

橫觀各向同性的半無限彈性 體的若干問題*

胡海昌

(中國科學院數學研究所)

一. 引言

作者在前文 [1] 裏求得了橫觀各向同性體的彈性力學空間問題的通解，並且作了初步應用。本文的目的在應用前文的通解來具體地討論橫觀各向同性的半無限體（假定物體的各向同性面與它的表面平行）的若干問題。這些問題是實用上比較重要的問題，包括：(i) 已知半無限體表面上的載荷；(ii) 已知表面上各點的位移；(iii) 已知表面上各點的法應力和切向位移；(iv) 已知表面上各點的切應力和法向位移；(v) 剛印與半無限體的接觸問題；(vi) 彈性薄板在半無限體上的彎曲問題。

在各向同性的半無限體的場合，上列問題 (i) — (v) 最早由波西涅斯克 (Boussinesq) 和切魯提 (Cerruti) 加以詳細的研究，見書 [2] 和 [3]。至於彈性薄板在各向同性的半無限彈性體上的彎曲問題，近來在蘇聯研究得很多，詳情可參考 Г. Ю. 詹涅里傑著的一篇概述性的著作 [4]。

橫觀各向同性的半無限體的問題，首先由米恰耳加以簡略的討論。他在著作 [5] 中求得了在半無限體表面上有一個集中法載荷作用時的解答。之後到 1940 年，С. Г. 列赫尼茨基在全面地研究了橫觀各向同性的旋轉體的軸對稱問題（見 [6]）之後，詳細地討論了半無限體在已知對稱表面法載荷作用下的問題。他再一次求得了半無限體上有一個集中法載荷作用時的解答。С. Г. 列赫尼茨基的這些結果，後來又收集在他的書 [7] 中。

* 1954 年 6 月 1 日收到。

我們發現,假若在問題 (v) 和 (vi) 中可以略去剛印或板與半無限體間的摩擦力,那末這兩個問題和相當的各向同性問題有一個簡單的對應關係. 特別是當印底表面是一平面時,印底壓力的分佈情況便和半無限體的彈性係數無關. 利用這個簡單的對應關係,使我們能夠從每一個各向同性問題的解答,簡便地引出對應的橫觀各向同性問題的解答.

在相當的平面問題中,Г. Н. 沙文 (Савин) 發現與上述相似的對應關係,例如見 М. М. 弗里德曼的一篇概述性的著作 [8], 或見 Л. А. 伽林的專論 [9].

二. 適用於討論半無限體的解

今設有一個橫觀各向同性的半無限體,它的表面與它的各向同性面平行. 取一直角坐標系 (x, y, z) , 使 xy 面即為半無限體的表面,而 z 軸指向半無限體的外部.

半無限體的廣義虎克定律可寫為:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, & \tau_{yz} &= A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \sigma_y &= A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, & \tau_{xz} &= A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \sigma_z &= A_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, & \tau_{xy} &= A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中

$$A_{66} = \frac{1}{2} (A_{11} - A_{12}). \quad (2)$$

若用前文 [1] 引進的 B 作為係數,即若命

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= A_{11}, & B_{33} &= A_{33}, & B_{44} &= A_{44}, & B_{66} &= A_{66}, \\ B_{12} &= A_{12} + A_{66}, & B_{13} &= A_{13} + A_{44}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中

$$B_{66} = B_{11} - B_{12}; \quad (4)$$

則廣義虎克定律 (1) 可改寫為:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (B_{12} - B_{66}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 B_{66} \frac{\partial u}{\partial x} + (B_{13} - B_{44}) \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_y &= (B_{12} - B_{66}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 B_{66} \frac{\partial v}{\partial y} + (B_{13} - B_{44}) \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_z &= (B_{13} - B_{44}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + B_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{yz} &= B_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{xz} &= B_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \tau_{xy} &= B_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

在前文 [1] 中我們已經證明位移的通解可用兩個無向函數 F 和 φ 表示如下：

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ w &= \alpha \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

F 和 φ 分別適合方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{s_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (8)$$

在 (6), (7), (8) 三式中出現的常數的意義如下：

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{B_{11}}{B_{13}}, \quad \gamma = \frac{B_{44}}{B_{13}}, \quad s_0^2 = \frac{B_{66}}{B_{44}}, \\ s_1^2 &= \frac{B_{44} + B_{11} B_{33} - B_{13}^2 + \sqrt{(B_{44} + B_{11} B_{33} - B_{13}^2)^2 - 4 B_{11} B_{33} B_{44}}}{2 B_{33} B_{44}}, \\ s_2^2 &= \frac{B_{44} + B_{11} B_{33} - B_{13}^2 - \sqrt{(B_{44} + B_{11} B_{33} - B_{13}^2)^2 - 4 B_{11} B_{33} B_{44}}}{2 B_{33} B_{44}}. \end{aligned}$$

