

## 圓薄板大撓度問題\*

錢偉長

(清華大學及中國科學院數學研究所)

葉開沅

(北京大學力學專業)

### 一. 引言

著名的薄板大撓度方程是由卡門<sup>[1]</sup>首先提出來的，但截至目前為止只有少數問題被計算過。韋 (S. Way)<sup>[2]</sup>最初用幕級數法解決了在均勻載荷下邊緣固定的圓薄板問題；後來李斐 (S. Levy)<sup>[3]</sup>用重三角法得到了均勻載荷下簡支長示板的解答。這兩種方法都是非常繁冗以致在一些比較重要的情形便不能應用。最近錢偉長<sup>[4]</sup>用攝動法 (perturbation method) 重新處理了均勻載荷下邊緣固定的圓薄板問題，得到了非常完善的結果，他得到的中心撓度和邊緣的屈服條件和實驗值非常地接近。

用錢偉長提出來的方法，圓薄板的其他情形也曾經處理過，例如葉開沅<sup>[5]</sup>曾處理了邊緣載荷下環形薄板大撓度問題。

在本文中，對於不同的圓薄板在不同的邊緣條件下將要得出更多的結果。這些問題包括在不同邊緣條件下均勻載荷的圓薄板（第二節）和在不同邊緣條件下集中載荷的圓薄板（第三節）。

所得到的結果表示成這樣的形式以致使得在工程設計問題中能直接應用。

### 二. 在不同邊緣條件下均勻載荷的圓薄板

我們考慮一半徑為  $a$ ，厚度為  $h$  在單位面積均勻分佈載荷作用下的圓薄板

---

\* 1954 年 5 月 18 日收到。

(圖 1), 令橫向撓度是  $w$ , 徑向薄膜應力是  $N_r$ , 切向薄膜應力是  $N_t$ . 它們都是離圓板中心徑向距離  $r$  的函數. 它們適合下面的卡門方程:

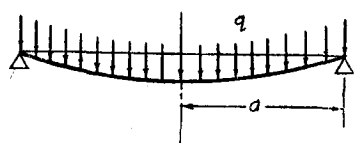


圖 1 a. 簡單支承.

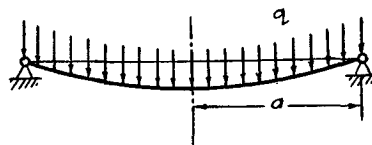


圖 1 b. 簡單鉸鏈支承.

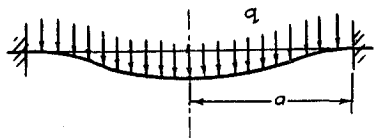


圖 1 c. 固定夾緊.

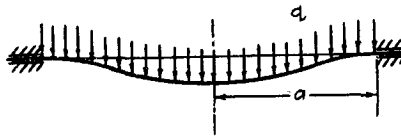


圖 1 d. 可移夾緊.

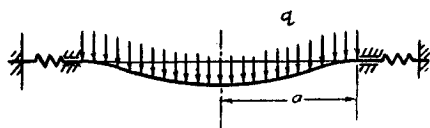


圖 1 e. 水平方向可以移動的夾緊.

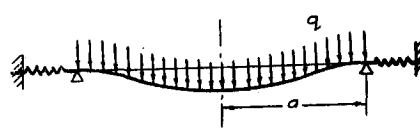


圖 1 f. 彈性拉緊的簡支.

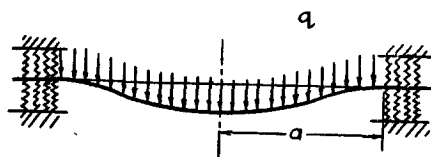


圖 1 g. 邊緣在彈性牆中夾緊.

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} &= N_r \frac{dw}{dr} + \frac{qr}{2}, \\ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{Eh}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 &= 0, \\ N_t &= \frac{d}{dr} (r N_r); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $E$  是楊氏彈性模數， $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$  是圓薄板的抗彎係數 (flexural rigidity)， $\sigma$  是泊松比。

這些方程將要在下列形式的邊緣條件下求解：

I. 邊緣簡單支承 (圖 1a)：

$$\left. \begin{aligned} &\text{當 } r = a \text{ 時,} \\ &\quad w = 0, \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \quad N_r = 0; \\ &\text{當 } r = 0 \text{ 時,} \\ &\quad \frac{dw}{dr}, N_r \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

II. 邊緣簡單鉸鏈支承 (圖 1b)：

$$\left. \begin{aligned} &\text{當 } r = a \text{ 時,} \\ &\quad w = 0, \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \quad r \frac{dN_r}{dr} + (1-\sigma) N_r = 0; \\ &\text{當 } r = 0 \text{ 時,} \\ &\quad \frac{dw}{dr}, N_r \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

III. 邊緣固定夾緊 (rigidly clamped) (圖 1c)：

$$\left. \begin{aligned} &\text{當 } r = a \text{ 時,} \\ &\quad w = 0, \frac{dw}{dr} = 0, \quad r \frac{dN_r}{dr} + (1-\sigma) N_r = 0; \\ &\text{當 } r = 0 \text{ 時,} \\ &\quad \frac{dw}{dr}, N_r \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

IV. 邊緣可移夾緊 (clamped but free slip) (圖 1d)：

$$\left. \begin{aligned} &\text{當 } r = a \text{ 時,} \\ &\quad w = 0, \frac{dw}{dr} = 0, \quad N_r = 0; \\ &\text{當 } r = 0 \text{ 時,} \\ &\quad \frac{dw}{dr}, N_r \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

V. 邊緣在水平方向可以移動的夾緊 (clamped but with possible slipping in horizontal direction) (圖 1e):

$$\left. \begin{aligned} &\text{當 } r = a \text{ 時,} \\ &w = 0, \frac{dw}{dr} = 0, N_r = -\frac{k_1}{Eh} \left[ r \frac{dN_r}{dr} + (1-\sigma) N_r \right]; \\ &\text{當 } r = 0 \text{ 時,} \\ &\frac{dw}{dr}, N_r \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

VI. 邊緣彈性拉緊的簡支 (simply supported but elastically fastened) (圖 1f):

$$\left. \begin{aligned} &\text{當 } r = a \text{ 時,} \\ &w = 0, \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} = 0, N_r = -\frac{k_1}{Eh} \left[ r \frac{dN_r}{dr} + (1-\sigma) N_r \right]; \\ &\text{當 } r = 0 \text{ 時,} \\ &\frac{dw}{dr}, N_r \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

VII. 邊緣在彈性牆中夾緊 (clamped in elastic wall) (圖 1f):

$$\left. \begin{aligned} &\text{當 } r = a \text{ 時,} \\ &w = 0, D \left( \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -k_2 \frac{dw}{dr}, \\ &\quad r \frac{dN_r}{dr} + (1-\sigma) N_r = 0; \\ &\text{當 } r = 0 \text{ 時,} \\ &\frac{dw}{dr}, N_r \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

爲了簡化卡門方程和邊緣條件,我們引進下面的無量綱變數:

$$\left. \begin{aligned} &x = 1 - \frac{r^2}{a^2}, W = \sqrt{3(1-\sigma^2)} \frac{w}{h}, S = 3(1-\sigma^2) \frac{a^2 N_r}{Eh^3}, \\ &T = 3(1-\sigma^2) \frac{a^2 N_t}{Eh^3}, Q = \frac{3}{4} (1-\sigma^2) \sqrt{3(1-\sigma^2)} \frac{a^4 q}{Eh^4}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

利用這些新變數，卡門方程 (1) 可寫成下面的樣子：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ (1-x) \frac{dW}{dx} \right] &= S \frac{dW}{dx} - Q, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[ (1-x) S \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 &= 0, \\ T &= S - 2(1-x) \frac{dS}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (10a,b,c)$$

所有這些邊緣條件可寫成下面的形式：

$$\left. \begin{aligned} \text{當 } x=0 \text{ 時,} \\ W=0, \quad \frac{dW}{dx} = \lambda \frac{d^2 W}{dx^2}, \quad S = \mu \frac{dS}{dx}; \\ \text{當 } x=1 \text{ 時,} \\ \frac{dW}{dx}, S \text{ 有限;} \end{aligned} \right\} \quad (11a,b,c,d,e)$$

其中  $\lambda, \mu$  依照不同的邊緣條件而有不同的值，在最一般的情形，我們有

$$\lambda = \frac{2}{\frac{k_2 a}{D} + (1+\sigma)}, \quad \mu = \frac{2}{(1-\sigma) + \frac{Eh}{k_1}}. \quad (12)$$

對於不同的邊緣條件，很顯然我們有下列的特殊值：

- (a) 對於邊緣簡單支承， $k_1 = 0, k_2 = 0$ ；
- (b) 對於邊緣簡單鉸鏈支承， $k_1 = \infty, k_2 = 0$ ；
- (c) 對於邊緣固定夾緊， $k_1 = \infty, k_2 = \infty$ ；
- (d) 對於邊緣可移夾緊， $k_1 = 0, k_2 = \infty$ ；
- (e) 對於其他種邊緣彈性支承， $0 \leq k_1, 0 \leq k_2$ 。

現在我們要以中心最大撓度為基礎，用攝動法，在邊緣條件 (11 a, b, c, d, e) 下來解方程 (10 a, b, c)。令

$$W_m = W_{x=1} = \sqrt{3(1-\sigma^2)} \left( \frac{w}{h} \right)_{r=0}. \quad (13)$$

顯然

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q(W_m), \quad W = W(W_m, x), \\ S &= S(W_m, x), \quad T = T(W_m, x). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

對於小的  $W_m$ , 我們把每個量均展開成含  $W_m$  的升幂級數:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \alpha_1 W_m + \alpha_3 W_m^3 + \cdots, \\ W &= w_1(x) W_m + w_3(x) W_m^3 + \cdots, \\ S &= s_2(x) W_m^2 + s_4(x) W_m^4 + \cdots, \\ T &= t_2(x) W_m^2 + t_4(x) W_m^4 + \cdots; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中  $\alpha$  是常數,  $w_k(x)$ ,  $s_k(x)$ ,  $t_k(x)$  是含  $x$  的待定函數. 將表達式 (15) 代入 (10), (11), (13), 依照  $W_m$  的次數, 將各項次數相同的歸併在一起, 我們可得到一系列對  $\alpha_1$ ,  $w_1$ ,  $s_2$ ,  $t_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $w_3$ ,  $s_4$ ,  $t_4$  等及其相當的邊緣條件的線性微分方程.

