

## 關於固體的現實應力空間(續)\*

劉 叔 儀

(北京鋼鐵工業學院)

### 小 引 及 提 要

前文 [1] 綜合四理論 [2], [3], [4], [5] 構成固體現實應力空間之一初步理論, 大體反映固態靜力學性質, 對金屬較對非金屬固體反映得當, 後者受範形變曲面有異於彌氏圓柱。總起來看, 前文僅涉及原則概念, 未觸及其具體問題。爲使此理論對金屬壓力加工及材料試驗研究有所幫助, 本文進一步研究幾個問題:

- 1) 由應力空間圖形比較不同金屬的靜力學性質;
- 2) 受範形變效率及其計算;
- 3) 形變過程之軌跡;

並得到一定數量或質量上的結論。

同時, 附帶對前文 [1] 中一個實驗記錄圖的錯誤作修正, 包括在附錄內。

### 一. 由應力空間圖形比較不同金屬的靜力學性質

各種金屬的靜力學性質, 由應力空間圖形之比較可得一全面明確概念。構繪此圖須有系統化實驗資料; 除少數情況外, 現有資料之應力範圍均不足構繪此圖。作爲一些典型例子, 現在根據或多或少的實驗記錄構繪幾種金屬的空間圖形以作比較。圖 1, 2, 3 爲所據資料之一部分, 除圖 3(A) 外, 各圖實線爲理論曲線<sup>[2]</sup>。其餘零散資料及圖形構繪見附錄。繪成圖形見圖 4。

在圖 4 中, 磷青銅及灰口鑄鐵的實驗根據較爲充分, 其他三圖不準確, 但根據零散數據, 實際尺寸亦與此相差不遠, 而五圖相對關係大體正確。這些圖大體上描寫這幾種金屬的相對特性。

最能描寫一個金屬靜力強度和受範性的是它應力空間圖的體積和構造特點。

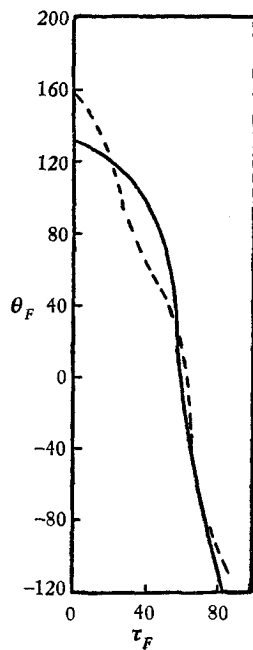
\* 1954 年 4 月 20 日收到。

磷青銅應力空間體積大，受範性區域極寬裕，為高強度兼高受範性合金之典型。此類金屬之韌性（強度與受範性之乘積）很高，能負擔三向張力及集中應力。

灰口鑄鐵應力空間甚小而受範性亦有限。故灰口鑄鐵機件一般得用笨重尺寸，且僅安全使用於壓應力狀態。白口鑄鐵應力空間既不大，復無張力受範性區域，為脆性合金之典型。

銅和軟鋼略相似，僅受範性區域較大。這些合金，都有充分受範性，強度雖不突出，但能負擔三向張力與集中應力。

過去的材料試驗並非為構繪應力空間圖形而作。很顯然，一個這樣的圖形和一條普遍應變硬化曲綫，大體上記錄了一個金屬在一定溫度下的全部靜力學性質。二者不但提供了解金屬性質的基本資料，而且前者可作設計根據，後者則提供受範性力學理論分析所需之物理方程（應力應變函數）。沒有這些資料，不能算是掌握了金屬的靜力學性質。至於圖形是否準近於鐘形，還不是基本的實際問題。不幸，從現有資料中，仍然整理不出許多全套系統化的基本資料來。