公式 (6) 的表示法是最一般的, 在討論半無限體的問題時尚可作適當的簡化. 設 $f_i(x, y, z)$ ($i=1, 2$) 是 (x, y, z) 的調和函數, 若命

$$F_i(x, y, z) = f_i(x, y, s_i z) \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

則顯而易見

$$F = F_1 + F_2 \quad (10)$$

是方程 (7) 的解. 但是這個解並不是方程 (7) 的全解, 因為除此之外, 還有一類解不能包含在 (10) 式中. 這類解的形式如下:

$$F(x, y, z) = B_0(x, y) + z B_1(x, y), \quad (11)$$

其中 B_0 和 B_1 是只包含 (x, y) 的雙調和函數. 如果假定在無窮遠處的應力為零, 那末在本文所討論的問題中便不能有像 (11) 式的解. 因此適用於討論半無限體的 F 的解是 (10) 式. 如果命

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} = \varphi_i(x, y, z) \quad (i = 1, 2), \quad (12)$$

而把公式 (6) 和方程 (8) 中的 φ 改叫做 φ_0 , 則 (6) 式簡化為:

$$\left. \begin{aligned} u &= - \sum_{i=1,2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \\ v &= - \sum_{i=1,2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \\ w &= - \sum_{i=1,2} \frac{\alpha - \gamma s_i^2}{s_i^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中 $\varphi_j(x, y, z)$ ($j=0, 1, 2$) 是由三個 (x, y, z) 的調和函數 $\phi_j(x, y, z)$ 變換而得的函數,

$$\varphi_j(x, y, z) = \phi_j(x, y, s_j z), \quad (j = 0, 1, 2). \quad (14)$$

相當於這組位移的應力是:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} \frac{q_i}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} - 2 \left\{ \sum_{i=1,2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} \right\}, \\ \frac{\sigma_y}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} \frac{q_i}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} - 2 \left\{ \sum_{i=1,2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} \right\}, \\ \frac{\sigma_z}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} \frac{k_i}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}, \\ \frac{\tau_{yz}}{B_{66}} &= -\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\tau_{xz}}{B_{66}} &= -\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\tau_{xy}}{B_{66}} &= -2 \sum_{i=1,2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2}; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{\alpha - 2\gamma s_0^2 - (1-\gamma)(\alpha - \gamma s_i^2)}{\gamma s_0^2}, \\ k_i &= \frac{1 - \gamma - \beta(\alpha - \gamma s_i^2)}{\gamma s_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

公式 (13), (15) 便是本節所欲求的適用於討論半無限體的解答。

在討論具體問題時，我們特別關心在半無限體表面上各點的位移和應力。我們用記號 $()_0$ 表示某函數當 $z=0$ 時的數值。因為當 $z=0$ 時，由 (14) 式聯系的應力函數 φ_i 和調和函數 ϕ_i 有下面的關係：

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_i)_0 &= (\phi_i)_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)_0 = s_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)_0, \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right)_0 &= s_i^2 \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \right)_0 \quad (i = 0, 1, 2); \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

所以表面上各點的位移和應力亦可用調和函數 ϕ_i 表示如下：

$$\left. \begin{aligned} (u)_0 &= - \sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right)_0, \\ (v)_0 &= - \sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)_0, \\ (w)_0 &= - \sum_{i=1,2} \frac{\alpha - \gamma s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)_0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{(\sigma_x)_0}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} q_i \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right)_0 - 2 \left\{ \sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} \right)_0 \right\}, \\
 \frac{(\sigma_y)_0}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} q_i \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right)_0 - 2 \left\{ \sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} \right)_0 \right\}, \\
 \frac{(\sigma_z)_0}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} k_i \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \right)_0, \\
 \frac{(\tau_{yz})_0}{B_{66}} &= -\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y \partial z} \right)_0 + s_0 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial z} \right)_0, \\
 \frac{(\tau_{xz})_0}{B_{66}} &= -\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial z} \right)_0 - s_0 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y \partial z} \right)_0, \\
 \frac{(\tau_{xy})_0}{B_{66}} &= -2 \sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right)_0.
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