對於  $\alpha_1$ ,  $w_1$ , 我們得到下列的方程和邊緣條件 (問題 I):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ (1-x) \frac{dw_1}{dx} \right] &= -\alpha_1, \\ w_1(1) &= 1, \quad w_1(0) = 0, \quad w_1'(0) - \lambda w_1''(0) = 0, \\ w_1'(1) &\text{有限}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

方程 (16) 的解是:

$$w_1(x) = \frac{1}{1+2\lambda} (x^2 + 2\lambda x), \quad \alpha_1 = \frac{4}{1+2\lambda}. \quad (17)$$

這便是著名的圓平板在均勻載荷作用下小撓度理論的解 (或者是泊松理論的解).

對於  $s_2(x)$  和  $t_2(x)$ , 我們有下列的方程和邊緣條件 (問題 II):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ (1-x) s_2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 &= 0, \\ t_2 &= s_2 - 2(1-x) \frac{ds_2}{dx}, \\ s_2(0) - \mu s_2'(0) &= 0, \quad s_2(1) \text{有限}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

問題 II 的解答是：

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= \frac{1}{6(1+2\lambda)^2} \left[ x^3 + (1+4\lambda)x^2 + (1+4\lambda+6\lambda^2)x + \right. \\ &\quad \left. + \mu(1+4\lambda+6\lambda^2) \right], \\ t_2 &= \frac{1}{6(1+2\lambda)^2} \left[ 7x^3 - (1-20\lambda)x^2 - (1+4\lambda-18\lambda^2)x + \right. \\ &\quad \left. + (\mu-2)(1+4\lambda+6\lambda^2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其次的漸近式，給出了下列的方程（問題 III）：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ (1-x) \frac{dw_3}{dx} \right] &= s_2 \frac{dw_1}{dx} - \alpha_3, \\ w_3(1) &= 0, \quad w_3(0) = 0, \quad w_3'(0) - \lambda w_3''(0) = 0, \\ w_3'(1) &\text{有限}; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中  $s_2, w_1$  已在 (17) 和 (19) 式中求得。問題 III 的解是：

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{1}{270(1+2\lambda)^4} \left[ 73 + 388\lambda + 825\lambda^2 + 840\lambda^3 + 360\lambda^4 + \right. \\ &\quad \left. + 10\mu(5 + 35\lambda + 108\lambda^2 + 162\lambda^3 + 108\lambda^4) \right], \\ w_3 &= -\frac{1}{1080(1+2\lambda)^4} \left\{ 2(1+2\lambda)x^6 + 6(1+5\lambda+6\lambda^2)x^5 + \right. \\ &\quad + 15(1+6\lambda+13\lambda^2+10\lambda^3)x^4 + 20[1+7\lambda+19\lambda^2+24\lambda^3+12\lambda^4 + \\ &\quad + \mu(1+6\lambda+14\lambda^2+12\lambda^3)]x^3 - [43+178\lambda+255\lambda^2+120\lambda^3 + \\ &\quad + \mu(20+80\lambda+120\lambda^2)]x^2 - [86\lambda+356\lambda^2+510\lambda^3+240\lambda^4 + \\ &\quad \left. + \mu(40\lambda+160\lambda^2+240\lambda^3)]x \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

對於  $s_4, t_4$  我們得出下列的問題（問題 IV）：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ (1-x) s_4 \right] &= - \frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_3}{dx}, \\ t_4(x) &= s_4(x) - 2(1-x) \cdot \frac{ds_4}{dx}, \\ s_4(0) - \mu s_4'(0) &= 0, \quad s_4(1) \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

利用 (17), (21) 給出的  $w_1$ ,  $w_3$ , 我們得到問題 IV 的解:

$$\begin{aligned} s_4 = & - \frac{1}{22680(1+2\lambda)^5} \left\{ 9(1+2\lambda) x^2 + (39+180\lambda+204\lambda^2) x^0 + \right. \\ & + (123+726\lambda+1506\lambda^2+1092\lambda^3) x^1 + \\ & + [249+1734\lambda+4656\lambda^2+5754\lambda^3+2772\lambda^4 + \\ & + \mu(126+756\lambda+1764\lambda^2+1512\lambda^3)] x^4 + \\ & + [-52+698\lambda+4341\lambda^2+8904\lambda^3+7812\lambda^4+2520\lambda^5 + \\ & + \mu(-14+406\lambda+2184\lambda^2+4452\lambda^3+2520\lambda^4)] x^3 + \\ & + [-52-506\lambda-643\lambda^2+1764\lambda^3+4452\lambda^4+2520\lambda^5 + \\ & + \mu(-14-154\lambda-56\lambda^2+1092\lambda^3+2520\lambda^4)] x^2 + \\ & + [-52-506\lambda-2449\lambda^2-5712\lambda^3-6258\lambda^4-2520\lambda^5 + \\ & + \mu(-14-154\lambda-896\lambda^2-2268\lambda^3-2520\lambda^4)] (x+\mu) \Big\}. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} t_4 = & - \frac{1}{22680(1+2\lambda)^5} \left\{ 135(1+2\lambda) x^2 + (381+2088\lambda+2652\lambda^2) x^0 + \right. \\ & + (885+5826\lambda+14118\lambda^2+12012\lambda^3) x^1 + \\ & + [1011+8346\lambda+26844\lambda^2+40866\lambda^3+24948\lambda^4 + \\ & + \mu(1131+6804\lambda+15876\lambda^2+13608\lambda^3)] x^4 + \\ & + [-2356-8986\lambda-6861\lambda^2+16296\lambda^3+32508\lambda^4+17640\lambda^5 + \\ & + \mu(-1106-3206\lambda+1176\lambda^2+19068\lambda^3+17640\lambda^4)] x^3 + \\ & + [52-6718\lambda-29261\lambda^2-44604\lambda^3-24612\lambda^4-2520\lambda^5 + \\ & + \mu(14-3206\lambda-13384\lambda^2-21252\lambda^3-2520\lambda^4)] x^2 + \\ & + [52+506\lambda-4775\lambda^2-24192\lambda^3-36582\lambda^4-17640\lambda^5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu(14 + 154\lambda - 2464\lambda^2 - 11172\lambda^3 - 17640\lambda^4)]x + \\
& + [104 + 1012\lambda + 4898\lambda^2 + 11424\lambda^3 + 12516\lambda^4 + 5040\lambda^5 + \\
& + \mu(-24 - 198\lambda - 657\lambda^2 - 1176\lambda^3 - 1218\lambda^4 - 2520\lambda^5) + \\
& + \mu^2(-14 - 154\lambda - 896\lambda^2 - 2268\lambda^3 - 2520\lambda^4)] \}. \quad (24)
\end{aligned}$$

上面計算的結果綜述如下：

對於一具有均勻厚度、在不同邊緣條件下的彈性板，中心撓度和壓力的關係式是

$$Q = \alpha_1 W_m + \alpha_3 W_m^3, \quad (25)$$

其中  $\alpha_1, \alpha_3$ ，已經在 (17) 和 (21) 中給出，它們是  $\lambda$  和  $\mu$  的函數。在特殊情況下，

(i) 對於簡單支承， $\lambda = \frac{2}{1+\sigma}$ ， $\mu = 0$ ，

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{4(1+\sigma)}{5+\sigma}, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{270(5+\sigma)^4} (16629 + 15940\sigma + 6066\sigma^2 + 1068\sigma^3 + 73\sigma^4); \end{aligned} \right\} \quad (26a)$$

(ii) 對於簡單鉸鏈支承， $\lambda = \frac{2}{1+\sigma}$ ， $\mu = \frac{2}{1-\sigma}$ ，

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{4(1+\sigma)}{5+\sigma}, \\ \alpha_3 &= \frac{87249 + 47111\sigma + 3566\sigma^2 - 3198\sigma^3 - 895\sigma^4 - 73\sigma^5}{270(5+\sigma)^4(1-\sigma)}; \end{aligned} \right\} \quad (26b)$$

(iii) 對於固定夾緊， $\lambda = 0$ ， $\mu = \frac{2}{1-\sigma}$ ，

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_3 = \frac{173 - 73\sigma}{270(1-\sigma)}; \quad (26c)$$

(iv) 對於可移夾緊， $\lambda = 0$ ， $\mu = 0$ ，

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_3 = \frac{73}{270}. \quad (26d)$$

對於其他的支承邊緣條件， $\lambda$  和  $\mu$  的值在下列區域內：

$$\frac{\lambda}{1+\sigma} > \lambda > 0, \quad \frac{\lambda}{1-\sigma} > \mu > 0. \quad (26c)$$

圖 2 表示在不同的邊緣條件下,  $\sigma = 0.3$  時, 中心撓度對壓力的曲線.

