

螺絲釘連結的組合樑*

顧 瑛 琳

(清 華 大 學)

一. 引 言

我們已經熟悉了用相當剛度計算組合樑的方法^[1],但是這種方法只能用於組成組合樑的二樑完全貼合在一起,也即只能適用於二樑變形完全相同的情況,對於用只有若干個螺絲釘連結的組合樑,顯然是不能適用的。本文將提供一解決螺絲釘連結的組合樑問題中計算螺絲釘處集中力及每一樑中彎矩的簡便方法。

二. 螺絲釘處集中力的計算

今有一組合樑,它是用螺絲釘把前後安置的二樑 I 及 II 連結起來而組成的,所受載荷及支點情況是任意的,假如是圖 1 中所表示的:

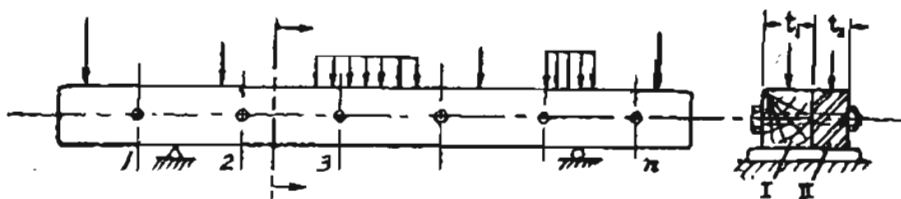


圖 1.

設載荷在樑 I 及樑 II 上有一定的分配比例,就是說,如果總的載荷是 1 的話,在樑 I 上的載荷是 $1-k$, 在樑 II 上就是 k 。譬如載荷在樑的寬度上成均勻分佈情形,則每一樑所受的載荷與其寬度成正比,或者可以這樣表示:

*1954 年 3 月 14 日收到。

$$\left. \begin{aligned} 1-k &= \frac{l_1}{l_1+l_2}, \\ k &= \frac{l_2}{l_1+l_2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

此處 l_1 及 l_2 分別是樑 I 及 II 的寬度。

設樑用 n 個螺絲釘連結起來，自左至右分別以 $1, 2, 3, \dots, n$ 表示。現在我們把二樑分開來看，在每一螺絲釘處分別以 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 的集中力表示螺絲釘的作用。這樣我們得到如圖 2 的樑 I 及樑 II：

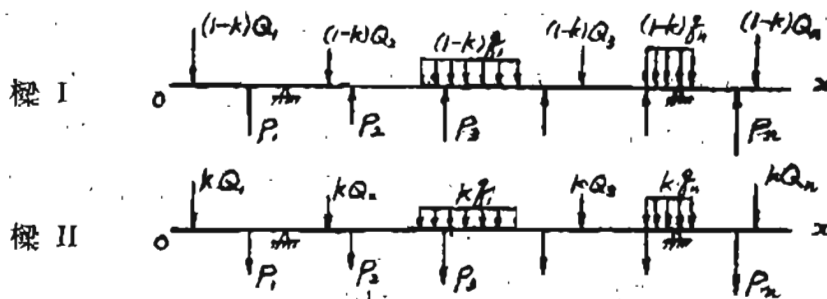


圖 2.

現在我們的問題是要找出各螺絲釘處集中力 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 的值，從而計算每一樑中的最大彎矩，並根據這些來設計螺絲釘及樑的尺寸。

求 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 的基本方法是這樣：分別對樑 I 及樑 II 計算該樑在螺絲釘 $1, 2, 3, \dots, n$ 處的撓曲，它們將是外加载荷 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ 及 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 的函數，然後根據樑 I 及樑 II 在每一個螺絲釘處撓曲相同的條件，列出變形一致方程。有若干個螺絲釘，或是有若干個未知力 $P_1, P_2, \dots, P_n$ ，就有若干個變形一致方程，故可完全決定 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 。