這兩組公式將作為此後數節討論的出發點。

我們再來討論一下函數 φ_j 和 ϕ_j ($j=0, 1, 2$) 在無窮遠處的性質。我們假定作用在表面上的載荷的合力和合力矩是一個有限的數量，並且載荷的分佈頗集在原點附近。這樣在無窮遠處的應力最大亦頂多與 $r^{-2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$ 同級大小。由此可知， φ_j 和 ϕ_j 在無窮遠處的數值頂多與 $\log r$ 同級大小。

三. 半無限體在其表面負担已知法載荷

為了簡便起見，我們將半無限體在其表面負担已知載荷的問題分解為兩類。在第一類，只有法載荷而無切載荷；在第二類，則只有切載荷而無法載荷。本節先討論第一類問題。

設 $N(x, y)$ 為作用在半無限體表面上的已知法載荷（以逆 z 軸向作用者為正）。在本問題中，邊界條件為：

$$(\tau_{xz})_0 = 0, \quad (\tau_{yz})_0 = 0, \quad (\sigma_z)_0 = -N(x, y). \quad (20)$$

將公式 (19) 代入此式，我們得調和函數 ϕ_j ($j=0, 1, 2$) 的三個邊界條件如下：

$$-\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial z} \right)_0 - s_0 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y \partial z} \right)_0 = 0, \quad (21-a)$$

$$-\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y \partial z} \right)_0 + s_0 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial z} \right)_0 = 0, \quad (21-b)$$

$$\sum_{i=1,2} k_i \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \right)_0 = -\frac{N(x, y)}{B_{66}}. \quad (21-c)$$

將 (21-a) 對 y 微分一次, 將 (21-b) 對 x 微分一次, 然後從後者減去前者, 得

$$\left(\frac{\partial^3 \phi_0}{\partial x^2 \partial z} \right)_0 + \left(\frac{\partial^3 \phi_0}{\partial y^2 \partial z} \right)_0 = 0. \quad (22)$$

由此可知

$$\phi_0 = 0. \quad (23)$$

這樣, 爲了滿足 (21-a) 和 (21-b), 我們只需命

$$\sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)_0 = 0. \quad (24)$$

由此式可知

$$\frac{\alpha + (1-\gamma) s_1^2}{s_1} \phi_1 + \frac{\alpha + (1-\gamma) s_2^2}{s_2} \phi_2 = 0. \quad (25)$$

設

$$k_1 \phi_1 + k_2 \phi_2 = \phi. \quad (26)$$

從 (25), (26) 兩式解 ϕ_1 和 ϕ_2 , 我們得到

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{s_1 [\alpha + (1-\gamma) s_2^2] \phi}{s_2 k_2 [\alpha + (1-\gamma) s_1^2] - s_1 k_1 [\alpha + (1-\gamma) s_2^2]}, \\ \phi_2 &= \frac{s_2 [\alpha + (1-\gamma) s_1^2] \phi}{s_2 k_2 [\alpha + (1-\gamma) s_1^2] - s_1 k_1 [\alpha + (1-\gamma) s_2^2]}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

函數 ϕ 仍舊是調和函數, 它應適合邊界條件

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_0 = -\frac{N(x, y)}{B_{66}}. \quad (28)$$

根據這個邊界條件, 可將 ϕ 用一積分表示. 設

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}, \quad (29)$$

把 $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ 看作是一個調和函數, 那末從 (28) 式我們可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi B_{66}} \iint \frac{N(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta. \quad (30)$$

將此式再按 z 積分一次, 並保持被積函數仍是 (x, y, z) 的調和函數, 我們最後得 ϕ 的算式如下:

$$\phi = \frac{1}{2\pi B_{66}} \iint N(\xi, \eta) \log(r - z) d\xi d\eta. \quad (31)$$

從此式求得 ϕ 後, 便可根據 (27) 式求得 ϕ_1 和 ϕ_2 . 於是最後便可從 (14) 式求得應力函數 φ_1 和 φ_2 . 因為在本問題中 $\varphi_0 = 0$, 所以位移和應力的公式 (13) 和 (15) 簡化為:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\sum_{i=1,2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \\ v &= -\sum_{i=1,2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \\ w &= -\sum_{i=1,2} \frac{\alpha - \gamma s_i^2}{s_i^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (32-a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} \frac{q_i}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} - 2 \sum_{i=1,2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}, \\ \frac{\sigma_y}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} \frac{q_i}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - 2 \sum_{i=1,2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}, \\ \frac{\sigma_z}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} \frac{k_i}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}, \\ \frac{\tau_{yz}}{B_{66}} &= -\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\tau_{xz}}{B_{66}} &= -\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\tau_{xy}}{B_{66}} &= -2 \sum_{i=1,2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (32-b)$$