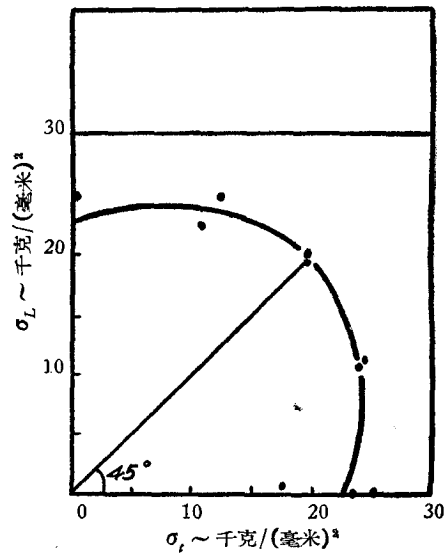


單位：  $7.038 \times 10^{-4}$  千克/(毫米)<sup>2</sup>

$\tau_F$  = 八面切應力

$\theta_F$  = 八面切應變

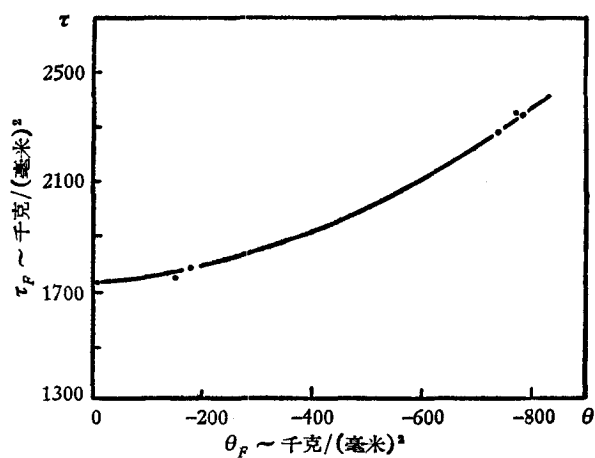
圖 1. 磷青銅之三向應力斷裂實驗結果<sup>[2]</sup>  
(實綫——理論曲綫；  
虛綫——實驗曲綫)。



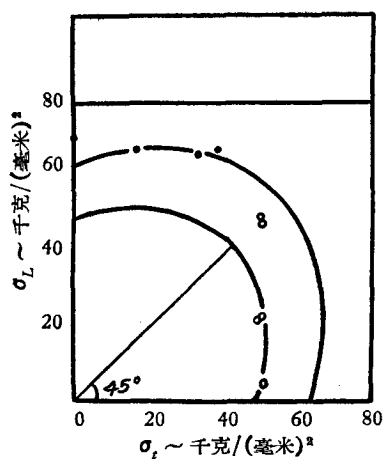
$\sigma_t$  = 周向應力

$\sigma_L$  = 軸向應力

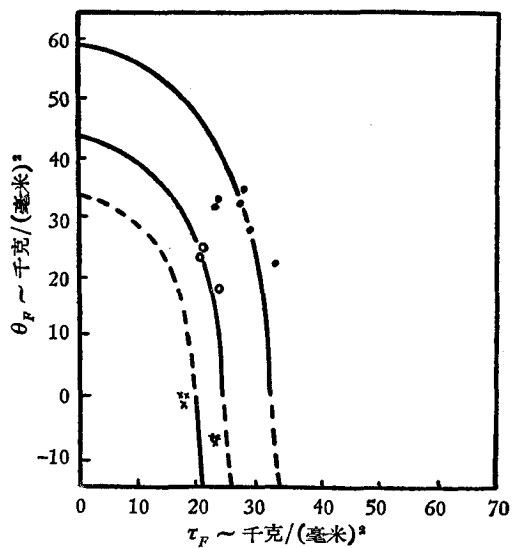
圖 2. 灰口鑄鐵管之斷裂試驗結果<sup>[6]</sup>。



(A) 軟鋼管 (成分結構不明), 曲線非理論曲線



(B) 低碳鋼管 (成分結構不明)

 $\sigma_L$  = 軸向應力 $\sigma_r$  = 周向應力

(C) 軟鋼 (A 圖結果) 及低碳鋼 (B 圖結果)