上述特殊情形的中心撓度對壓力的設計公式 ( $\sigma = 0.3$ ) 是:

(i) 對於簡單支承,

$$Q = 0.9811 W_m + 0.1032 W_m^3; \quad (27a)$$

(ii) 對於簡單鉸鏈支承,

$$Q = 0.9811 W_m + 0.6813 W_m^3; \quad (27b)$$

(iii) 對於固定夾緊,

$$Q = 4 W_m + 0.7995 W_m^3; \quad (27c)$$

(iv) 對於可移夾緊,

$$Q = 4 W_m + 0.2704 W_m^3; \quad (27d)$$

對於如 (27) 式給出的不同的  $\lambda$  和  $\mu$ , 表 1 給出了  $\alpha_1$  和  $\alpha_3$  的值:

表 1. 對於不同的  $\mu$  和  $\lambda$  的  $\alpha_1$  和  $\alpha_3$  的值.

| $\alpha_1, \alpha_3$ | $\mu \quad \lambda$ | 0      | 0.2    | 0.4    | 0.6    | 0.8    | 1.0    | 1.2    | 1.4    | 1.6    |
|----------------------|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\alpha_3$ 值         | 0                   | 0.2704 | 0.1840 | 0.1493 | 0.1314 | 0.1207 | 0.1137 | 0.1088 | 0.1052 | 0.1024 |
|                      | 0.4                 | 0.3444 | 0.2526 | 0.2190 | 0.2034 | 0.1950 | 0.1901 | 0.1871 | 0.1851 | 0.1838 |
|                      | 0.8                 | 0.4185 | 0.3212 | 0.2888 | 0.2754 | 0.2694 | 0.2666 | 0.2654 | 0.2650 | 0.2651 |
|                      | 1.2                 | 0.4926 | 0.3898 | 0.3585 | 0.3474 | 0.3437 | 0.3430 | 0.3437 | 0.3450 | 0.3465 |
|                      | 1.6                 | 0.5667 | 0.4584 | 0.4282 | 0.4194 | 0.4180 | 0.4193 | 0.4226 | 0.4249 | 0.4279 |
|                      | 2.0                 | 0.6407 | 0.5270 | 0.4980 | 0.4914 | 0.4924 | 0.4959 | 0.5003 | 0.5049 | 0.5092 |
|                      | 2.4                 | 0.7184 | 0.5969 | 0.5677 | 0.5634 | 0.5667 | 0.5724 | 0.5787 | 0.5848 | 0.5906 |
|                      | 2.8                 | 0.7889 | 0.6643 | 0.6374 | 0.6355 | 0.6410 | 0.6488 | 0.6570 | 0.6647 | 0.6719 |
|                      | 3.2                 | 0.8630 | 0.7329 | 0.7072 | 0.7075 | 0.7154 | 0.7253 | 0.7353 | 0.7447 | 0.7533 |
| $\alpha_1$ 值         |                     | 4      | 2.8571 | 2.2222 | 1.8182 | 1.5385 | 1.3330 | 1.1765 | 1.0526 | 0.9524 |

$$W_m = \sqrt{3(1-\sigma^2)} \left( \frac{w}{h} \right)_{r=0}$$

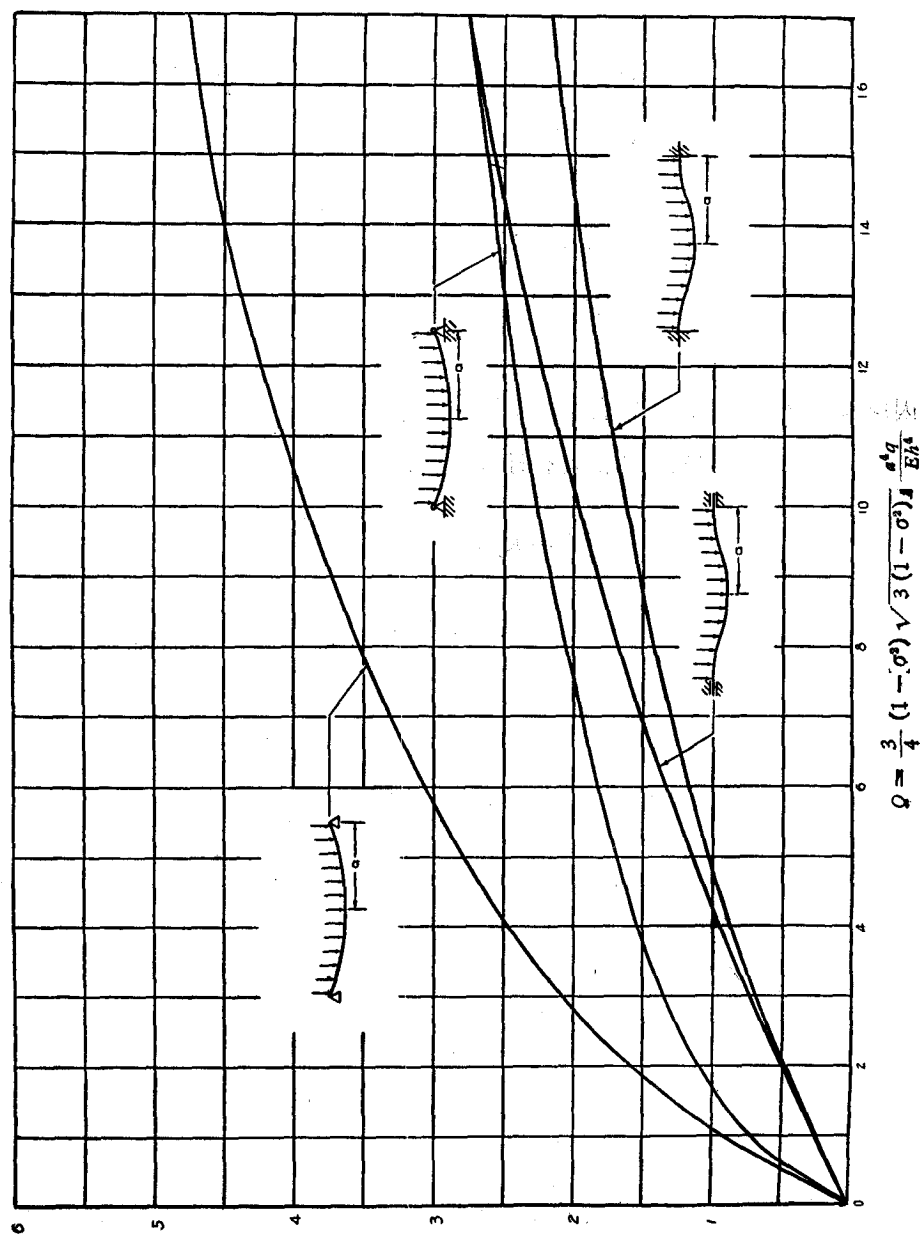


圖 2. 在不同邊緣條件下 ( $\sigma = 0.3$ ), 中心撓度對壓力的曲線。

現在我們來求出平板中應力的表達式,令中性面的徑向拉伸應力  $\sigma_r'$  的無量綱形式是  $\Sigma_r'(x)$ , 平板凸面的徑向彎曲應力  $\sigma_r''$  的無量綱形式是  $\Sigma_r''(x)$  或

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_r'(x) &= 3(1-\sigma^2) \frac{\sigma_r' a^2}{Eh^2} = 3(1-\sigma^2) \frac{N_r a^2}{Eh^3} = S, \\ \Sigma_r''(x) &= \frac{(1-\sigma^2) \sqrt{3(1-\sigma^2)} a^2}{Eh^2} \sigma_r'' \\ &= -\frac{a^2}{2h} \sqrt{3(1-\sigma^2)} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ &= -2(1-x) \frac{d^2 W}{dx^2} + (1+\sigma) \frac{dW}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

因此我們得到了下面一些有用的結果:

$$\Sigma_r'(0) = \text{邊緣折合徑向拉伸應力}$$

$$= K_1 W_m^2 + K_2 W_m^4, \quad (29a)$$

$$\Sigma_r'(1) = \text{中心折合徑向拉伸應力}$$

$$= K_3 W_m^2 + K_4 W_m^4, \quad (29b)$$

$$\Sigma_r''(0) = \text{邊緣折合徑向彎曲應力}$$

$$= K_5 W_m + K_6 W_m^3, \quad (29c)$$

$$\Sigma_r''(1) = \text{中心折合徑向彎曲應力}$$

$$= K_7 W_m + K_8 W_m^3; \quad (29d)$$

其中  $K$  是包含  $\sigma, \lambda, \mu$  的常係數,它們各為:

$$K_1 = \frac{\mu}{6(1+2\lambda)^2} (1+4\lambda+6\lambda^2), \quad (30a)$$

$$K_2 = \frac{\mu}{22680(1+2\lambda)^5} \left[ 52+506\lambda+2449\lambda^2+5712\lambda^3+ \right]$$

$$+6258\lambda^4+2520\lambda^5+ \\ +\mu(14+154\lambda+896\lambda^2+2268\lambda^3+2520\lambda^4)\Big], \quad (30b)$$

$$K_3 = \frac{1}{6(1+2\lambda)^2} \left[ 3+8\lambda+6\lambda^2+\mu(1+4\lambda+6\lambda^2) \right], \quad (30c)$$

$$K_4 = \frac{-1}{22680(1+2\lambda)^5} \left[ 264+2344\lambda+7615\lambda^2+ \right. \\ \left. +11802\lambda^3+8778\lambda^4+2520\lambda^5+ \right. \\ \left. +\mu(32+348\lambda+547\lambda^2-924\lambda^3-3738\lambda^4-2520\lambda^5)- \right. \\ \left. -\mu^2(14+154\lambda+896\lambda^2+2268\lambda^3+2520\lambda^4) \right], \quad (30d)$$

$$K_5 = -\frac{2}{1+2\lambda} (2-\lambda-\sigma\lambda), \quad (31a)$$

$$K_6 = -\frac{2-\lambda-\lambda\sigma}{540(1+2\lambda)^4} \left[ 43+178\lambda+255\lambda^2+120\lambda^3+ \right. \\ \left. +\mu(20+80\lambda+120\lambda^2) \right], \quad (31b)$$

$$K_7 = \frac{2(1+\sigma)(1+\lambda)}{1+2\lambda}, \quad (31c)$$

$$K_8 = -\frac{1+\sigma}{540(1+2\lambda)^4} \left[ 38+256\lambda+617\lambda^2+645\lambda^3+240\lambda^4 \right. \\ \left. +\mu(10+80\lambda+220\lambda^2+240\lambda^3) \right]. \quad (31d)$$