現在我們來着手列出在螺絲釘 1 處的變形一致方程，先對樑 I 計算，可得

$$EJ y_1 = a_{11} P_1 + a_{12} P_2 + \dots + a_{1n} P_n - b_{11}(1-k) Q_1 - b_{12}(1-k) Q_2 - \dots - b_{1n}(1-k) Q_n - c_{11}(1-k) q_1 - c_{12}(1-k) q_2 - \dots - c_{1n}(1-k) q_n; \quad (2)$$

此處 EJ 是樑 I 的抗彎剛度， y_1 是樑 I 在螺絲釘 1 處的撓曲， $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}, c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}$ 均為常數，決定於樑上受力（包括外加载荷、螺絲釘處集中力及支點反力）的位置； $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ 是外加集中載荷， $q_1, q_2, \dots, q_n$ 是外加均布載荷。

再對樑 II 計算，我們注意到樑 II 與樑 I 有完全相同的受力位置，而樑 I 中的外加载荷 $(1-k)Q_1, (1-k)Q_2, \dots, (1-k)Q_n$ 及 $(1-k)q_1, (1-k)q_2, \dots, (1-k)q_n$ 相當於樑 II 中的外加载荷 $kQ_1, kQ_2, \dots, kQ_n$ 及 $kq_1, kq_2, \dots, kq_n$ ，又樑 I 中螺絲釘處集中力 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 相當於樑 II 中螺絲釘處集中力 $-P_1, -P_2, \dots, -P_n$ 。這樣，我們得到

$$E'J'y_1 = a_{11}(-P_1) + a_{12}(-P_2) + \dots + a_{1n}(-P_n) - b_{11}(kQ_1) - b_{12}(kQ_2) - \dots - b_{1n}(kQ_n) - c_{11}(kq_1) - c_{12}(kq_2) - \dots - c_{1n}(kq_n), \quad (3)$$

此處 $E'J'$ 是樑 II 的抗彎剛度。

由於樑 I 及 II 在螺絲釘 1 處的撓曲 y_1 相同，故對 y_1 置等 (2) 式及 (3) 式，移項整理後可得

$$(EJ + E'J')(a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \dots + a_{1n}P_n) = [E'J' - k(EJ + E'J')]d_1, \quad (4)$$

此處 d_1 決定於外加载荷的大小及樑的受力位置，表示如下：

$$d_1 = b_{11}Q_1 + b_{12}Q_2 + \dots + b_{1n}Q_n + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \dots + c_{1n}q_n. \quad (5)$$

d_1 的意義可以這樣瞭解：在 (2) 式中，令

$$P_1 = 0, P_2 = 0, \dots, P_n = 0,$$

則得

$$EJy_1 = -(1-k)d_1. \quad (6)$$

所以 $-(1-k)d_1$ 就是當 $P_1 = P_2 = \dots = P_n = 0$ 時 EJy_1 的值，或者就是沒有螺絲釘時以樑 I 的彎矩為載荷的虛樑在螺絲釘 1 處的彎矩。

由 (4) 式得

$$a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \dots + a_{1n}P_n = C \cdot d_1, \quad (7)$$

此處 C 是一常數，決定於 $EJ, E'J'$ 及 k ，表示如下：

$$C = \frac{E'J' - k(EJ + E'J')}{EJ + E'J'}. \quad (8)$$

同理，可以列出在螺絲釘 2, 3, $\dots, n$ 處的變形一致方程式，它們將具有與 (7) 式相類似的形式，於是我們得到這樣一組聯立方程：

式告訴我們這對應的連續樑外加中間支點反力就分別等於 (10) 式中的 $R_1, R_2, \dots, R_n$, 再代入 (10) 式就完全可以求出 $P_1, P_2, \dots, P_n$.