例如在有一個集中法載荷 P 作用於原點的時候, 從 (30) 式立刻可得

$$\phi(x, y, z) = \frac{P}{2\pi B_{66}} \log(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z). \quad (33)$$

因此應力函數 φ_1 和 φ_2 爲：

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= -\frac{s_1 [\alpha + (1-\gamma) s_2^2]}{s_2 k_2 [\alpha + (1-\gamma) s_1^2] - s_1 k_1 [\alpha + (1-\gamma) s_2^2]} \times \\ &\quad \times \frac{P}{2\pi B_{66}} \log(\sqrt{x^2 + y^2 + s_1^2 z^2} - s_1 z), \\ \varphi_2(x, y, z) &= \frac{s_2 [\alpha + (1-\gamma) s_1^2]}{s_2 k_2 [\alpha + (1-\gamma) s_1^2] - s_1 k_1 [\alpha + (1-\gamma) s_2^2]} \times \\ &\quad \times \frac{P}{2\pi B_{66}} \log(\sqrt{x^2 + y^2 + s_2^2 z^2} - s_2 z). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

四. 半無限體在其表面負担已知切載荷

現在我們來討論半無限體在其表面負担已知切載荷的問題。設 $T_x(x, y)$, $T_y(x, y)$ 爲沿 x, y 軸向的已知切載荷。本問題中的邊界條件爲

$$(\tau_{xz})_0 = T_x(x, y), \quad (\tau_{yz})_0 = T_y(x, y), \quad (\sigma_z)_0 = 0. \quad (35)$$

將公式 (19) 代入此式，我們得調和函數 $\phi_j (j=0, 1, 2)$ 的三個邊界條件如下：

$$-\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial z} \right)_0 - s_0 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y \partial z} \right)_0 = \frac{T_x(x, y)}{B_{66}}, \quad (36-a)$$

$$-\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y \partial z} \right)_0 + s_0 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial z} \right)_0 = \frac{T_y(x, y)}{B_{66}}, \quad (36-b)$$

$$\sum_{i=1,2} k_i \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right)_0 = 0. \quad (36-c)$$

從邊界條件 (36-c) 可知

$$k_1 \phi_1 + k_2 \phi_2 = 0. \quad (37)$$

設

$$\frac{1}{s_0^2} \left\{ \frac{\alpha + (1-\gamma) s_1^2}{s_1} \phi_1 + \frac{\alpha + (1-\gamma) s_2^2}{s_2} \phi_2 \right\} = \psi, \quad (38)$$

從 (37), (38) 式解 ϕ_1 和 ϕ_2 得

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{k_2 s_1 s_2 s_0^2 \psi}{k_2 s_2 [\alpha + (1-\gamma) s_1^2] - k_1 s_1 [\alpha + (1-\gamma) s_2^2]}, \\ \phi_2 &= - \frac{k_1 s_1 s_2 s_0^2 \psi}{k_2 s_2 [\alpha + (1-\gamma) s_1^2] - k_1 s_1 [\alpha + (1-\gamma) s_2^2]}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

將 (38) 式代入 (36-a), (36-b), 我們得 ψ 和 ϕ_0 聯合適合的邊界條件如下:

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}\right)_0 - s_0 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y \partial z}\right)_0 &= \frac{T_x(x, y)}{B_{66}}, \\ -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}\right)_0 + s_0 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial z}\right)_0 &= \frac{T_y(x, y)}{B_{66}}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

暫時假定 T_x 和 T_y 都可以對 x 或 y 微分一次. 在這樣的條件下, 從 (40) 式可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial z}\right)_0 &= -\frac{1}{B_{66}} \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y}\right), \\ s_0 \left\{ \left(\frac{\partial^3 \phi_0}{\partial x^2 \partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3 \phi_0}{\partial y^2 \partial z}\right)_0 \right\} &= \frac{1}{B_{66}} \left(\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

因為 ψ 和 ϕ_0 都是調和函數, 所以上式亦即為

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}\right)_0 &= \frac{1}{B_{66}} \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y}\right), \\ \left(\frac{\partial^3 \phi_0}{\partial x^3}\right)_0 &= -\frac{1}{s_0 B_{66}} \left(\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y}\right). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

在 (41) 式的第一式把 $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ 看作是一個調和函數, 我們得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi B_{66}} \iint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_x(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial T_y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta; \quad (42)$$