圖 3, 4, 5, 6 表示在不同邊緣條件下, 當  $\sigma = 0.3$  時, 中心和邊緣的折合應力 (折合徑向拉伸應力和折合徑向彎曲應力) 對中心撓度的曲線。

當  $\sigma = 0.3$  時, 上述特殊情形的中心撓度對折合應力的設計公式是:

(i) 對於簡單支承,

$$\Sigma_r'(0) = 0,$$

$$\Sigma_r'(1) = 0.2959 W_m^2 - 0.0053 W_m^4,$$

$$\Sigma_r''(0) = 0,$$

$$\Sigma_r''(1) = 1.6189 W_m - 0.0487 W_m^3;$$

(32a)

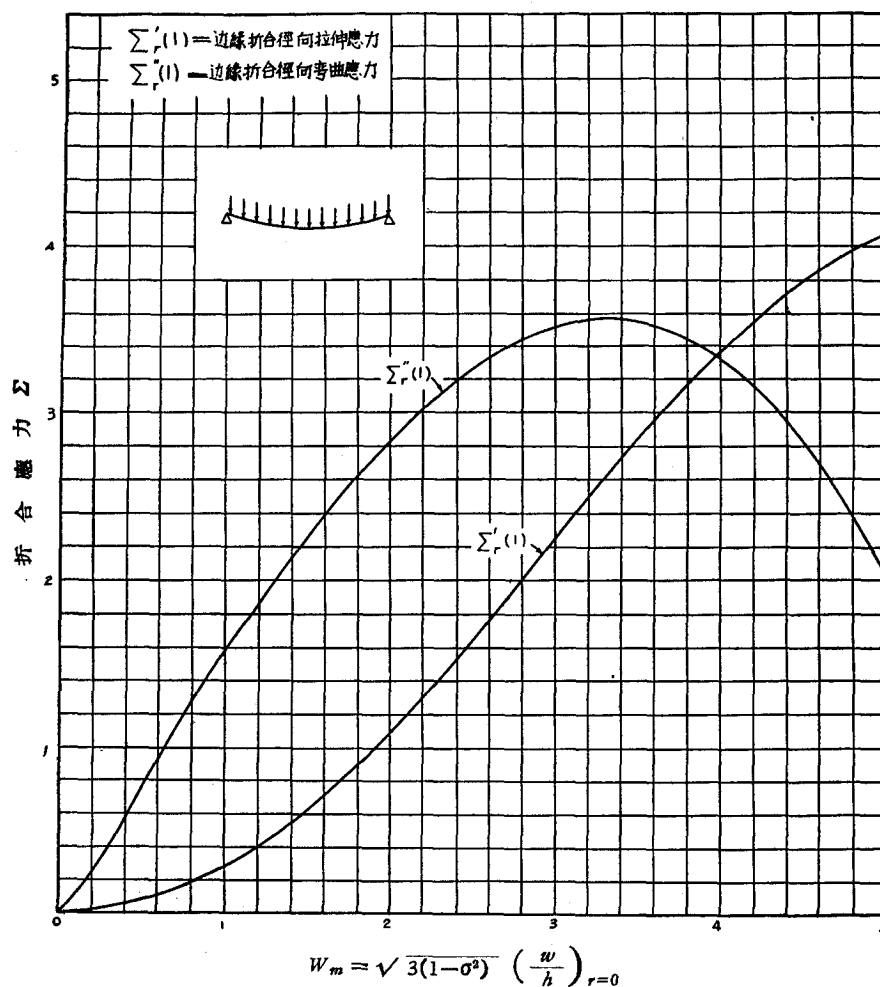


圖 3. 邊緣簡單支承, 中心撓度對折合應力的曲線 ( $\sigma = 0.3$ ).

(ii) 對於簡單鉸鏈支承，

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_r'(0) &= 0.6118 W_m^2 + 0.0173 W_m^4, \\ \Sigma_r'(1) &= 0.9077 W_m^2 + 0.0075 W_m^4, \\ \Sigma_r''(0) &= 0, \\ \Sigma_r''(1) &= 1.6189 W_m - 0.0867 W_m^3; \end{aligned} \right\} \quad (32b)$$

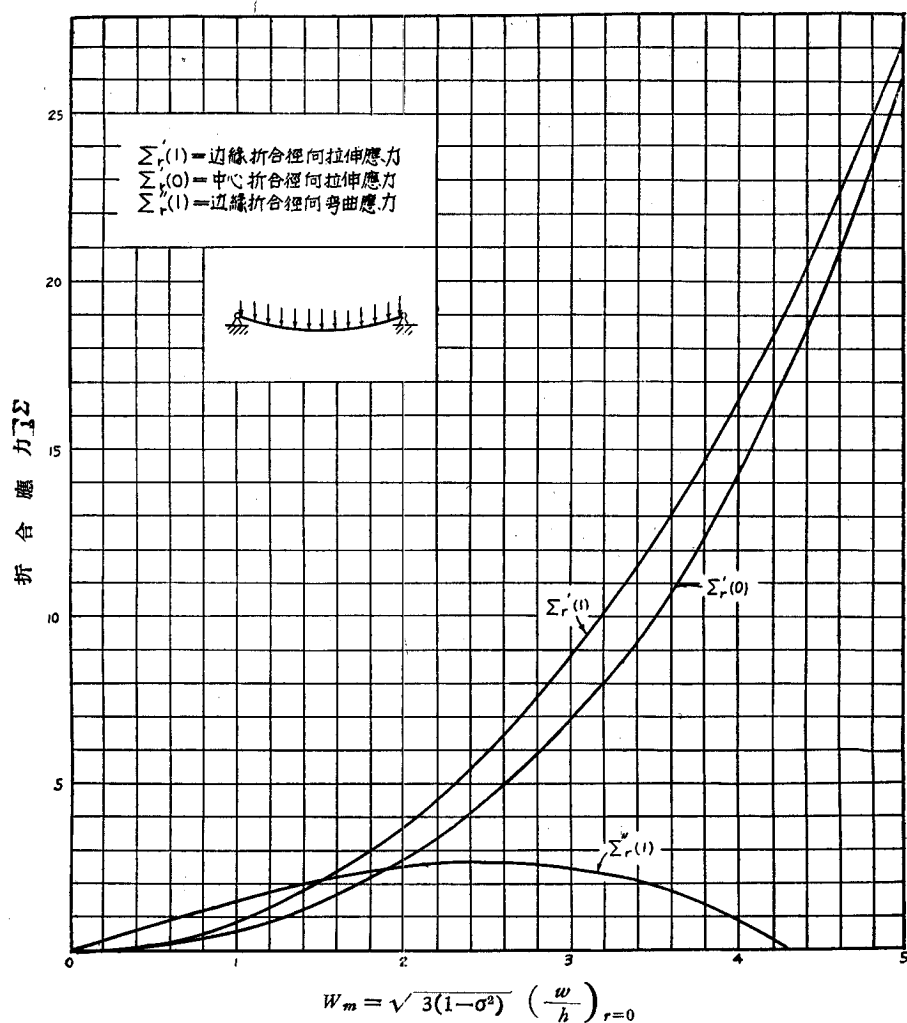


圖 4. 邊緣簡單鉸鏈支承，中心撓度對折合應力的曲線 ( $\sigma = 0.3$ ).

(iii) 對於固定夾緊,

$$\Sigma'_r(0) = 0.4762 W_m^2 + 0.01159 W_m^4,$$

$$\Sigma'_r(1) = 0.9762 W_m^2 - 0.0106 W_m^4,$$

$$\Sigma''_r(0) = -4 W_m - 0.3709 W_m^3,$$

$$\Sigma''_r(1) = 2.6 W_m - 0.1603 W_m^3;$$

(32c)

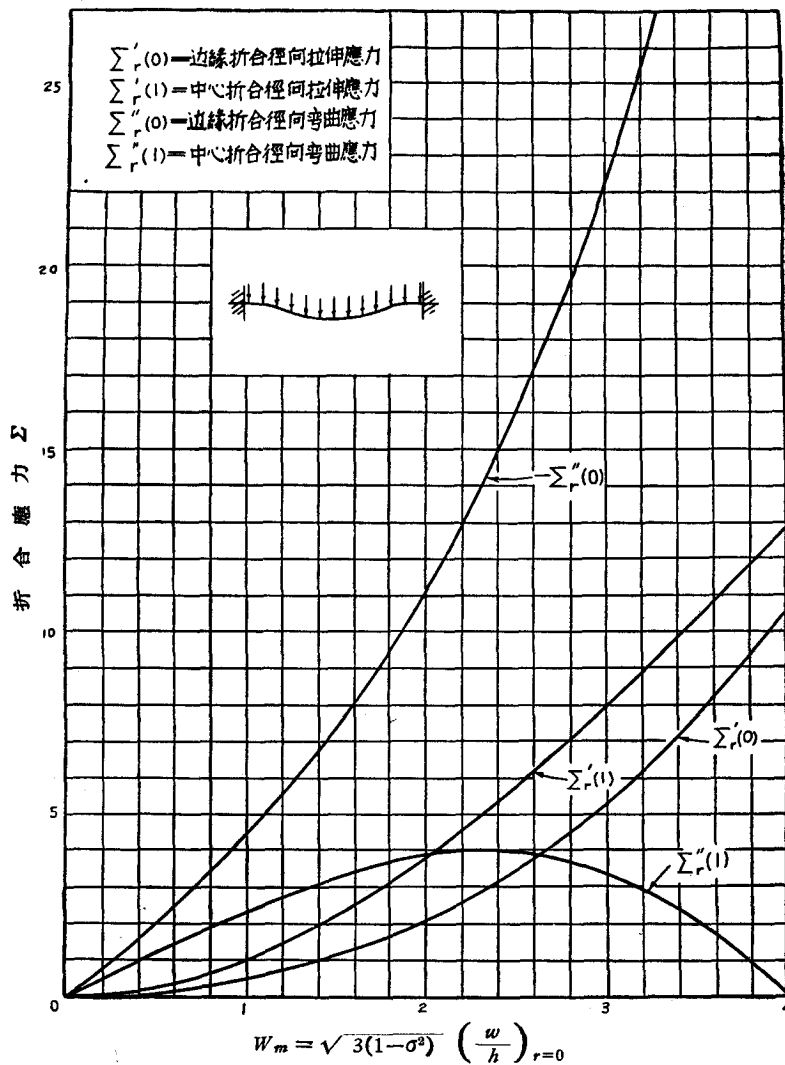


圖 5. 邊緣固定夾緊, 中心撓度對折合應力的曲線 ( $\sigma = 0.3$ ).