這點我們還可以這樣來看：在相當於 (2) 式的諸方程中，把 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 換以 $R_1, R_2, \dots, R_n$ ，把 $(1-k)$ 換以 1，並令 $y_1=0, y_2=0, \dots, y_n=0$ ，解這組聯立方程，可以得到完全相同的結果。

這樣，我們就把組合樑的問題轉化為解連續樑的問題。一般說來，解連續樑的方法是比較簡單明瞭的。錢偉長教授有關於這方面的著作^[2]。

現在可以討論一下 C 的值 [(8) 式]：

1) 當 $k=0$ ，表示樑 II 上沒有外加载荷，則

$$C = \frac{E'J'}{EJ+E'J'}.$$

2) 當 $k=1$ ，表示樑 I 上沒有外加载荷，則

$$C = \frac{EJ}{EJ+E'J'}.$$

3) 當 $k = \frac{E'J'}{EJ+E'J'}$ ，則

$$C = 0.$$

$$\therefore P_1 = 0, P_2 = 0, \dots, P_n = 0.$$

這表示樑 I 及樑 II 在這樣的載荷分配情形下，各自自然彎曲成完全相同的形狀，所以螺絲釘處就沒有集中力產生了。

三. 彎矩的計算

螺絲釘處集中力 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 既已算出，我們就可以進一步來計算各樑中的彎矩。我們僅計算樑 I 的彎矩，樑 II 的彎矩計算方法與此相同。

回到圖 2，注意 (10) 式的關係，我們得

$$M(x) = a_1(CR_1) + a_2(CR_2) + \dots + a_n(CR_n) - b_1(1-k)Q_1 - b_2(1-k)Q_2 - \dots - b_n(1-k)Q_n - c_1(1-k)q_1 - c_2(1-k)q_2 - \dots - c_n(1-k)q_n; \quad (14)$$

此處 $M(x)$ 是樑 I 在 x 處的彎矩; $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 及 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 均為 x 的函數, 決定於樑的受力位置。

現在我們來求對應的連續樑的彎矩, 繪出這樑的簡圖, 但用 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 集中力代替各外加中間支點的作用; 令此樑為樑 I' (圖 3)。

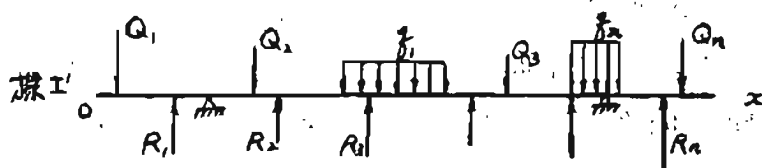


圖 3.

我們注意到樑 I' 與樑 I 的受力位置完全相同, 而樑 I 中外加載荷 $(1-k)Q_1, (1-k)Q_2, \dots, (1-k)Q_n$ 及 $(1-k)q_1, (1-k)q_2, \dots, (1-k)q_n$ 相當於樑 I' 中外加載荷 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ 及 $q_1, q_2, \dots, q_n$, 又樑 I 中螺絲釘處集中力 $CR_1, CR_2, \dots, CR_n$ 相當於樑 I' 中外加中間支點反力 $R_1, R_2, \dots, R_n$. 故可得

$$M'(x) = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \dots + a_n R_n - b_1 Q_1 - b_2 Q_2 - \dots - b_n Q_n - c_1 q_1 - c_2 q_2 - \dots - c_n q_n, \quad (15)$$

此處 $M'(x)$ 是樑 I' 在 x 處的彎矩。

從 (14) 式及 (15) 式可得

$$M(x) = (1-k) M'(x) + (C-1+k) M''(x), \quad (16)$$

此處 $M''(x) = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \dots + a_n R_n, \quad (17)$

從 (15) 式我們看到, 如果令

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_n = 0, \quad q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_n = 0, \quad (18)$$

則

$$M'_0(x) = M''(x), \quad (19)$$

此處 $M'_0(x)$ 表示在 (18) 式條件下樑 I' 在 x 處的彎矩, 也就是說, $M''(x)$ 等於樑 I' 在沒有外加載荷, 僅有外加中間支點反力 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 作用的情形下 x 處的彎矩。這可以根據基本的彎矩計算方法算出, 然後再代入 (16) 式求樑 I 的彎矩。