式中 r 的意義仍由 (29) 式規定. 我們假定在無窮遠處 T_x 和 T_y 都等於零, 於是用格林公式變換 (42) 式右端的積分, 得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi B_{66}} \iint \frac{1}{r^2} \left\{ T_x(\xi, \eta) \frac{\partial r}{\partial \xi} + T_y(\xi, \eta) \frac{\partial r}{\partial \eta} \right\} d\xi d\eta,$$

即

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi B_{66}} \iint \frac{(\xi-x) T_x(\xi, \eta) + (\eta-y) T_y(\xi, \eta)}{r^3} d\xi d\eta. \quad (43)$$

在此式再按 z 連續積分兩次, 並保持被積函數仍為 (x, y, z) 的調和函數, 我們得

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{2\pi B_{66}} \iint \frac{(\xi-x) T_x(\xi, \eta) + (\eta-y) T_y(\xi, \eta)}{r(r-z)} d\xi d\eta, \quad (44-a)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi B_{66}} \iint \frac{(\xi-x) T_x(\xi, \eta) + (\eta-y) T_y(\xi, \eta)}{r-z} d\xi d\eta. \quad (44-b)$$

同樣, 從 (41) 式的第二式出發, 我們可得

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} = -\frac{1}{2\pi s_0 B_{66}} \iint \frac{(\xi-x) T_y(\xi, \eta) - (\eta-y) T_x(\xi, \eta)}{r^3} d\xi d\eta, \quad (45-a)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi s_0 B_{66}} \iint \frac{(\xi-x) T_y(\xi, \eta) - (\eta-y) T_x(\xi, \eta)}{r(r-z)} d\xi d\eta, \quad (45-b)$$

$$\phi_0 = -\frac{1}{2\pi s_0 B_{66}} \iint \frac{(\xi-x) T_y(\xi, \eta) - (\eta-y) T_x(\xi, \eta)}{r-z} d\xi d\eta. \quad (45-c)$$

公式 (43)–(45) 已不包含 T_x 和 T_y 的導數。用還原法可以證明這些公式在 T_x 和 T_y 不能微分時亦成立的。這樣公式 (44-b) 和 (45-c) 便是調和函數 ψ 和 ϕ_0 的一般算式。

從 (44-b) 和 (45-c) 求得 ψ 和 ϕ_0 後, 便可根據公式 (39) 和 (14) 計算應力函數 $\varphi_j (j=0, 1, 2)$ 。

例如在一個集中切載荷作用於原點的場合, 設 P_x, P_y 為集中載荷沿 x, y 軸的分量, 從公式 (44-b) 和 (45-c) 得

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{2\pi B_{66}} \cdot \frac{x P_x + y P_y}{r-z}, \\ \phi_0 &= \frac{1}{2\pi s_0 B_{66}} \cdot \frac{x P_y - y P_x}{r-z}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

五. 其他三種場合

在本節我們將討論三種場合：(i) 已知半無限體表面上各點的位移；(ii) 已知表面上各點的法應力和切向位移；(iii) 已知表面上各點的切應力和法向位移。

1. 已知半無限體表面上各點的位移 設 $U(x, y)$, $V(x, y)$, $W(x, y)$ 為已知的表面上各點的位移，則本問題的邊界條件為

$$(u)_0 = U(x, y), \quad (v)_0 = V(x, y), \quad (w)_0 = W(x, y). \quad (47)$$

將公式 (18) 代入此式，得調和函數 $\phi_j (j=0, 1, 2)$ 的邊界條件如下：

$$-\sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right)_0 = U(x, y), \quad (48-a)$$

$$-\sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)_0 = V(x, y), \quad (48-b)$$

$$-\sum_{i=1,2} \frac{\alpha - \gamma s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)_0 = W(x, y). \quad (48-c)$$

從 (48-c) 式可得

$$\sum_{i=1,2} \frac{\alpha - \gamma s_i^2}{s_i} \phi_i = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{W(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta. \quad (49)$$

從 (48-a), (48-b) 出發，採用和第四節相同的方法，不難求得 [參考公式 (44-a) 和 (45-b)]

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{(\xi-x) U(\xi, \eta) + (\eta-y) V(\xi, \eta)}{r(r-z)} d\xi d\eta. \quad (50)$$

$$\phi_0 = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{(\xi-x) V(\xi, \eta) - (\eta-y) U(\xi, \eta)}{r(r-z)} d\xi d\eta. \quad (51)$$

從 (49), (50) 兩式便可解得 ϕ_1 和 ϕ_2 。

2. 已知半無限體表面上各點的法應力和切向位移 設 $N(x, y)$ 為已知的表面法載荷， $U(x, y)$, $V(x, y)$ 為已知的表面切向位移。本問題的邊界條件為

$$(\sigma_z)_0 = -N(x, y), \quad (u)_0 = U(x, y), \quad (v)_0 = V(x, y). \quad (52)$$