(iv) 對於可移夾緊,

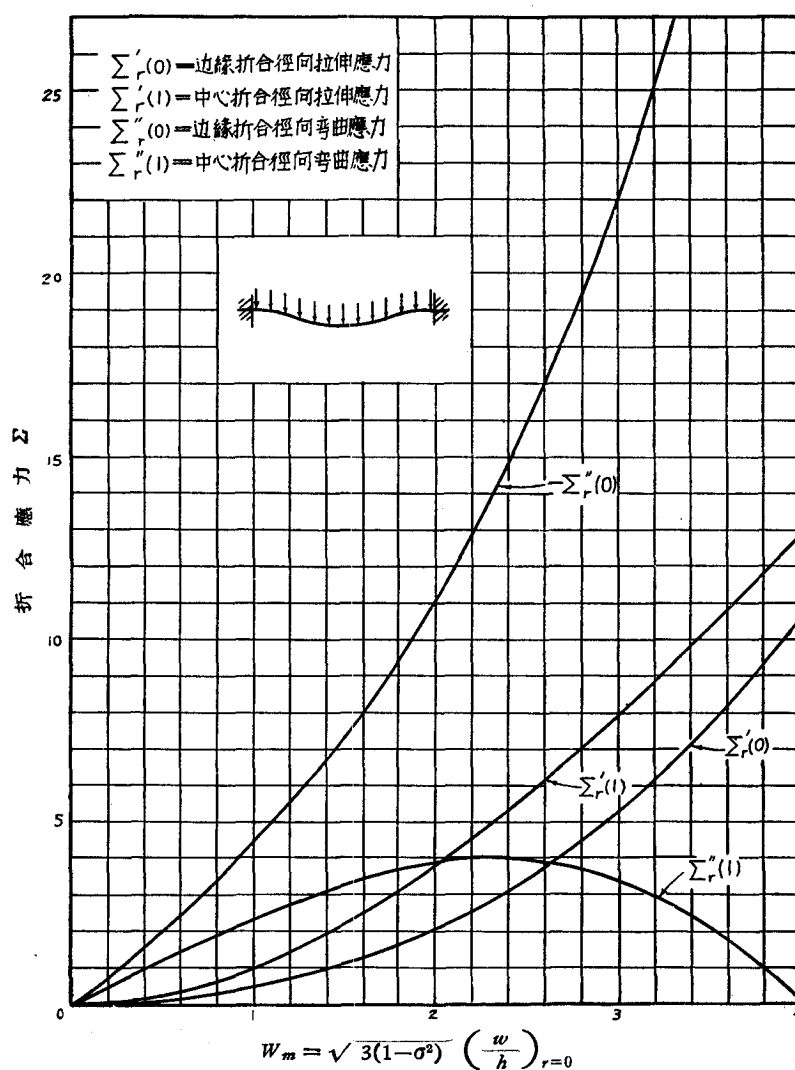
$$\Sigma'_r(0) = 0,$$

$$\Sigma'_r(1) = 0.5 W_m^2 - 0.0116 W_m^4,$$

$$\Sigma''_r(0) = -4 W_m - 0.1593 W_m^3,$$

$$\Sigma''_r(1) = 2.6 W_m - 0.0915 W_m^3.$$

(32d)

圖 6. 邊緣可移夾緊, 中心撓度對折合應力的曲線 ( $\sigma = 0.3$ ).

### 三. 在不同邊緣條件下集中載荷作用在中心的圓薄板

我們考慮一如圖 1 所示的相同的圓薄板, 中心有集中載荷  $P$  作用着(圖 7).

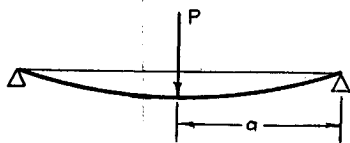


圖 7 a. 簡單支承.

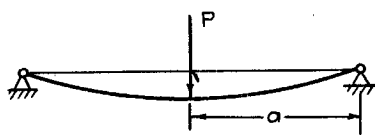


圖 7 b. 簡單鉸鏈支承.

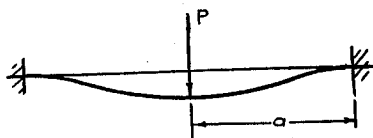


圖 7 c. 固定夾緊.

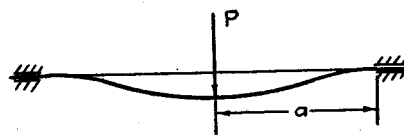


圖 7 d. 可移夾緊.

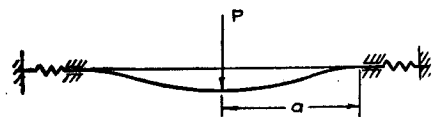


圖 7 e. 水平方向可以移動的夾緊.

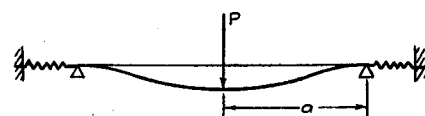


圖 7 f. 彈性夾緊的簡支.

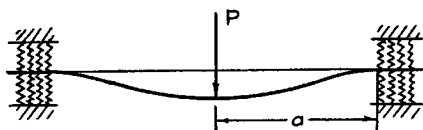


圖 7 g. 邊緣在彈性牆中夾緊.

作用在中心的集中載荷的卡門大撓度方程是:

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} &= N_r \frac{dw}{dr} + \frac{P}{2\pi r}, \\ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{Eh}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 &= 0, \\ N_t &= \frac{d}{dt} (r N_r). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

這些方程將要在方程 (2), (3), (4), (5), (6), (7) 指出的邊緣條件下求解.

爲了把方程 (33) 改變爲無量綱形式, 我們引進下列的新變數:

$$\left. \begin{aligned} y = \frac{r^2}{a^2}, \quad W = \sqrt{3(1-\sigma^2)} \frac{w}{h}, \quad S = 3(1-\sigma^2) \frac{a^2 N_r}{E h^3}, \\ T = 3(1-\sigma^2) \frac{a^2 N_t}{E h^3}, \quad p = \frac{3}{4} (1-\sigma^2) \sqrt{3(1-\sigma^2)} \frac{a^2 P}{\pi E h^4}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

利用上述的關係，方程 (33) 可寫成下面的形式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} \left( y \frac{dW}{dy} \right) &= S \frac{dW}{dy} + \frac{p}{y}, \\ \frac{d^2}{dy^2} (y S) + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dy} \right)^2 &= 0, \\ T &= S + 2y \frac{dS}{dy}. \end{aligned} \right\} \quad (35a, b, c)$$

相當的邊緣條件可以寫成：

$$\left. \begin{aligned} \text{當 } y = 1 \text{ 時,} \\ W = 0, \quad \frac{dW}{dy} = -\lambda \frac{d^2 W}{dy^2}, \quad S = -\mu \frac{dS}{dy}; \\ \text{當 } y = 0 \text{ 時,} \\ \frac{dW}{dy}, S \text{ 有限;} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

其中  $\lambda, \mu$  是 (12) 式中給出的。

現在我們挑選中心撓度作參變數，用攝動法在邊緣條件 (36) 下來解方程 (34 a, b, c)。令

$$W_m = W_{y=0} = \sqrt{3(1-\sigma^2)} \left( \frac{w}{h} \right)_{r=0}. \quad (37)$$

和前面一樣，我們把每個量均展開成含  $W_m$  的升冪級數：

$$\left. \begin{aligned} p &= \beta_1 W_m + \beta_3 W_m^3 + \cdots, \\ W &= w_1(y) W_m + w_3(y) W_m^3 + \cdots, \\ S &= s_2(y) W_m^2 + s_4(y) W_m^4 + \cdots, \\ T &= t_2(y) W_m^2 + t_4(y) W_m^4 + \cdots; \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

其中  $\alpha$  是常數,  $w_k(y)$ ,  $s_k(y)$ ,  $t_k(y)$  是含  $y$  的待定函數.

將表達式代入方程 (35), 依照  $W_m$  的次數, 將各項次數相同的歸併在一起, 我們可得到一系列對  $\beta_1$ ,  $w_1$ ,  $s_2$ ,  $t_2$ ,  $\beta_3$ ,  $w_3$ ,  $s_4$ ,  $t_4$  等及其相當的邊緣條件的線性微分方程.