圖 3. 軟鋼管及低碳鋼管之斷裂實驗結果。

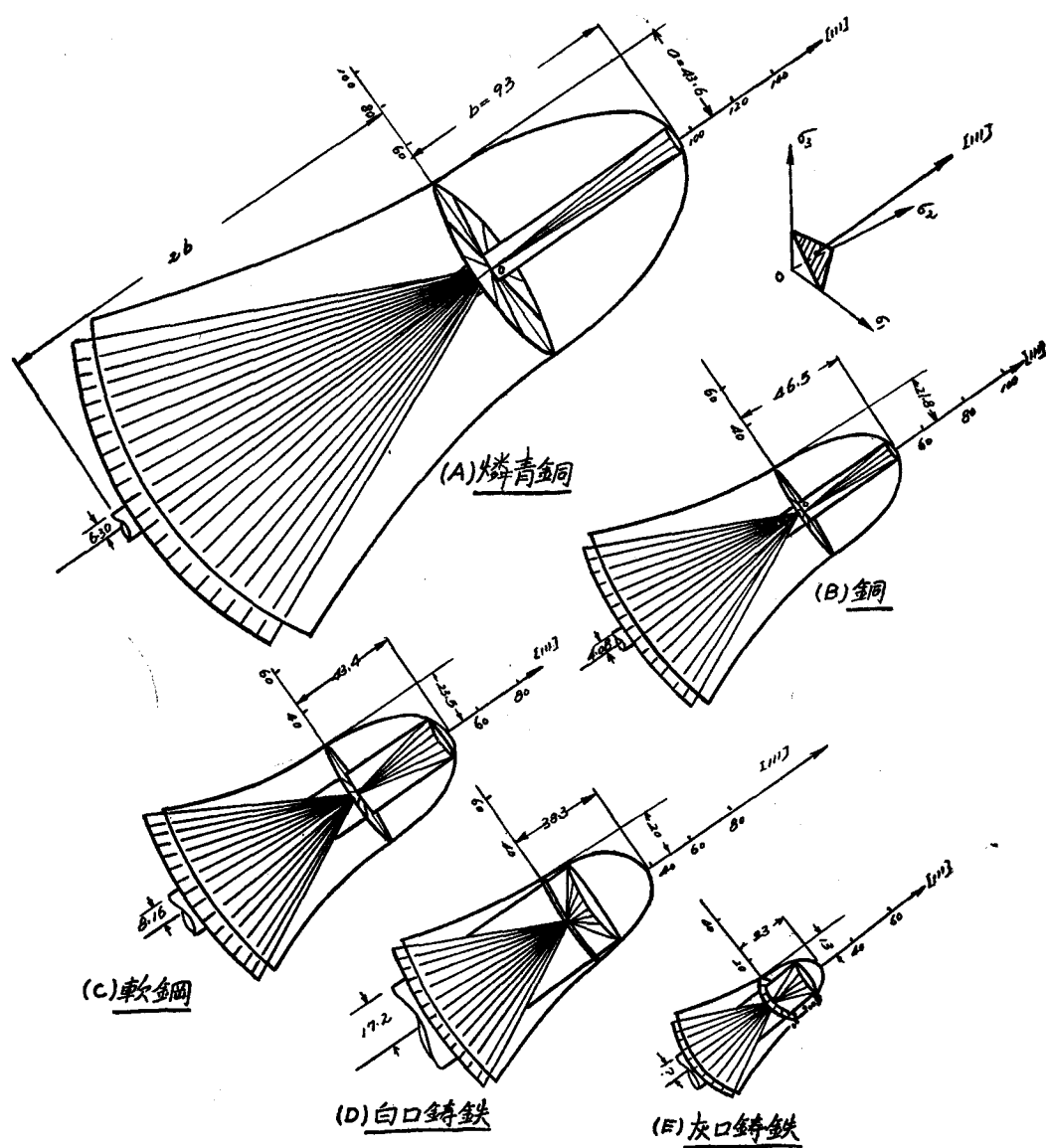


圖 4. 幾種金屬的應力空間。坐標單位： $\sqrt{3}$  千克/(毫米)<sup>2</sup>，各圖坐標尺度相同，鐘下部長度 $=2b$ 。

## 二．受範形變效率及其計算

受範形變效率及其計算是力學理論上未得重視有而一定實際意義的一個簡單理論問題。質量觀念很顯明，數量關係缺乏。為給實際問題的研究提供一些理論基礎，在此作一討論及計算。

同一受範形變，用不同應力狀態達到，所需總能量有巨大差別，因此有受範形變效率的問題存在。此效率與金屬壓力加工中所追求總效率有密切關係，可由應變硬化理論<sup>[4]</sup>及基本力學關係結合實驗記錄算出。以  $\eta$  符號代表之，其定義為：

$$\eta = \frac{\text{受範性畸變能}}{\text{總應變能}} \quad (1)$$

前文中提到應力空間內位置向量  $R$  的基本意義。總應變能亦為此向量之簡單函數：

$$U = R \cdot W. \quad (2)$$

內中， $U$  為單位體積內各種應變能之總合， $W$  為新引用之一向量，可稱為“功向量”， $W$  與  $R$  各為：

$$R = \sigma i + \iota j, \quad (3)$$

$$W = \frac{\sigma}{6K} i + \left( \frac{1}{2\iota} \int \iota d\gamma' \right) j. \quad (4)$$

$i, j$  各為流體靜應力軸及其垂軸上之單位向量。 $\sigma$  與  $\iota$  為應力狀態之流體靜分量及純切分量<sup>[1]</sup>，各為：

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sqrt{3} \theta, & \theta &= \text{平均正應力;} \\ \iota &= \sqrt{3} \tau, & \tau &= \text{八面切應力.} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$\gamma'$  為：

$$\gamma' = \sqrt{3} \gamma, \quad \gamma = \text{八面應變.} \quad (6)$$

(2) 式展開後為：

$$U = R \cdot W = \frac{\sigma^2}{6K} + \frac{1}{2} \int \iota d\gamma' = \frac{\theta^2}{2K} + \frac{3}{2} \int \tau d\gamma. \quad (7)$$

內中,第一項爲彈性體積變化勢能,  $K$  爲體積彈性係數. 受範性體積變化微小, 一般不計. 第二項爲彈性及受範性畸變能之總和, 在純彈性時還原爲:

$$\frac{3}{2} \int \tau d\gamma = \frac{3}{2} \int \tau d\left(\frac{\tau}{G}\right) = \frac{3\tau^2}{4G}; \quad (8)$$

$G$  爲切彈性係數.