這方法的好處在於此: 在實用中往往是只計算最大彎矩, 而一般情形下最大彎矩產生在螺絲釘或是原有支點處, 這樣 (16) 式中 $M'(x)$ 就是樑 I' 在對應的外加中間支點或原有支點處的彎矩, 而這些彎矩的值在我們解連續樑時已經求出了。

四. 例 題

現在先看一比較簡單的例題, 分別用基本的變形一致方程及上述方法計算, 比較其結果及計算步驟。

設有一簡支螺絲釘組合樑, 樑 I 及 II 的抗彎剛度分別為 $E_1 J_1$ 及 $E_2 J_2$ 。樑 I 及 II 上各作用有強度為 q 的均布載荷。樑的長度為 $l_1 + l_2$, 在距左端 l_1 處加一螺絲釘, 求該處的集中力 P 及樑 I, II 在該點的彎矩 M_1 及 M_2 。

先用變形一致方程來解。把樑 I 及 II 分開。先看樑 I, 在螺絲釘處 A 點加一集中力 P (假設向上) 來代替螺絲釘的作用, 我們採用虛樑方法求 A 點的

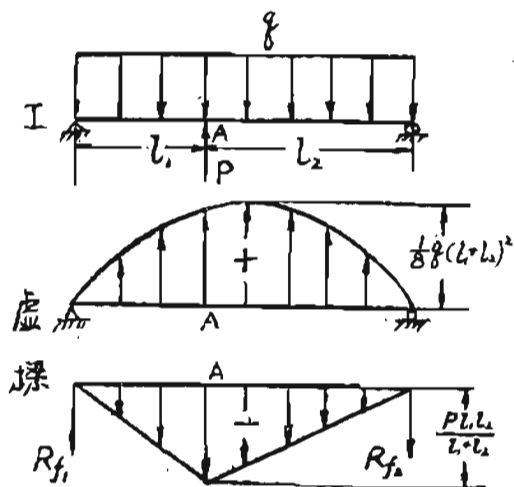


圖 4.

撓曲 (因為只求一點的撓曲, 虛樑方法要比較求變形方程為簡單)。繪出以樑 I 的彎矩為載荷的虛樑 (圖 4)。

虛樑的支反力

$$R_{f1} = \frac{1}{24} q (l_1 + l_2)^3 - \frac{P l_1 l_2 (l_1 + 2 l_2)}{6 (l_1 + l_2)}$$

虛樑在 A 點的彎矩

$$\begin{aligned} M_I &= \int_0^{l_1} \left[\frac{q(l_1 + l_2)}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right] (l_1 - x) dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{P l_1 l_2}{l_1 + l_2} \cdot l_1 \cdot \frac{1}{3} l_1 - R_{f1} \cdot l_1 \\ &= \frac{-q l_1 l_2 (l_1^2 + 3 l_1 l_2 + l_2^2)}{24} + \frac{P l_1^2 l_2^2}{3 (l_1 + l_2)} \end{aligned}$$

$$\therefore y_A = \frac{M_f}{E_1 J_1} = \frac{1}{E_1 J_1} \left[\frac{P l_1^2 l_2^2}{3(l_1 + l_2)} - \frac{q l_1 l_2 (l_1^2 + 3 l_1 l_2 + l_2^2)}{24} \right]. \quad (i)$$

同樣，再看樑 II，繪出對應的虛樑（圖 5），注意現在 A 點集中力已改換了方向（假設向下）。

虛樑的支反力

$$R'_{f_1} = \frac{1}{24} q (l_1 + l_2)^3 + \frac{P l_1 l_2 (l_1 + 2 l_2)}{6(l_1 + l_2)}.$$

虛樑在 A 點的彎矩

$$\begin{aligned} M'_f &= \int_0^{l_1} \left[\frac{q(l_1 + l_2)}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right] (l_1 - x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{P l_1 l_2}{l_1 + l_2} \cdot l_1 \cdot \frac{1}{3} l_1 - R'_{f_1} \cdot l_1 \\ &= - \frac{q l_1 l_2 (l_1^2 + 3 l_1 l_2 + l_2^2)}{24} - \frac{P l_1^2 l_2^2}{3(l_1 + l_2)}. \end{aligned}$$