將公式 (19) 和 (18) 代入此式, 得

$$\sum_{i=1,2} k_i \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right)_0 = - \frac{N(x, y)}{B_{66}}, \quad (53-a)$$

$$- \sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right)_0 = U(x, y), \quad (53-b)$$

$$- \sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)_0 = V(x, y). \quad (53-c)$$

從 (53-a) 可得 [參考公式 (31)]

$$k_1 \phi_1 + k_2 \phi_2 = \frac{1}{2\pi B_{66}} \iint N(\xi, \eta) \log(r - z) d\xi d\eta. \quad (54)$$

(53-b), (53-c) 和 (48-a), (48-b) 相同, 因此從這兩式我們可得 (50), (51) 兩式. 從 (50), (54) 便可求出 ϕ_1 和 ϕ_2 .

如果 $U=V=0$, 則

$$\phi_1 + \phi_2 = 0, \quad \phi_0 = 0. \quad (55)$$

所以在這種場合, 位移和應力的公式簡化為 (32) 式.

3. 已知半無限體表面上各點的切應力和法向位移 在這種場合, 問題的邊界條件是

$$(\tau_{xz})_0 = T_x(x, y), \quad (\tau_{yz})_0 = T_y(x, y), \quad (w)_0 = W(x, y), \quad (56)$$

而調和函數 $\phi_i (i=0, 1, 2)$ 的邊界條件為:

$$- \frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial z} \right)_0 - s_0 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y \partial z} \right)_0 = \frac{T_x(x, y)}{B_{66}}, \quad (57-a)$$

$$- \frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y \partial z} \right)_0 + s_0 \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial z} \right)_0 = \frac{T_y(x, y)}{B_{66}}, \quad (57-b)$$

$$- \sum_{i=1,2} \frac{\alpha - \gamma s_i^2}{s_i} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)_0 = W(x, y). \quad (57-c)$$

因爲 (57-a), (57-b) 與 (36-a), (36-b) 相同, 所以我們可利用第四節的結果, 這樣得 [參考公式 (44-b) 和 (45-c)]

$$\frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i} \phi_i = \frac{1}{2\pi B_{66}} \iint \frac{(\xi-x) T_x(\xi, \eta) + (\eta-y) T_y(\xi, \eta)}{r-z} d\xi d\eta, \quad (58)$$

$$\phi_0 = -\frac{1}{2\pi s_0 B_{66}} \iint \frac{(\xi-x) T_y(\xi, \eta) - (\eta-y) T_x(\xi, \eta)}{r-z} d\xi d\eta. \quad (59)$$

又因爲 (57-c) 和 (48-c) 相同, 所以從 (57-c) 式我們仍得 (49) 式. ϕ_1 和 ϕ_2 可從 (49), (58) 兩式解得.

六. 半無限彈性體與剛印的接觸問題

今試考慮橫觀各向同性的半無限彈性體與剛印的接觸問題. 設剛印與半無限體的接觸面在 xy 面上的投影是 s , 如圖 1 所示. 我們假定印底的表面是相當扁平圓滑的, 這亦就是說, 若命印底表面的方程爲

$$z = -g(x, y) + \text{常數}, \quad (60)$$

則

$$\left| l \frac{\partial g}{\partial x} + m \frac{\partial g}{\partial y} \right| \ll 1. \quad (61)$$

在本文中, 我們假定剛印與半無限體間的摩擦力很小很小, 以致可以略去不計. 於是設 P 是作用於印上的外力的合力, M_x 和 M_y 是作用於印上的外力對於 x

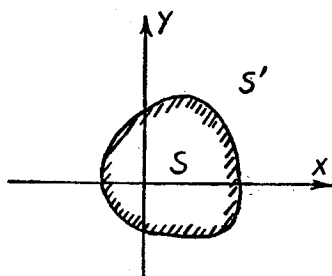


圖 1.

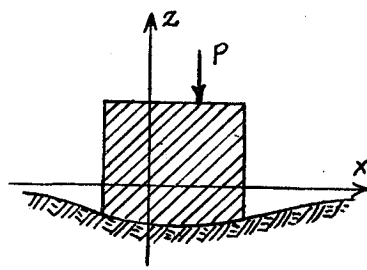


圖 2.

