘面與另一未知外限間彌氏圓柱中之一切應力狀態,固體在其中的應力狀態下只發生彈性變形;
- 3) 塑性區域: 彌氏圓柱與斷裂鐘面及未知曲面間之一切應力狀態,固體在其中的應力狀態下發生塑性變形(及彈性變形);
- 4) 斷裂鐘面: 固體在其上之應力狀態下發生斷裂;

5) 未知曲面：在純壓力象限內，固體在此曲面上之一切應力狀態下，由於作用體與受力體間之相互關係而變形停止。

2. 現實應力空間中有下列三邊應力狀態條件：

1) $R \cdot i = \sqrt{\frac{2}{3}} K$ ，塑性變形開始；

2) $R \cdot i = \sqrt{\frac{2Ea}{r_0} \pm \left(\frac{1-2\mu}{1+\mu}\right) \sigma_i^2}$ $\begin{matrix} (+) - \theta \leq 0 \\ (-) - \theta \geq 0 \end{matrix}$ ，斷裂；

3) 未知曲面，為工具與受力體間之關係所決定。

3. 物體及變形條件(溫度、變形率)一定時，彌氏圓柱與斷裂鐘面間之迴轉半徑差 Δr 衡量塑性，可稱為塑性因數。

4. 固定應力狀態下之變形過程，應按照現實力之空間之組成及性質分類，見表 2。

5. 尚須進一步分析的問題：

1) 恆能態狀態下的應力空間；

2) 工具與受力體間相互關係所決定之邊限曲面。

6. 對於固體的現實應力空間提出一個明確合理的概念，本文是第一次。

參 考 文 獻

- [1] 劉叔儀，金屬的恆溫斷裂條件 (1951 年 8 月投稿)。物理學報，9 (1953)，275—293。
- [2] Фридман, П. В., *Единая Теория Прочность*. Оборонгиз, 1943.
- [3] Кубкин, С. И., *Теория Обработки Металлов Давлением*, стр. 172 и 191. Москва, 1947.
- [4] Dorn, J. E., Effect of stress states on fracturing, *Fracturing of Metals*. ASM, 1947.
- [5] Gensamer, M., Strength of Metals under combined stress states, *ASM*, 1940, p. 10.
- [6] Ros und Eichinger, Versuche zur Klärung der Bruchgefahr, III, *Metalle*. 1929.
- [7] Von Kármán, 見 Van Iterson, *Engineering Plasticity*, p. 133. London & Glasgow: Blackie & Son Ltd. (本文所用記錄 [6], [7], [8], [9], 來自此書)。
- [8] Ros und Eichinger, 見 [7]。
- [9] Ros und Eichinger, 見 [7]。
- [10] Иоффе, А. Ф., *Физика Кристаллов*.
- [11] Nadai, A., Plastic behaviors of metals in the strain-hardening range. *J. Appl. Phy.* 1937.
- [12] Павлов, Иг. М., *Теория Прокатки*, стр. 117—133. Москва, 1950.

ON THE REALISTIC STRESS SPACE OF SOLIDS

LIU SHU-I

(Peking Iron & Steel Institute of Technology)

ABSTRACT

Solids can not be infinitely stressed under all stress states, thus only certain portion of the stress space has significance for solids. The shape, size and structure of this portion of stress space is closely connected with the mechanical properties of solids. By "realistic stress space of solids", is meant this portion of the stress space. Although some aspects of this problem had been investigated by some authors, there exists even no definite concept regarding the shape, structure and properties of the realistic stress space of solids up to this date.

The conclusions obtained by the author in a previous paper⁽¹⁾ provides a possibility to make a first study on this problem. This is done by connecting these conclusions with Von Mises's equation of plasticity which can be written in any Cartesian system with the hydrostatic axis as s_x -axis:

$$\frac{s_x^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}K\right)^2} + \frac{s_y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}K\right)^2} = 1. \quad (1)$$

The isothermal surface of rupture obtained in the previous paper can be written in the same system as:

$$\frac{s_x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1+\mu)r_0}}\right)^2} + \frac{s_y^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1+\mu)r_0}}\right)^2} \pm \frac{s_x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1-2\mu)r_0}}\right)^2} = 1, \begin{cases} (+) \text{ for } \theta \geq 0, \\ (-) \text{ for } \theta \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

where

E =Young's modulus of elasticity;

α =surface free energy per unit area of the existing crack;

r_0 =radius of the existing crack;

K =yielding point of the solid in uni-axial stress;

$$\theta = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3)$$

s_1, s_2, s_3 =principal stresses;

μ =Poisson's ratio.