(2) 式表現, 同一受範形變量, 以最短  $R$  達到耗能最低. 但最短  $R$  在純切面上, 故離純切面愈遠, 受範形變效率愈低. 由於受範形變必爲彈性形變所伴隨, 故在純切面上,  $\eta$  之值雖爲最大, 但仍稍小於 1. 而在流體靜應力軸上, 則  $\eta = 0$ . 在此二極端之間,  $\eta$  爲:

$$\eta = \frac{\frac{3}{2} \int \tau d\gamma - \frac{3\tau^2}{4G}}{\frac{3}{2} \int \tau d\gamma + \frac{\theta^2}{2K}}. \quad (9)$$

$\eta$  爲應力狀態與形變量  $\gamma$  之函數, 得找適當參數描寫應力狀態. 命  $m, n$  爲下式所定義之二參數:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= m\sigma_1, \\ \sigma_3 &= n\sigma_1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

則

$$\left. \begin{aligned} \tau &= c_\tau \sigma_1, \\ \theta &= c_\theta \sigma_1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

內中,

$$\left. \begin{aligned} c_\tau &= \frac{1}{3} \sqrt{(1-m)^2 + (m-n)^2 + (1-n)^2}, \\ c_\theta &= \frac{1}{3} (1+m+n). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

顯然  $\theta$  與  $\tau$  之比值  $c$  爲描寫應力狀態之一適當參數:

$$c = \frac{\theta}{\tau} = \frac{c_\theta}{c_\tau} = \frac{(1+m+n)}{\sqrt{(1-m)^2 + (m-n)^2 + (1-n)^2}}. \quad (13)$$

於是  $\eta$  化爲  $\gamma$  與  $c$  之函數:

$$\eta = \frac{\frac{3}{2} \int \tau d\gamma - \frac{3\tau^2}{4G}}{\frac{3}{2} \int \tau d\gamma + \frac{c^2}{2K} \tau^2}. \quad (14)$$

由此可見  $c$  增加則  $\eta$  降低。  $c^2$  在各種典型應力狀態下有下列數值：

$$\left. \begin{array}{ll} 1) \text{ 單向應力:} & m = n = 0, \quad c^2 = \frac{1}{2}; \\ 2) \text{ 平面應力:} & n = 0, \quad c^2 = \frac{(1+m)^2}{2(1-m+m^2)}; \\ 3) \text{ 同號均衡三向應力:} & m = n, \quad c^2 = \frac{(1+2m)^2}{2(1-m)^2}; \\ 4) \text{ 張壓混合三向應力:} & m = -n, \quad c^2 = \frac{1}{2(1+3m^2)}. \end{array} \right\} \quad (15)$$

各情況下  $c^2 = f(m)$  曲綫如圖 5 所示。

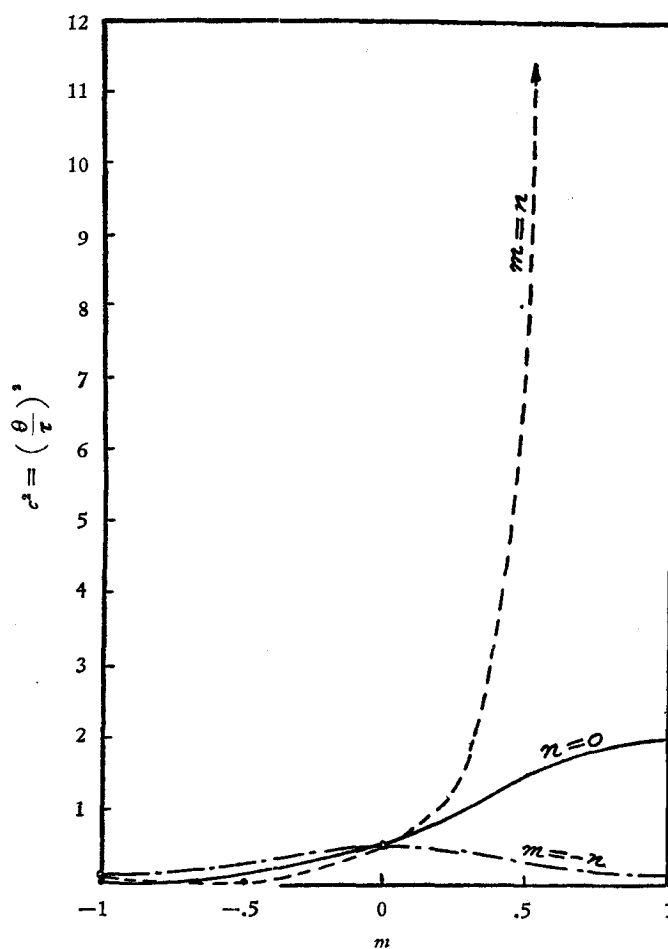


圖 5. 各種應力狀態下  $\frac{\theta}{\tau}$  比值之變化。

在混合應力狀態下  $\epsilon^2 \leq \frac{1}{2}$ ，而在同號應力狀態下，當  $m \rightarrow 1$  時， $\epsilon^2 \rightarrow \infty$ 。因而在不同應力狀態下， $\eta$  之值變化巨大，可具體算出如下：