和 y 軸的合力矩, 則所設問題的邊界條件是 (s' 是在平面 $z=0$ 上除去 s 後所得的區域, 見圖 1):

$$\text{在 } S + S' \text{ 上: } (\tau_{xz})_0 = 0, (\tau_{yz})_0 = 0; \quad (62-a)$$

$$\text{在 } S' \text{ 上: } (\sigma_z)_0 = 0; \quad (62-b)$$

$$\text{在 } S \text{ 上: } (w)_0 = -\{g(x, y) + Ax + By + C\}; \quad (62-c)$$

$$\iint_S (\sigma_x)_0 dx dy = -P, \iint_S y(\sigma_x)_0 dx dy = M_x, \iint_S x(\sigma_x)_0 dx dy = -M_y. \quad (62-d)$$

在此式中 A, B, C 是決定剛印沉陷的未知常數,三者都是外力 P, M_x, M_y 的函數.

邊界條件 (62-a) 表明在半無限體表面上只有法應力(不過它的分佈情況是預先不知道的)而無切應力,因此第三節所得的許多結論,便可移用於本節. 由此可知調和函數 ϕ_0 等於零而其他兩個調和函數 ϕ_1 和 ϕ_2 則可用另外一個調和函數 ϕ 表示,如公式 (27). 設 $p(x, y)$ 為剛印與半無限體間的壓力,根據公式 (28) 和 (31), ϕ 和 p 的關係為

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)_0 = -\frac{p(x, y)}{B_{66}}, \quad (63)$$

$$\phi = \frac{1}{2\pi B_{66}} \iint_S p(\xi, \eta) \log(r-z) d\xi d\eta. \quad (64)$$

在公式 (18) 中命 $\phi_0=0$, 並將公式 (27) 代入,得半無限體表面上各點的法向位移 $(w)_0$ 與 ϕ 的關係如下:

$$(w)_0 = \frac{B_{66}}{\kappa} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_0, \quad (65)$$

其中

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{s_2 k_2 [\alpha + (1-\gamma) s_1^2] - s_1 k_1 [\alpha + (1-\gamma) s_2^2]}{\alpha(s_2^2 - s_1^2)} B_{66} = \\ &= \frac{\alpha(1-\gamma-\alpha\beta) + \alpha\beta\gamma(s_1+s_2)^2 - [(1-2\gamma)\alpha\beta - (1-\gamma)^2] s_1 s_2 + \beta\gamma(1-\gamma)s_1^2 s_2^2}{\alpha\gamma s_0^2(s_1+s_2)} B_{66}. \end{aligned} \quad (66)$$

若再將公式 (64) 代入 (65), 則得

$$(w)_0 = -\frac{1}{2\pi\kappa} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{r_0} d\xi d\eta, \quad (67)$$

其中

$$r_0 = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}. \quad (68)$$

將算式 (65) 和 (67) 代入邊界條件 (62-c), 我們得

$$\text{在 } S \text{ 上: } \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 = -\frac{\kappa}{B_{66}} \left\{ g(x, y) + Ax + By + C \right\}, \quad (69)$$

$$\text{在 } S \text{ 上: } \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{r_0} d\xi d\eta = \kappa \left\{ g(x, y) + Ax + By + C \right\}. \quad (70)$$

所以總結起來說, 在略去摩擦力不計的條件下, 半無限彈性體與剛印的接觸問題在數學上化為求解積分方程 (70), 從這個方程可立即求得印底的壓力, 或者化為根據邊界條件

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } S' \text{ 上: } \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_0 &= 0, \\ \text{在 } S \text{ 上: } \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0 &= -\frac{\kappa}{B_{66}} \left\{ g(x, y) + Ax + By + C \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

找尋調和函數 ϕ , 這是調和函數的混合邊值問題。

今試考慮兩個橫觀各向同性的半無限體的接觸問題。我們在外文字母上加一橫以表示第二個問題中的各函數。假定這兩個問題中的接觸面在 xy 面上的投影完全相同, 但是半無限體的彈性係數則可不同。從積分方程 (70) 和邊界條件 (62-d) 我們可以看出, 假如在這兩個問題中

$$\kappa g(x, y) = \bar{\kappa} \bar{g}(x, y), \quad P = \bar{P}, \quad M_x = \bar{M}_x, \quad M_y = \bar{M}_y, \quad (72)$$

那末便有

$$p(x, y) = \bar{p}(x, y), \quad \kappa A = \bar{\kappa} \bar{A}, \quad \kappa B = \bar{\kappa} \bar{B}, \quad \kappa C = \bar{\kappa} \bar{C}, \quad B_{66} \phi = \bar{B}_{66} \bar{\phi}. \quad (73)$$