對於  $\beta_1$ ,  $w_1$ , 我們得出下面的問題 (問題 I):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} \left( y \frac{dw_1}{dy} \right) &= \frac{\beta_1}{y}, \\ w_1(1) &= 0, \quad w_1'(1) + \lambda w_1''(1) = 0, \quad w_1(0) = 1, \\ w_1'(0) &\text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

方程 (39) 的解答是:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_1}{dy} &= \frac{1}{1+\lambda} (\log y - \lambda), \\ \beta_1 &= \frac{1}{1+\lambda}, \quad w_1 = \frac{1}{1+\lambda} y \log y - y + 1. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

對於  $s_2(y)$  和  $t_2(y)$  我們有下列的方程和邊界條件 (問題 II):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} (y s_2) + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_1}{dy} \right)^2 &= 0, \\ t_2 &= s_2 + 2y \frac{ds_2}{dy}, \\ s_2(1) + \mu s_2'(1) &= 0, \quad s_2(0) \text{ 有限.} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

問題 II 的解是:

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= -\frac{1}{8(1+\lambda)^2} \left[ 2y(\log y)^2 - (6+4\lambda)y \log y + \right. \\ &\quad \left. + (7+6\lambda^2+2\lambda^2)(y-1) - \mu(1+2\lambda+2\lambda^2) \right], \\ t_2 &= -\frac{1}{8(1+\lambda)^2} \left[ 6y(\log y)^2 - (10+12\lambda)y \log y + \right. \\ &\quad \left. + (9+10\lambda+6\lambda^2)y - (7+6\lambda+2\lambda^2) - \mu(1+2\lambda+2\lambda^2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

對於  $\beta_3, w_3$ , 我們有下面的方程和邊界條件 (問題 III):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} \left( y \frac{dw_3}{dy} \right) &= s_2 \frac{dw_1}{dy} + \frac{\beta_3}{y}, \\ w_3(0) &= 0, \quad w_3(1) = 0, \quad w_3'(1) + \lambda w_3''(1) = 0, \\ w_3'(0) &\text{ 有限; } \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

其中  $s_2, w_1$  已在 (40) 和 (42) 式中求得。問題 III 的解是:

$$\begin{aligned} w_3 = \frac{1}{1296(1+\lambda)^3} &\left\{ -18 y^3 (\log y)^3 + (117 + 54\lambda) y^3 (\log y)^2 - \right. \\ &- (288 + 234\lambda + 54\lambda^2) y^3 \log y + \\ &+ (238 + 288\lambda + 117\lambda^2 + 18\lambda^3) y^3 + \\ &+ 162F [y^2 \log y - (2 + \lambda) y^2] \Big\} + \\ &+ \beta_3 y \log y + (A - \beta_3) y, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = \frac{1}{2592(1+\lambda)^4} &\left[ 191 + 492\lambda + 576\lambda^2 + 360\lambda^3 + 108\lambda^4 + \right. \\ &+ 81\mu(1 + 4\lambda + 8\lambda^2 + 8\lambda^3 + 4\lambda^4) \Big]; \end{aligned} \quad (45)$$

其中

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2592(1+\lambda)^4} &\left[ 849 + 2113\lambda + 2115\lambda^2 + 1062\lambda^3 + 234\lambda^4 + \right. \\ &+ 81\mu(3 + 11\lambda + 19\lambda^2 + 16\lambda^3 + 6\lambda^4) \Big], \end{aligned} \quad (46)$$

$$F = \frac{1}{4} \left[ 7 + 6\lambda + 2\lambda^2 + \mu(1 + 2\lambda + 2\lambda^2) \right]. \quad (47)$$

對於  $s_4, \iota_4$ , 我們得出下面的問題 (問題 IV):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} (y s_4) &= - \frac{dw_1}{dy} \frac{dw_3}{dy}, \\ \iota_4 &= s_4 + 2 y \frac{ds_4}{dy}, \\ s_4(1) + \mu s_4'(1) &= 0, \quad s_4(0) \text{ 有限. } \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

問題 IV 的解答是:

$$\begin{aligned}
 s_4 = & \frac{1}{497664(1+\lambda)^4} \left\{ 1728 y^3 (\log y)^4 - (13536 + 6912\lambda) y^3 (\log y)^3 + \right. \\
 & + (42120 + 40608\lambda + 10368\lambda^2) y^3 (\log y)^2 - \\
 & - (56004 + 84240\lambda + 40608\lambda^2 + 6912\lambda^3) y^3 \log y + \\
 & + (25649 + 56004\lambda + 42120\lambda^2 + 13536\lambda^3 + 1728\lambda^4) y^3 - \\
 & - 576 F [36 y^2 (\log y)^2 - (114 + 72\lambda) y^2 \log y + \\
 & + (83 + 114\lambda + 36\lambda^2) y^2] \left. \right\} - \\
 & - \frac{1}{4(1+\lambda)} \left\{ 2 \beta_3 y (\log y)^2 + 2 [A - (3 + \lambda) \beta_3] y \log y + \right. \\
 & + [(7 + 3\lambda) \beta_3 - (3 + 2\lambda) A] y \left. \right\} + D, \quad (49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_4 = & \frac{1}{497664(1+\lambda)^4} \left\{ 12096 y^3 (\log y)^4 - (80928 + 48384\lambda) y^3 (\log y)^3 + \right. \\
 & + (213624 + 242784\lambda + 72576\lambda^2) y^3 (\log y)^2 - \\
 & - (223548 + 427248\lambda + 242784\lambda^2 + 48384\lambda^3) y^3 \log y + \\
 & + (67535 + 223548\lambda + 213624\lambda^2 + 80928\lambda^3 + 12096\lambda^4) y^3 - \\
 & - 576 F [180 y^2 (\log y)^2 - (426 + 360\lambda) y^2 \log y + \\
 & + (187 + 426\lambda + 180\lambda^2) y^2] \left. \right\} - \\
 & - \frac{1}{4(1+\lambda)} \left\{ 6\beta_3 y (\log y)^2 + [6A - (10 + 6\lambda) \beta_3] y \log y + \right. \\
 & + [(9 + 5\lambda) \beta_3 - (5 + 6\lambda) A] y \left. \right\} + D; \quad (50)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 D = & \frac{1}{497664(1+\lambda)^4} [58015 + 130620\lambda + 116568\lambda^2 + \\
 & + 50400\lambda^3 + 8640\lambda^4 + \\
 & + 3\mu (14475 + 52908\lambda + 66168\lambda^2 + 38880\lambda^3 + 8640\lambda^4) + \\
 & + 576\mu^2 (13 + 65\lambda + 122\lambda^2 + 114\lambda^3 + 36\lambda^4)] +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4(1+\lambda)} \left\{ [7+3\lambda + \mu(1+\lambda)] \beta_3 - [3+2\lambda + \mu(1+2\lambda)] A \right\}. \quad (51)$$

上面的計算結果，綜述如下：

對於一具有均勻厚度，在不同邊緣條件下的彈性板，中心撓度和壓力的關係式是

$$p = \beta_1 W_m + \beta_3 W_m^3, \quad (52)$$

其中  $\beta_1, \beta_3$ ，已經在 (40) 和 (45) 式中給出，它們是  $\lambda$  和  $\mu$  的函數。在特殊情況下，

(i) 對於簡單支承， $\lambda = \frac{2}{1+\sigma}$ ， $\mu = 0$ ，

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1+\sigma}{3+\sigma}, \\ \beta_3 &= \frac{1}{2592(3+\sigma)^4} (8087 + 11204\sigma + 6402\sigma^2 + 1748\sigma^3 + 191\sigma^4); \end{aligned} \right\} \quad (53a)$$

(ii) 對於簡單鉸鏈支承， $\lambda = \frac{2}{1+\sigma}$ ， $\mu = \frac{2}{1-\sigma}$ ，

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1+\sigma}{3+\sigma}, \\ \beta_3 &= \frac{1}{2592(3+\sigma)^4(1-\sigma)} (35465 + 28389\sigma + 5242\sigma^2 - \\ &\quad - 2710\sigma^3 - 1395\sigma^4 - 191\sigma^5); \end{aligned} \right\} \quad (53b)$$

(iii) 對於固定夾緊， $\lambda = 0$ ， $\mu = \frac{2}{1-\sigma}$ ，

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_3 = \frac{353-191\sigma}{2592(1-\sigma)}; \quad (53c)$$

(iv) 對於可移夾緊， $\lambda = 0$ ， $\mu = 0$ ，

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_3 = \frac{191}{2592}. \quad (53d)$$

對於其他的支承邊緣條件， $\lambda$  和  $\mu$  的值在下列區域內：

$$\frac{2}{1+\sigma} > \lambda > 0, \quad \frac{2}{1-\sigma} > \mu > 0. \quad (53e)$$