命  $\tau = f(\gamma)$  為一連續函數。有不少金屬是如此，此類金屬之張應力應變曲綫為一連續指數函數：

$$\sigma_1 = a \epsilon_1^b, \quad (16)$$

內中， $a, b$  為應變硬化常數， $b$  為縮頸發生時之對數應變，一般在 0.18—0.28 之間。根據應變硬化理論<sup>[4]</sup>， $\tau = f(\gamma)$  亦為一連續指數函數，可簡單算出為：

$$\tau = A \gamma^b, \quad (17)$$

$$A = \frac{2^{(1-b)/2}}{3} a.$$

由此，總畸變能為

$$\frac{3}{2} \int \tau d\gamma = B \gamma^{b+1}, \quad (18)$$

$$B = \frac{a}{(b+1) 2^{(b+1)/2}}.$$

由 (17)，(18) 及 (14)，最後得到

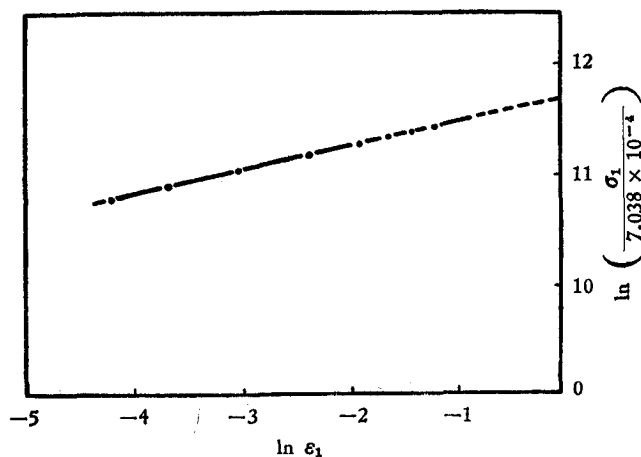


圖 6. 鋁合金 (24ST) 之張應力應變關係<sup>[8]</sup>.  
單位:  $7.038 \times 10^{-4}$  千克 / (毫米)<sup>2</sup>.

$$\eta = \frac{1 - \beta \gamma^{b-1}}{1 + \omega \gamma^{b-1}}; \quad (19)$$

$$\beta = \frac{3 A^2}{4 G B}, \quad \omega = \frac{A^2 c^2}{4 K B}.$$

(19) 式為此問題在  $\tau = f(\gamma)$  為指數函數時之計算公式。現在取鋁合金 (24ST) 的實驗結果<sup>[8]</sup> 作一例算。圖 6 表示此合金之應力應變函數為一指數曲線。