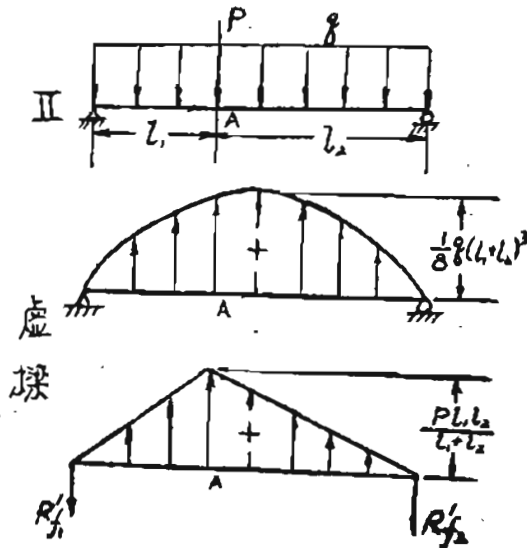


圖 5.

$$\therefore y_A = \frac{M'_f}{E_2 J_2} = \frac{1}{E_2 J_2} \left[\frac{P l_1^2 l_2^2}{3(l_1 + l_2)} - \frac{q l_1 l_2 (l_1^2 + 3 l_1 l_2 + l_2^2)}{24} \right]. \quad (ii)$$

置等 (i) 式與 (ii) 式，解出 P 得

$$P = \left(\frac{-E_1 J_1 + E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2} \right) \left[\frac{q(l_1^3 + 4 l_1^2 l_2 + 4 l_1 l_2^2 + l_2^3)}{8 l_1 l_2} \right].$$

計算樑 I 在 A 點的彎矩，得

$$M_1 = \frac{1}{2} q l_1 l_2 + \left(\frac{E_1 J_1 - E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2} \right) \left[\frac{q(l_1^3 + 3 l_1 l_2 + l_2^3)}{8} \right].$$

計算樑 II 在 A 點的彎矩，得

$$M_2 = \frac{1}{2} q l_1 l_2 - \left(\frac{E_1 J_1 - E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2} \right) \left[\frac{q(l_1^3 + 3 l_1 l_2 + l_2^3)}{8} \right].$$

現在用本文所述的方法來解。此樑相當於二跨度的連續樑，繪出載荷對可

定基所引起的彎矩圖 (圖 6)。

設 A 點支點的反力是 R_A ，列出三彎矩方程：

$$2M'_A(l_1 + l_2) = -\frac{1}{4}(2q)(l_1^3 + l_2^3).$$

$$\therefore M'_A = -\frac{q(l_1^3 + l_2^3)}{4(l_1 + l_2)}.$$

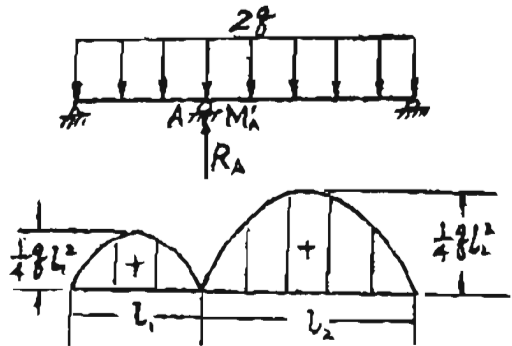


圖 6.

把二段樑分開，並分別計算 A 點的反力 (圖 7)：

$$R'_A = -\frac{1}{l_1} \left[\frac{1}{2} (2q) l_1^2 - M'_A \right],$$

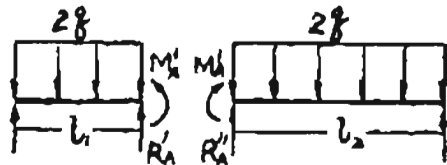


圖 7.