圖 8 表示在不同的邊緣條件下， $\sigma = 0.3$  時，中心撓度對壓力的曲線。

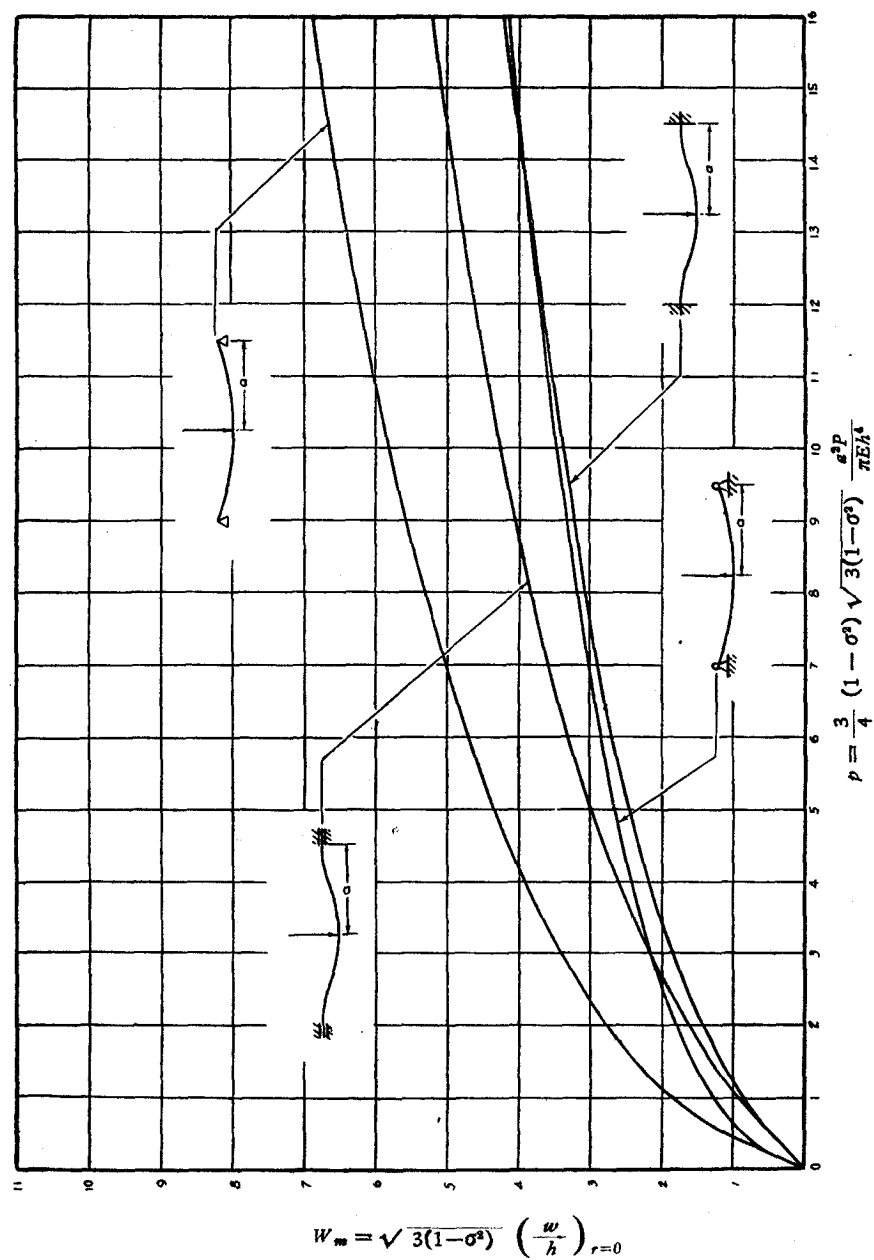


圖 8. 在不同邊緣條件下, ( $\sigma = 0.3$ ), 中心撓度對壓力的曲線.

上述特殊情形的中心撓度對壓力的設計公式 ( $\sigma = 0.3$ ) 是：

(i) 對於簡單支承，

$$p = 0.3939 W_m + 0.0393 W_m^3; \quad (54a)$$

(ii) 對於簡單鉸鏈支承，

$$p = 0.3939 W_m + 0.2062 W_m^3; \quad (54b)$$

(iii) 對於固定夾緊，

$$p = W_m + 0.1630 W_m^3; \quad (54c)$$

(iv) 對於可移夾緊，

$$p = W_m + 0.0737 W_m^3. \quad (54d)$$

對於如 (27) 式給出的不同的  $\lambda$  和  $\mu$ ，表 2 給出了  $\beta_1$  和  $\beta_3$  的值：

表 2. 對於不同的  $\mu$  和  $\lambda$  的  $\beta_1$  和  $\beta_3$  的值.

| $\beta_1, \beta_3$ | $\mu \backslash \lambda$ | 0      | 0.2    | 0.4    | 0.6    | 0.8    | 1.0    | 1.2    | 1.4    | 1.6    |
|--------------------|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\beta_3$ 值        | 0                        | 0.0737 | 0.0587 | 0.0508 | 0.0498 | 0.0434 | 0.0416 | 0.0405 | 0.0397 | 0.0391 |
|                    | 0.4                      | 0.0862 | 0.0719 | 0.0654 | 0.0660 | 0.0614 | 0.0612 | 0.0615 | 0.0621 | 0.0629 |
|                    | 0.8                      | 0.0987 | 0.0851 | 0.0800 | 0.0823 | 0.0793 | 0.0807 | 0.0826 | 0.0846 | 0.0867 |
|                    | 1.2                      | 0.1112 | 0.0983 | 0.0947 | 0.0986 | 0.0972 | 0.1002 | 0.1036 | 0.1070 | 0.1104 |
|                    | 1.6                      | 0.1237 | 0.1115 | 0.1093 | 0.1148 | 0.1151 | 0.1198 | 0.1246 | 0.1294 | 0.1342 |
|                    | 2.0                      | 0.1362 | 0.1247 | 0.1239 | 0.1311 | 0.1331 | 0.1393 | 0.1457 | 0.1519 | 0.1579 |
|                    | 2.4                      | 0.1487 | 0.1379 | 0.1385 | 0.1474 | 0.1510 | 0.1588 | 0.1667 | 0.1744 | 0.1817 |
|                    | 2.8                      | 0.1612 | 0.1511 | 0.1532 | 0.1636 | 0.1689 | 0.1784 | 0.1878 | 0.1969 | 0.2054 |
|                    | 3.2                      | 0.1737 | 0.1643 | 0.1678 | 0.1799 | 0.1868 | 0.1979 | 0.2088 | 0.2193 | 0.2292 |
| $\beta_1$ 值        |                          | 1      | 0.8333 | 0.7143 | 0.6250 | 0.5556 | 0.5000 | 0.4545 | 0.4167 | 0.3846 |

現在我們來求出平板中應力的表達式，令中性面的徑向拉伸應力  $\sigma_r'$  無量綱形式是  $\bar{\Sigma}_r'(y)$ ，平板凸面的徑向彎曲應力  $\sigma_r''$  的無量綱形式是  $\bar{\Sigma}_r''(y)$ ，或

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}_r'(y) &= \frac{3(1-\sigma^2)a^2}{Eh^2} \sigma_r' = \frac{3(1-\sigma^2)N_r a^2}{Eh^3} = S, \\ \bar{\Sigma}_r''(y) &= (1-\sigma^2) \sqrt{3(1-\sigma^2)} \frac{\sigma_r''}{Eh^2} = -2y \frac{d^2 W}{dy^2} - (1+\sigma) \frac{dW}{dy}. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

因此我們得到了下面的很有用的結果：

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_r'(1) &= \text{邊緣折合徑向拉伸應力} \\ &= \bar{K}_1 W_m^2 + \bar{K}_2 W_m^4, \quad (56a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_r'(0) &= \text{中心折合徑向拉伸應力} \\ &= \bar{K}_3 W_m^2 + \bar{K}_4 W_m^4, \quad (56b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_r''(1) &= \text{邊緣折合徑向彎曲應力} \\ &= \bar{K}_5 W_m + \bar{K}_6 W_m^3; \quad (56c)\end{aligned}$$

其中  $\bar{K}$  是包含  $\sigma$ ,  $\lambda$  和  $\mu$  的常係數, 它們各為:

$$\bar{K}_1 = \frac{\mu}{8(1+\lambda)^2} (1 + 2\lambda + 2\lambda^2), \quad (57a)$$

$$\begin{aligned}\bar{K}_2 &= \frac{\mu}{497664(1+\lambda)^4} \left[ 31473 + 118404\lambda + 136584\lambda^2 + 73440\lambda^3 + \right. \\ &\quad \left. + 15552\lambda^4 + 576\mu(13 + 65\lambda + 122\lambda^2 + 114\lambda^3 + 36\lambda^4) \right] + \\ &\quad + \frac{\mu}{4(1+\lambda)} \left[ (1+\lambda)\beta_3 - (1+2\lambda)A \right], \quad (57b)\end{aligned}$$

$$\bar{K}_3 = \frac{1}{8(1+\lambda)^2} \left[ 7 + 6\lambda + 2\lambda^2 + \mu(1 + 2\lambda + 2\lambda^2) \right], \quad (57c)$$

$$\bar{K}_4 = D, \quad (57d)$$

$$\bar{K}_5 = -\frac{1}{1+\lambda} \left[ 2 - (1+\sigma)\lambda \right], \quad (58a)$$

$$\begin{aligned}\bar{K}_6 &= \frac{1}{864(1+\lambda)^3} \left\{ 82 + 192\lambda + 180\lambda^2 + 72\lambda^3 + \right. \\ &\quad \left. + (1+\sigma)(283 + 444\lambda + 288\lambda^2 + 72\lambda^3) + \right. \\ &\quad \left. + \mu[54 + 216\lambda + 324\lambda^2 + 216\lambda^3 + \right. \\ &\quad \left. + (1+\sigma)(81 + 216\lambda + 270\lambda^2 + 108\lambda^3)] \right\} - \\ &\quad - 2\beta_3 - (1+\sigma)A. \quad (58b)\end{aligned}$$

圖 9, 10, 11 表示在不同邊緣條件下, 當  $\sigma = 0.3$  時, 中心和邊緣的折合應力 (折合徑向拉伸應力和折合徑向彎曲應力) 對中心撓度的曲線。

當  $\sigma = 0.3$  時, 上述特殊情形的中心撓度對折合應力的設計公式是:

(i) 對於簡單支承,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}'_r(1) &= 0, \\ \bar{\Sigma}'_r(0) &= 0.4067 W_m^2 + 0.0026 W_m^4, \\ \bar{\Sigma}''_r(1) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (59a)$$

(ii) 對於簡單鉸鏈支承,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}'_r(1) &= 0.4883 W_m^2 + 0.0367 W_m^4, \\ \bar{\Sigma}'_r(0) &= 0.8950 W_m^2 + 0.0154 W_m^4, \\ \bar{\Sigma}''_r(1) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (59b)$$