應變硬化常數及有關彈性常數<sup>[10]</sup> 為：

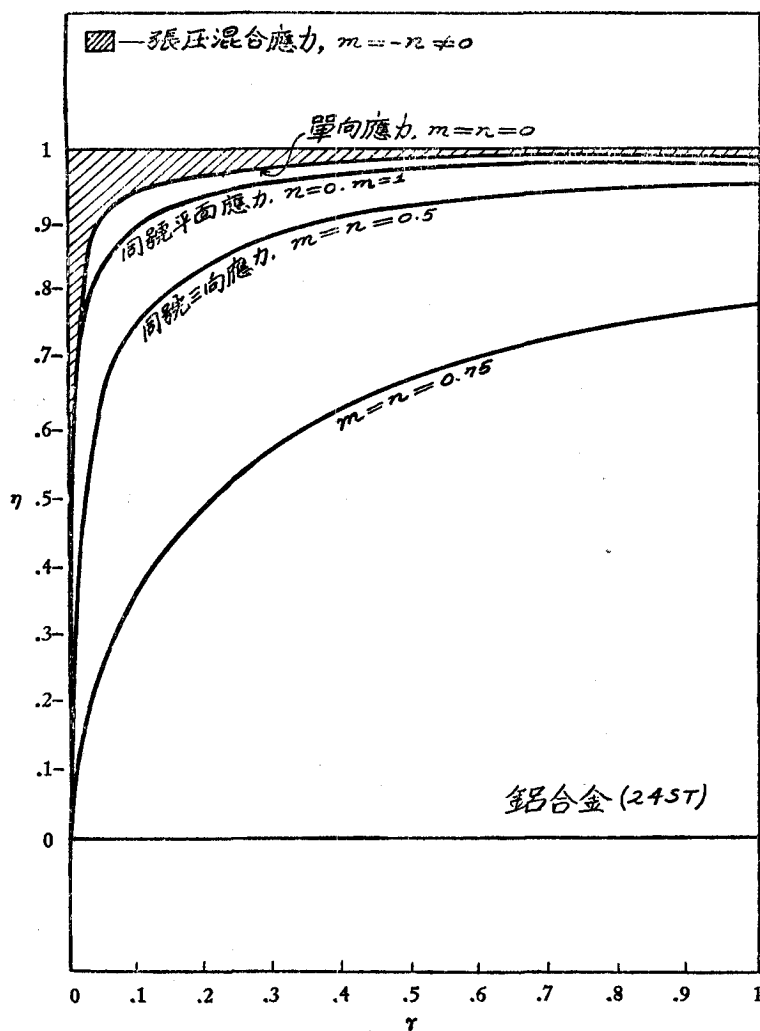


圖 7. 應力狀態與變形量對受箝形變效率之影響。

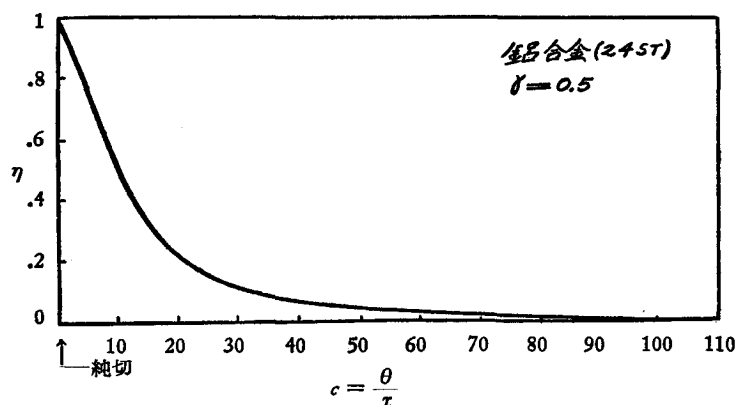


圖 8.  $\frac{\theta}{\tau}$  比值對受範形變效率之影響。

$$a = 88 \text{ 千克 / (毫米)}^2;$$

$$b = 0.222;$$

$$K = 7300 \text{ 千克 / (毫米)}^2;$$

$$G = 2800 \text{ 千克 / (毫米)}^2.$$

由此及 (17) 式算出之曲綫如圖 7, 圖 8 所示。圖 7 曲綫不始於  $\gamma=0$ ; 圖 8 曲綫不始於  $\eta=1$ 。這些結論曲綫明確, 勿須贅述。據此, 以張壓混合應力狀態下之受範形變效率為最高, 在彌氏圖柱外有一層低效率之應力狀態, 其厚度向純切面兩方增加。由於溫度對  $a, b, K, G$  都有影響, 故期望大的溫度變化對受範形變效率也有影響。

### 三. 形變過程之軌跡

一種形變過程的特性, 具體反映於它在應力空間中之軌跡及其與各邊限曲面之關係。目前尚無此種資料, 由前文 [1] 結論及實驗結果或應力分析理論答案, 可對此問題提供具體了解。在此只談一實例, 即薄鋼板在兩轉動輓間之受範形變過程軌跡。

由進輓到出輓, 金屬板形變逐漸增加, 表面壓力按一定規律變化, 如圖 9 (B) 所示<sup>[9]</sup>。  $\tau$  及  $\theta$  可由該圖實驗結果及一般所用平面應變條件及受範性方程算出, 由此構成軌跡圖, 如圖 9 (A) 所示。由於平面應變狀態,  $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ , 為

鐘之一縱切面，故此軌跡為一平面曲線。圖中之平面及迴轉對稱關係正確(三坐標軸乃任意繪以示空間之意)。鐘面來自圖 4(C)，由於鐘面所據實驗結果分散，鐘面軟鋼與被軋壓軟鋼成分結構不明，故鐘面不準確，而且平面應變的理論條件也有一定誤差，故此圖只能當作一個半質量半數量的關係。