$$R''_A = \frac{1}{l_2} \left[\frac{1}{2} (2q) l_2^2 - M''_A \right].$$

$$\therefore R_A = R'_A + R''_A$$

$$= \frac{q(l_1^3 + 4l_1^2 l_2 + 4l_1 l_2^2 + l_2^3)}{4l_1 l_2}.$$

今 $k = \frac{1}{2}$ ，根據 (8) 式得

$$C = \frac{-E_1 J_1 + E_2 J_2}{2(E_1 J_1 + E_2 J_2)}.$$

再根據 (10) 式得

$$P = \left(\frac{-E_1 J_1 + E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2} \right) \left[\frac{q(l_1^3 + 4l_1^2 l_2 + 4l_1 l_2^2 + l_2^3)}{8l_1 l_2} \right].$$

再來計算彎矩。對於樑 I，根據 (19) 式有

$$M''_A = -\frac{q(l_1^3 + 3l_1 l_2 + l_2^3)}{8}.$$

根據 (16) 式，求得樑 I 在 A 點的彎矩

$$M_1 = \frac{1}{2} \cdot M'_A + \left(C - \frac{1}{2}\right) M''_A$$

$$= -\frac{1}{2} q l_1 l_2 + \left(\frac{E_1 J_1 - E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2}\right) \left[\frac{q (l_1^3 + 3 l_1 l_2 + l_2^3)}{8} \right]$$

對於樑 II, 由於它與樑 I 所受載荷相同, 則 M'_A 及 R'_A 均與前相同, 僅有 C 改變了符號, 故樑 II 在 A 點的彎矩

$$M_2 = \frac{1}{2} q l_1 l_2 - \left(\frac{E_1 J_1 - E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2}\right) \left[\frac{q (l_1^3 + 3 l_1 l_2 + l_2^3)}{8} \right]$$

至此計算完畢, 我們發現結果是完全相同的, 而第二種解法比第一種解法簡便很多, 並且這還是只有一個螺絲釘比較簡單的問題。

我們再來看一實際工程中的問題, 這問題是南京江南汽車公司在設計汽車車身橫欄柵時所遇到的; 這問題如用變形一致方程來解將不勝其繁, 但我們用上述方法就很方便地解決了。

有一個二端外伸中間二點支持的樑, 係用木材及角鋼藉螺絲釘連結起來, 外加載荷是在整個長度上的均布載荷 q 及二端上的集中載荷 P 。外加載荷全部作用在木樑上, 木樑及角鋼的抗彎剛度各為 $E_1 J_1$ 及 $E_2 J_2$ 。樑的尺寸及所用六個螺絲釘的安置情形如圖 8。假定裝置情形足以防止因載荷而產生的扭轉影響。



圖 8.



圖 9.

此樑相當於如圖 9 的連續樑。各支點 (包括原有支點) 自左至右以 $1, 2, \dots, 8$ 表示, 各支點上的彎矩及支反力分別以 $M_1, M_2, \dots, M_8$ 及 $R_1, R_2, \dots, R_8$ 表示。

由於對稱，我們只要解一半就行了。列出三彎矩方程：

$$\left. \begin{aligned} M_1 + 4M_2 + M_3 &= -\frac{1}{2} q a^2, \\ M_2 + 4M_3 + M_4 &= -\frac{1}{2} q a^2, \\ M_3 + 4M_4 + M_5 &= -\frac{1}{2} q a^2. \end{aligned} \right\}$$

今

$$M_1 = -Pa_1 - \frac{1}{2} q a_1^2,$$

$$M_5 = M_4.$$

故

$$\left. \begin{aligned} 4M_2 + M_3 &= -\frac{1}{2} q a^2 + \frac{1}{2} q a_1^2 + P a_1 = A, \\ M_2 + 4M_3 + M_4 &= -\frac{1}{2} q a^2 = B, \\ M_3 + 5M_4 &= -\frac{1}{2} q a^2 = B. \end{aligned} \right\}$$

解此聯立方程得

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{1}{71} (19A - 4B), \\ M_3 &= -\frac{1}{71} (-5A + 16B), \\ M_4 &= -\frac{1}{71} (A + 11B). \end{aligned} \right\}$$