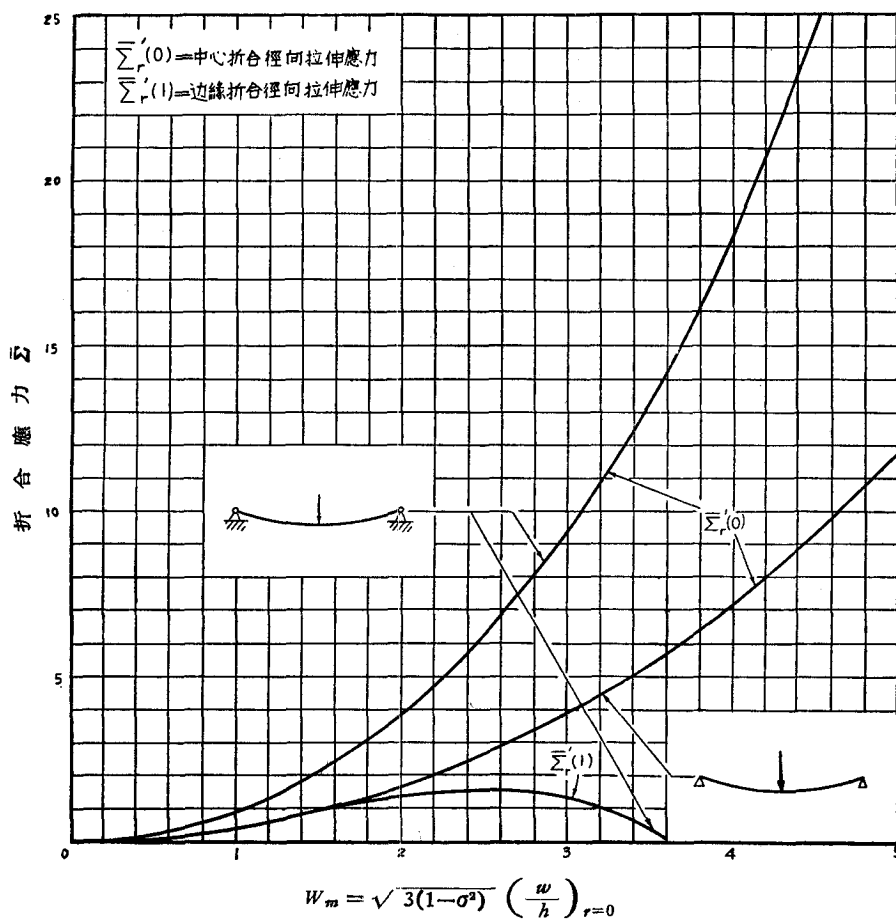


圖 9. 邊緣簡單支承和邊緣鉸鏈支承, 中心撓度對折合應力的曲線 ( $\sigma = 0.3$ ).

(iii) 對於固定夾緊,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}'_r(1) &= 0.3571 W_m^2 - 0.0054 W_m^4, \\ \bar{\Sigma}'_r(0) &= 1.2321 W_m^2 + 0.0185 W_m^4, \\ \bar{\Sigma}''_r(1) &= -2W_m - 0.0525 W_m^3; \end{aligned} \right\} \quad (59c)$$

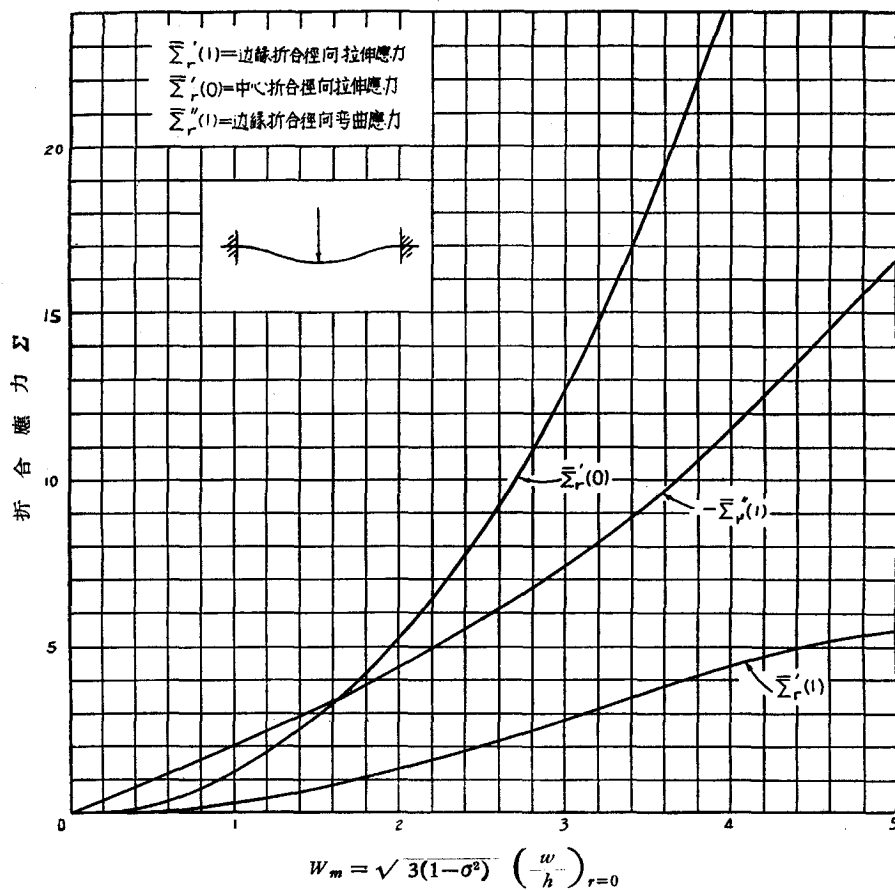
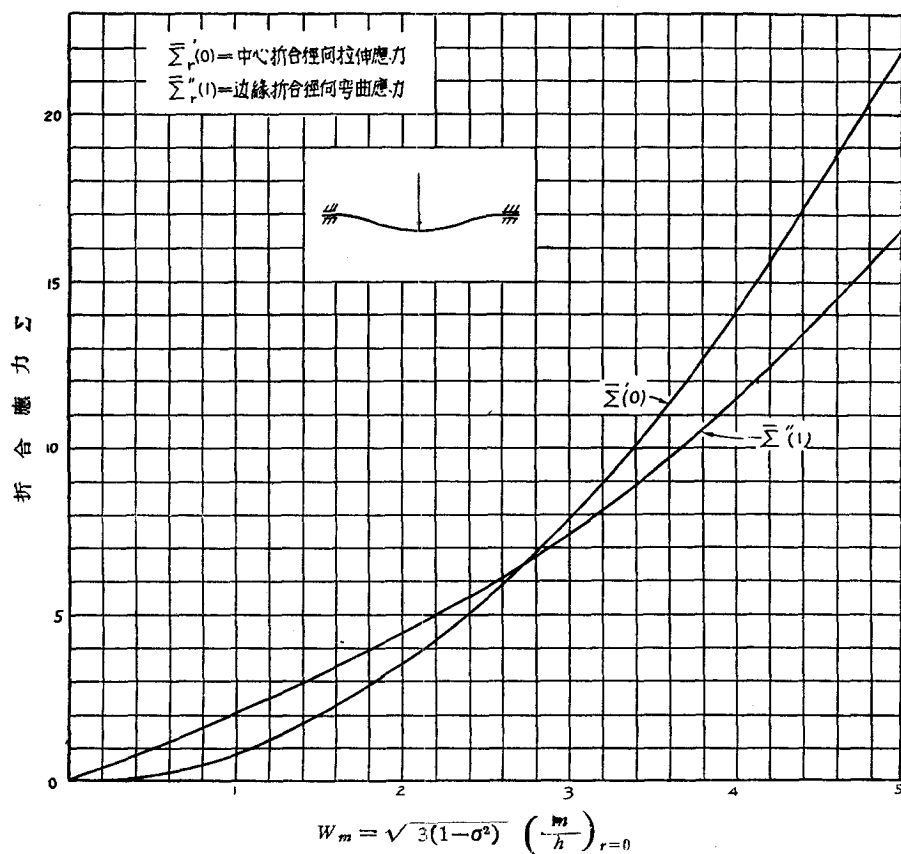


圖 10. 邊緣固定夾緊, 中心撓度對折合應力的曲線 ( $\sigma = 0.3$ ).

(iv) 對於可移夾緊，

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}'_r(1) &= 0, \\ \bar{\Sigma}'_r(0) &= 0.8750 W_m^2 - 0.0001 W_m^4, \\ \bar{\Sigma}''_r(1) &= -2W_m - 0.0525 W_m^3. \end{aligned} \right\} \quad (59d)$$

圖 11. 邊緣可移夾緊，中心撓度對折合應力的曲線 ( $\sigma = 0.3$ )。

## 參 考 文 獻

- [1] von Kármán, Th., The engineer grapples with non-linear problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 615-683.
- [2] Way, S., Bending of circular plate with large deflection. *A.S.M.E. Transactions, Applied Mechanics*, **56** (1934), 627-636.
- [3] Levy, S., Bending of rectangular plate with large deflections, *N.A.C.A. Report*, No. 737, 1942.
- [4] Chien Wei-zang (錢偉長) Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure. *Chinese Journal of Physics*, **7** (1947), 102-113.
- [5] 葉開沅, 邊緣載荷下環形薄板大撓度問題. *物理學報*, **9** (1953), 110-129; *中國科學*, **2** (1953), 127-144.

## ON THE LARGE DEFLECTION OF CIRCULAR PLATE

CHIEH WEI-ZANG

*(Tsing Hua University, and Institute of Mathematics, Academia Sinica)*

YEH KAI-YUAN

*(Peking University)*

### ABSTRACT

Equations for the large deflection of thin plate established by Th. von Kármán has been well known for many years. But so far there have been only a few problems studied with numerical certainty. S. Way was the first to apply these equations to solve the problem of a clamped plate under uniform pressure by the method of power series. After this, S. Levy found the solution of the simply supported rectangular plate under uniform load by the method of double trigonometric series. Both methods are too labourious to be applicable to other more important cases. Lately, Chien Wei-zang treated Way's problem again by means of the perturbation method and obtained excellent results. By the method as given by Chien Wei-zang, Yeh Kai-yuan worked out the problem of circular plate with a central hole under central concentrated load.

In this paper, more results are given for various circular plates under various edge conditions. These include uniformly loaded circular plate under various edge conditions (section 2) and central concentrated loaded circular plate under various edge conditions (section 3). Such edge conditions are: (1) simply supported, (2) simply hinged, (3) rigidly clamped, (4) clamped but free to slip, (5) edge clamped but with possible slipping in horizontal direction, (6) edge simply supported but elastically fastened, and (7) edge clamped in elastic wall.

All these results are presented in such a form that direct application in design problem is possible. In particular cases, under edge conditions (1) to (4), as  $\sigma=0.3$ , design formulae and curves for central deflection, radial tensile stress and radial bending stress are presented.