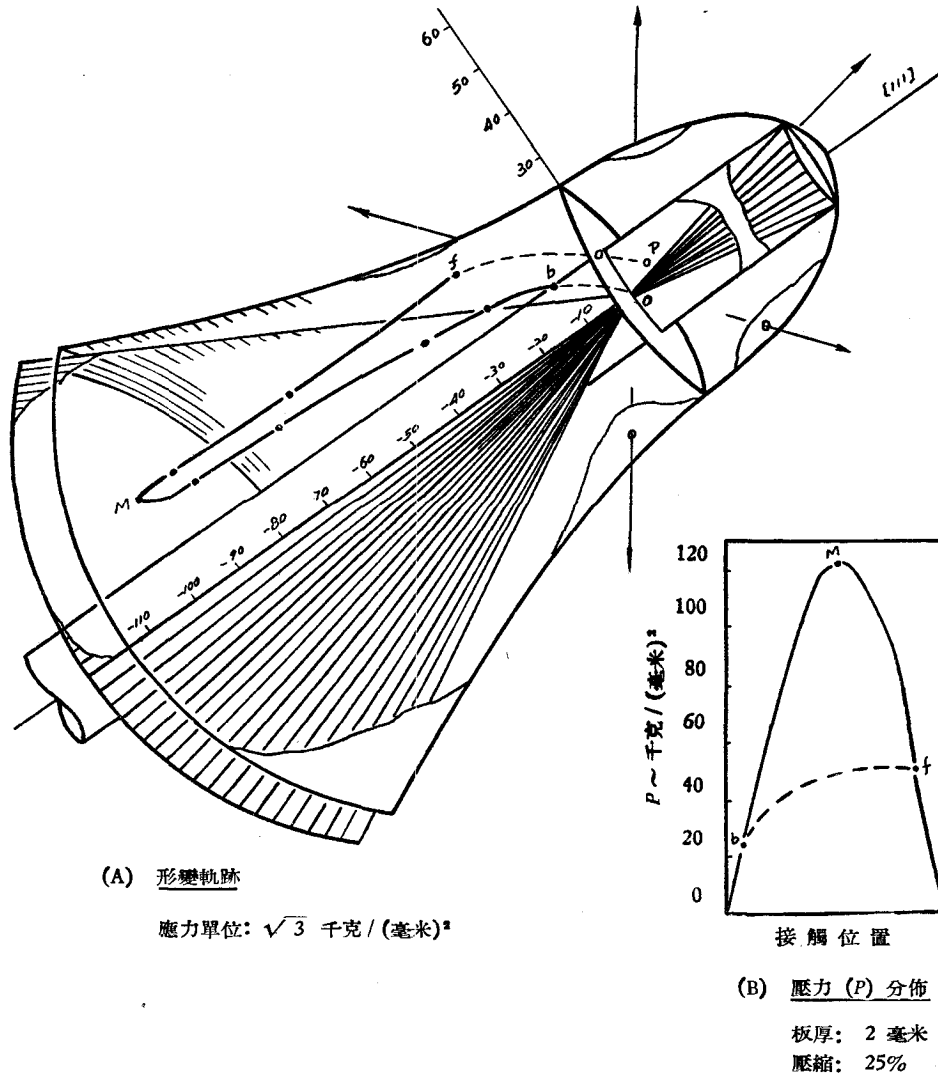


圖 9. 軟鋼板在軋軋過程中之形變軌跡 (A) 及實驗根據 (B)。

在應力及應變狀態上，受範形變均為不可逆過程。圖中軌跡深入不裂椎，繼而另道返回，最後不終於原點而終於殘餘應力狀態  $P$  (任意表示，實際上不只一

點)。全部過程大半在受範性區域內，形變後彌氏圓柱擴大到  $f$  點。

根據前節理論，可以考慮如何改變此軌跡以提高受範形變效率，因為前用參數  $c$  為  $R$  與  $\pm[111]$  間角度之餘切，形變量  $\gamma$  與  $R$  長度有關。最後我們轉到一個原則性的問題，即形變過程軌跡轉變規律的問題。

上述過程在達到  $M$  點以後，如不轉向鐘上部而繼續往前伸，仍能達到同樣形變量。但為何不如此？這可以說成是摩擦力倒轉方向，但為何摩擦力倒轉方向？此軌跡不往下伸而返向鐘上部，這是一個自然的趨勢。還有其他情況，形變軌跡自然返向鐘上方而不能以人力制止：

- 1) 在張力試驗中，受範性金屬不可避免地要發生縮頸現象，應力狀態由單向轉向三向張力——轉向鐘上部；
- 2) 在較高試樣之範壓試驗中，不可避免地要發生彎曲，此時凸面應力狀態由壓力轉向張力——轉向鐘上部；
- 3) 在較短柱樣之範壓過程中，如接觸面非絕對平滑，柱樣變為鼓狀而其中有張力出現——轉向鐘上部；
- 4) 在薄板之連續範壓過程中，最初是板內應力狀態向板之鐘下方發展，最後是工具某部之應力狀態向工具之鐘上部發展而終於工具斷裂。

這些事實表現，或在工具中，或在受力體中，連續形變過程終歸轉向鐘上部。這些現象，顯然被最小形變功原理在支配着。惟此原理中的形變功應了解為整個形變系統（包括受力體與工具系統）之形變功，而形變過程應了解為形變系統之形變過程。但形變系統的總形變功，很難用可運算之形式寫出。所以上述各現象，仍然只能由質量上來理解，很難發展到數量關係上去。

#### 四. 結 語

本文將前文理論向具體和聯系實際的方向上，試圖作一些發展。更具體的實際問題，專業技術性濃厚，可另作研究。

總起來看，我們的理論仍是發展過程中很初步的理論。力學性質的系統化實驗及理論研究仍待深入，尤其在多向應力的測量技術與理論、晶體受範形變基本力學及物理理論等方面是如此。

## 附 錄

由於鐘形空間之性質，將  $\theta_F = f(\tau_F)$  曲綫坐標乘以  $\sqrt{3}$ ，置於 [111] 軸上迴轉即構成空間圖形。圖 4 構繪根據如下：

- 1) 磷青銅：根據圖 1 實驗結果配出之理論曲綫。
- 2) 銅：銅與磷青銅之彈性常數略同，但前者最大張力強度（經過大量冷加工後之張力強度，近於斷裂應力）及退火後之屈服點約為後者之半<sup>[10]</sup>：

|          | 銅                            | 磷青銅                          |
|----------|------------------------------|------------------------------|
| 最大張力強度：  | 57.2 千克 / (毫米) <sup>2</sup>  | 103.3 千克 / (毫米) <sup>2</sup> |
| 退火後之屈服點： | 7.038 千克 / (毫米) <sup>2</sup> | 13.6 千克 / (毫米) <sup>2</sup>  |