The yielding surface (1) is a cylinder with the hydrostatic axis as long axis, and the effective parts of the surface of rupture form a bell-like surface of revolution co-axial with the cylinder, termed as "the bell surface of rupture". The bell surface intersects with the cylinder in a circle, the portion of the bell surface above the intersecting circle is termed as "the bell-crown."

Besides, there are still another three surfaces of significance, that is, the brittle cone which is the cone passing through the base circle of the bell crown; the plane of pure shear which is the plane $\theta=0$ and the non-fracturing cone which is the asymptotic cone of the lower portion of the bell surface.

The question as to how far the realistic stress space extends in the octant of pure compression can only be qualitatively answered at present. Because infinite process of deformation under infinitely growing pressure could occur only if the acting instruments were absolutely rigid bodies, the realistic stress space should be bounded by some not yet known surface defined by the mutual relation between the deforming and the deformed bodies.

The above surfaces are the limiting surfaces of the realistic stress space of solids. The significance of this space becomes obvious when various processes of deformation are considered in connection with it. A process of deformation under constant stress state is described by a position vector R of a point P in the realistic stress space:

$$R = \vec{OP} = [s_1, s_2, s_3] = \vec{\sigma} + \vec{\tau}, \quad (3)$$

where,

τ =shear component of R ,

σ =hydrostatic component of R .

R bears the following significance:

- 1) it describes a process of deformation, $\vec{OP}$;
- 2) it gives the stress states at the end of the process, $[s_1, s_2, s_3]$;
- 3) it shows that a given process of deformation is composed of a shear deformation and an elastic volume change; and
- 4) it shows that $\vec{\sigma}$ is responsible only for volume change and $\vec{\tau}$ is responsible only for shear deformation.

With the above concepts, it is possible to present a formal interpretation to the realistic stress space of solids as follows:

The realistic stress space of solids is bell-shaped, closed, and symmetrical to the hydrostatic axis, and is composed of the following parts:

- 1) The state of the lowest potential energy: the origin, which is the starting point of the process of deformation;

- 2) The elastic cylinder: the portion of Von Mises's cylinder under the bell crown and above the unknown limiting surface in the octant of pure compression;
- 3) The plastic region: all the stress states between the elastic cylinder and the bell surface of rupture;
- 4) The bell-surface of rupture: all the stress states under which rupture occurs in solids; and
- 5) The non-fracturing limiting surface to be defined by the mutual relation between the deforming and the deformed bodies.

It is understood that elastic and plastic deformation of solids occurs under the stress states in the above mentioned elastic and plastic regions.

The above picture agrees with the well-known facts and physical principles regarding the strength properties of solids, and brings out the concept of "factor of plasticity" Δt :

$$\Delta t = t_f - t_0, \quad (4)$$

where t_f is the value of t at the bell surface of rupture, and t_0 is the radius of Von Mises's cylinder. Because Δt is responsible only for plastic deformation, and for a given solid under a given temperature and a given strain rate, the ductility of the solid is measured by Δt and the rate of strain hardening which is independent of stress states according to the modern theory of strength, thus Δt can be termed as "factor of plasticity". By this concept, the ductility of solids under various stress states can be predicted by the central section of the bell of stress space, and the predictions agree with the well-known facts on of ductility of solids under various stress states.

According to the above concepts, the processes of deformation should be logically classified as follows:

- 1) Brittle deformation: any vectorial process of deformation within the brittle cone does not intersect with the yielding cylinder, but directly ends on the bell crown; this leads to brittle rupture.
- 2) Ductile deformation ending rupture: any vectorial process of deformation between the brittle cone and the non-fracturing cone intersects both the yielding cylinder and the bell surface of rupture, and ends with definite amount of ductility defined by the corresponding value of the factor of plasticity. Such processes can be subdivided into three groups:
 - a. ductile tensile deformation,
 - b. shear deformation,
 - c. compressive deformation.
- 3) Non-fracturing process of deformation: all vectorial process of deformation within the non-fracturing cone fail to intersect with the bell surface of rupture, in such processes of deformation, a solid can undergo as much plastic deformation or elastic deformation or volume change as the deforming instrument permits.

All technical processes of deformation find their vectorial path in the realistic stress space, such processes are as material testing, shearing operations, and the most important of all, plastic forming of metals. In the last group of deformation processes, metals had been found to be able to undergo deformation without the possibility of rupture in some cases; it is the theory of this paper that provides a formal interpretation to this phenomenon.

In conclusion, it can be stated:

That the present theory provides the first definite and clear concept on the shape, structure and properties of the realistic stress space of solids; and

That the predictions of the present theory agree with the well-known concepts and facts regarding the strength properties of solids.