分別計算各點的反力：

$$R_1 = \frac{1}{a} \left[P \left(\frac{90}{71} a_1 + a \right) + q \left(\frac{45}{71} a_1^2 + a_1 a + \frac{28}{71} a^2 \right) \right],$$

$$R_2 = R'_2 + R''_2$$

$$= \frac{1}{a} \left[P \left(-\frac{114}{71} a_1 \right) + q \left(-\frac{57}{71} a_1^2 + \frac{161}{142} a^2 \right) \right],$$

$$R_4 = R'_4 + R''_4$$

$$= \frac{1}{a} \left[P \left(-\frac{6}{71} a_1 \right) + q \left(-\frac{3}{71} a_1^2 + \frac{143}{142} a^2 \right) \right].$$

今 $k=0$, 按 (8) 式得

$$C = \frac{E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2},$$

則由 (10) 式得對應的螺絲釘處集中力

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{E_2 J_2}{a(E_1 J_1 + E_2 J_2)} \left[P \left(\frac{90}{71} a_1 + a \right) + q \left(\frac{45}{71} a_1^2 + a_1 a + \frac{28}{71} a^2 \right) \right], \\ P_2 &= \frac{E_2 J_2}{a(E_1 J_1 + E_2 J_2)} \left[P \left(-\frac{114}{71} a_1 \right) + q \left(-\frac{57}{71} a_1^2 + \frac{161}{142} a^2 \right) \right], \\ P_3 &= \frac{E_2 J_2}{a(E_1 J_1 + E_2 J_2)} \left[P \left(-\frac{6}{71} a_1 \right) + q \left(-\frac{3}{71} a_1^2 + \frac{143}{142} a^2 \right) \right]. \end{aligned} \right\}$$

這問題就計算到此地, 彎矩的計算從略。

五. 推廣及討論

本文所述的方法可以作這樣二方面的推廣:

- 1) 由任意多樑組成的螺絲釘組合樑。
- 2) 外加載荷在各組成部分上不成比例分配。

先證明第一方面。 假設考慮一由三樑組成的組合樑。 我們這樣表示螺絲釘處的集中力:

$$\text{樑 I: } P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n};$$

$$\text{樑 II: } P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2n};$$

$$\text{樑 III: } P_{31}, P_{32}, \dots, P_{3n}.$$

對於螺絲釘我們有這樣的平衡條件(略去力矩作用的影響):

$$P_{11} + P_{21} + P_{31} = 0, \quad P_{12} + P_{22} + P_{32} = 0, \quad \dots, \quad P_{1n} + P_{2n} + P_{3n} = 0. \quad (20)$$

分別計算樑 I, II 及 III 在螺絲釘 1 處的撓曲, 我們得到與 (2) 及 (3) 式相類似的三個方程。將其中任意兩個相加再代入 (20) 式的關係, 得到一新方程, 此新方程與原來方程中留下的一式聯立就得到與 (2) 及 (3) 式相類似的情形, 故可用相同方法來解, 所得結果如下:

$$\left. \begin{aligned} P_{11} &= C_1 \cdot R_1, \quad P_{12} = C_1 \cdot R_2, \quad \dots, \quad P_{1n} = C_1 \cdot R_n, \\ P_{21} &= C_2 \cdot R_1, \quad P_{22} = C_2 \cdot R_2, \quad \dots, \quad P_{2n} = C_2 \cdot R_n, \\ P_{31} &= C_3 \cdot R_1, \quad P_{32} = C_3 \cdot R_2, \quad \dots, \quad P_{3n} = C_3 \cdot R_n; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中 C_1, C_2, C_3 均為常數, 表示如下:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{k_1(E_2 J_2 + E_3 J_3) - (k_2 + k_3) E_1 J_1}{E_1 J_1 + E_2 J_2 + E_3 J_3}, \\ C_2 &= \frac{k_2(E_1 J_1 + E_3 J_3) - (k_1 + k_3) E_2 J_2}{E_1 J_1 + E_2 J_2 + E_3 J_3}, \\ C_3 &= \frac{k_3(E_1 J_1 + E_2 J_2) - (k_1 + k_2) E_3 J_3}{E_1 J_1 + E_2 J_2 + E_3 J_3}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中 $E_1 J_1, E_2 J_2$ 及 $E_3 J_3$ 分別為樑 I, II 及 III 的抗彎剛度; k_1, k_2 及 k_3 是外加載荷在三樑上的分配比例, 其他符號如前所述。