據此，估計銅之鐘形尺寸為磷青銅之半。圖中屈服點數值取自壓力加工實驗結果<sup>[9]</sup>。

- 3) 軟鋼：軟鋼（成分結構不明）之實驗點位置及曲綫配算，在前文 [1] 中有錯，正確點位及實驗曲綫如圖 3(A) 所示。此圖及前文圖尺度過大而實驗應力範圍太小，二者均不足肯定整個曲綫變化趨勢。另一作者<sup>[6]</sup>發表一成分結構不明之退火後低碳鋼實驗記錄，數值較高且有方向性，故將 45° 角兩旁結果各歸入一曲綫 [圖 3(B)]。將此結果與前一作者之軟鋼實驗結果同置於一個 [圖 3(C)] 內，以決定變化趨勢。圖 4(C) 之鐘形乃根據圖 3(C) 之中間曲綫。
- 4) 灰口鑄鐵：根據圖 2，此金屬無顯明屈服點。
- 5) 白口鑄鐵：根據軋輥表層（白口鑄鐵）試驗結果<sup>[12]</sup>：

| 軋輥碳分  | 白口表層之張力強度                        | 炭口內心之張力強度                        |
|-------|----------------------------------|----------------------------------|
| 2.75% | 33.1—36.5 千克 / (毫米) <sup>2</sup> | 15.5—26.7 千克 / (毫米) <sup>2</sup> |
| 3.50% | 34.6—28.1 千克 / (毫米) <sup>2</sup> | 11.2—17.6 千克 / (毫米) <sup>2</sup> |

白口鑄鐵在張力下無受範性。據此，張力強度亦為斷裂應力  $K_f$ ，而彌氏圓柱與鐘交於  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = K_f$  平面。

在另一前文 [2] 中，尚有規律性較強之實驗結果，如鎂合金，本文中只取幾個例子，未作全部資料之重繪。

## 參 考 文 獻

- [1] 劉叔儀, 關於固體的現實應力空間. 物理學報, 10 (1954), (1), 13—34.
- [2] ———, 金屬的恆溫斷裂條件. 同上, 9 (1953), (4), 275—293.
- [3] von Mises-Henck, 受範性方程, 見受範性力學.
- [4] Nadai, A., Plastic behaviors of metals in the strain-hardening range. *Jour. Appl. Phys.*, U.S.A., 1937.
- [5] Павлов, Иг. М., Взаимодействие инструмента и деформируемого тела. *Теория прокатки*, Москва, 1950.
- [6] Maier, Einfluss des Spannungszustandes auf das Formänderungsvermögen der metallischen Werkstoffe. *V.D.I.*, Berlin, 1935. 或見: Gensamer, M., Strength of metals under combined stress. *ASM*, 1940.
- [7] Ros und Eichinger, *Versuche zur Klärung der Bruchgefahr*, III, *Metalle*, 1929. 或見 [1].
- [8] Liu Shu-i *et al.*, Low cycle fatigue on the Al-alloy 24ST in direct stress. *AIME, Metals Technology*, 1948.
- [9] Lening, 見: *Прокатные станы*, Целиков. Москва, 1946.
- [10] *Metals Hand Book*. *ASM*, 1948.
- [11] Camp and Frances, *The Making, Shaping and Treatment of Steel*. Carnegie-Illinois Steel Corp., 1940.

## ON THE REALISTIC STRESS SPACE OF SOLIDS (CONTINUED)

LIU SHU-I

(Peking Institute of Iron & Steel Technology)

### ABSTRACT

A general theory on the realistic stress space of solids was formulated in a previous paper. In this paper, the bell stress spaces of several metals are compared, the concept of "efficiency of plastic deformation" is introduced and formulated, and the locus of deformation is discussed in connection with the theory of bell stress space. The main concepts of this paper are:

Because the concept of strength of solids is associated with the stress state, it is difficult to bring out the concrete meaning of strength by a brief definition. Inasmuch as the volume of the closed stress space is a complete and concrete measure of the fracture strength and the limit of strain-hardened elastic strength in all stress states, we are inclined to define this volume as strength. This is not just a matter of definition; the important point is that the size and shape of the closed space actually reflect the physical and mechanical aspects of strength, and it gives one a clear impression about what is meant by strength.

The concept of "efficiency of plastic deformation" arises from the fact that one may raise the internal potential energy of a solid infinitely without causing plastic deformation

if the stress state is not favourable. This efficiency is the ratio of plastic distortion energy to the sum of elastic and plastic strain energies. It may be formulated, by simple arguments, as a function of octahedral shear strain and a stress state parameter  $c = \theta/\tau$ , where  $\theta$  is the average normal stress and  $\tau$  the octahedral shear stress. It increases with increasing strain and decreases with increasing hydrostatic stress, and it is actually measured by the length and the direction cotangent ( $c$ ) of the position vector with respect to the hydrostatic axis.

A process of deformation can hardly be well understood without knowing its locus of deformation in relation to the limiting surfaces of the stress space. By the theory of bell stress space and experimental measurements, such locus can be located. A locus for strip rolling is presented. It is interesting to note that there is a natural tendency for continuous processes of deformation to turn towards the  $[111]$  direction in order to make the total strain energy of the system a minimum.