顯然, 對於由三樑以上組成的組合樑, 上述方法也是適用的。

再說明第二方面。假設考慮一由二樑組成的組合樑, 外加載荷在二樑上不成比例分配(二樑的支點情況相同)。

我們採用疊加原理, 即假設每一螺絲釘處的集中力等於樑 I 及 II 上的載荷分別加上去所產生的集中力的和。先假設只有樑 I 上有載荷, 則得

$$k = 0,$$

因而

$$C_1 = \frac{E' J'}{E J + E' J'} \quad (23)$$

j : 表示相當連續樑上的載荷是第幾樑的載荷;

P_{hi} : 表示第 h 樑在第 i 螺絲釘處的集中力;

C_{hi} : 常數, 表示如下:

$$\text{當 } h \neq j, \quad C_{hi} = \frac{-E_h J_h}{\sum_{h=1}^m E_h J_h}; \quad (29)$$

$$\text{當 } h = j, \quad C_{hi} = \frac{\sum_{h=1}^m E_h J_h - E_h J_h}{\sum_{h=1}^m E_h J_h}; \quad (30)$$

R_{ij} : 當表示相當連續樑在對應於第 i 個螺絲釘處的外加支點的反力, 此連續樑受有第 j 樑上的外加载荷, 支點包括原有支點及各螺絲釘處的外加支點。

對於外加载荷在各組成部分上成比例分配的情形, 我們有

$$R_{ij} = k_j \cdot R_i, \quad (31)$$

其中 k_j 是在第 j 樑上外加载荷的分配比例, 而

$$\sum_{j=1}^m k_j = 1. \quad (32)$$

六. 結 語

工程中時常會遇到用螺絲釘結合起來的組合樑, 譬如用鋼樑來加勁木樑的組合樑便是一例; 所用的螺絲釘數目一般是不少的, 因此如用變形一致方程來解, 則需列出如螺絲釘數目那樣多的變形一致方程, 然後再聯立求解, 這樣的計算往往是繁不堪言的。但如採用本文所述的方法, 雖在螺絲釘數目較多的情況下也不太繁。這個計算方法就是在解決南京江南汽車公司所提出的汽車車身橫欄柵的鐵木螺釘合成樑的設計問題時建立的。

本文的完成, 曾得到錢偉長教授很多的指示及胡海昌同志不少的幫助。

參 考 文 獻

- [1] Timoshenko and MacCullough, *Elements of Strength of Materials*, 第二版 (1940), 第 9 章, 第 72 節, 第 225 頁.
- [2] 錢偉長, 不均等的連續梁. 物理學報, 9 (1953), (3), 170-181.

COMPOSITE BEAMS JOINED BY BOLTS

KU CHIU-LIN

(Tsing Hua University)

ABSTRACT

In this paper, it is proved that the problem of composite beams joined by bolts can be solved in terms of certain equivalent continuous beams. The equivalent beam is specified as follows:

- 1) It consists of supports of the original beam and equivalent supports situated at the points where bolts are used.
- 2) It is loaded by the given load on the original beam.

Then the reactions at the bolts in the original composite beam are equal to a constant C times the reactions at various supports of the equivalent continuous beam. The constant is equal to

$$C = \frac{E'J' - k(EJ + E'J')}{EJ + E'J'},$$

where EJ and $E'J'$ are flexural rigidities of the first and second parts of the composite beam respectively, and k is the distributing ratio of load on the second part.

The solution of the problem is then greatly simplified.

This method can be generalized for composite beams consisting of more than two parts, on which the given load is not proportionately distributed.