這就是說, 假若作用於剛印上的外力相同, 而印底表面的方程又適合關係式

$$\kappa g(x, y) = \bar{\kappa} \bar{g}(x, y), \quad (74)$$

那末印底壓力的分佈便相同, 而剛印的沉陷 (即常數 A, B, C) 跟 κ 成反比。

利用這個對應關係, 使我們能夠從每一個各向同性的半無限彈性體的接觸間

題的解答，簡便地引出相當的橫觀各向同性問題的解答。特別是當印底是一平面的時候，因為這時條件 (74) 一定成立，根據這個對應關係可知印底壓力的分佈情況跟半無限體的彈性係數無關。

七. 彈性薄板在半無限體上的彎曲問題

今設在半無限體上有一彈性薄板，外界載荷係經過薄板間接地作用於半無限體上。設 D 是薄板的抗彎剛度， $q(x, y)$ 是作用於薄板上的外力， $p(x, y)$ 是薄板與半無限體間的壓力。我們假定薄板與半無限體間的摩擦力很小很小，以致可以略去不計。這個問題在數學上可化為一個微積分方程，亦可化為一個調和函數的混雜邊值問題。

薄板的平衡方程是

$$\text{在 } S \text{ 上: } \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) (w)_0 = \frac{p-q}{D}. \quad (75)$$

將 $(w)_0$ 的算式 (67) 代入此式，我們得壓力 $p(x, y)$ 的一個微積分方程如下：

$$p(x, y) = q(x, y) - \frac{D}{2\pi\kappa} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{r_0} d\xi d\eta. \quad (76)$$

在另一方面， p 和 $(w)_0$ 亦可用調和函數 ϕ 表示如下：

$$\left. \begin{aligned} p(x, y) &= -B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_0, \\ (w)_0 &= \frac{B_{66}}{\kappa} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_0. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

將此式代入方程 (75)，並注意到 ϕ 是一個調和函數，我們得 ϕ 的一個邊界條件如下 (S 是板所佔據的區域)：

$$\text{在 } S \text{ 上: } \left(\frac{\partial^5 \phi}{\partial z^5} \right)_0 + \frac{\kappa}{D} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_0 = -\frac{\kappa}{DB_{66}} q(x, y). \quad (78)$$

ϕ 的另一個邊界條件顯然是

$$\text{在 } S' \text{ 上: } \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_0 = 0. \quad (79)$$

這樣我們把所設問題化為根據邊界條件 (78), (79) 以及薄板的邊界條件來找尋調和函數 ϕ .

從微積分方程 (76) 可以清楚地看到, 薄板與半無限體間的壓力 p , 除了與薄板的形狀、它的支承狀況以及外界載荷 q 有關外, 其他只跟參數 D/κ 有關. 從這裏我們又可引出一個對應關係如下: 設有兩個問題, 其中薄板的形狀及其支承狀況相同、外界載荷相同、並且兩者的 D/κ 又相等, 那末薄板與半無限體間的壓力必相等、薄板的撓度與 D 成反比、而調和函數 ϕ 則跟 B_{66} 成反比. 利用這個對應關係, 使我們能夠簡便地從各向同性問題的解答引出橫觀各向同性問題的解答.

參 考 文 獻

- [1] 胡海昌, 橫觀各向同性體的彈性力學的空間問題. 物理學報, 9 (1953), 2 期.
- [2] Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Fourth edition. 1927.
- [3] Todhunter, I., and Pearson K., *A History of the Theory of Elasticity and the Strength of Materials*. 1893.
- [4] Джанелидзе, Г. Ю., Обзор работ по теории изгиба толстых и тонких плит, опубликованных в СССР. ПММ, 12 (1948), Вып. 1.
詹涅里傑, “蘇聯厚板與薄板力學工作概述”, 科學譯叢, 理論及應用力學第 2 冊. 中國科學院出版, 1953 年.
- [5] Michel, J. H. The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary. *Proc. London Math. Soc.*, 32 (1901), 247-258.
- [6] Лехницкий, С. Г., Симметричная деформация и кручение тела вращения с анизотропией частного вида. ПММ, 4 (1940), Вып. 3.
- [7] Лехницкий, С. Г., *Теория Упругости Анизотропного Тела*. Гостехиздат, 1950.
- [8] Фридман, М. М., Математическая Теория Упругости анизотропных сред (обзор). ПММ, 14 (1950).
弗里德曼, “各向異性體數學彈性力學”, 科學譯叢, 理論及應用力學第 3 冊. 中國科學院出版, 1953 年.
- [9] Галин, Л. А., Контактные Задачи Теории Упругости. Гостехиздат, 1953.

ON THE EQUILIBRIUM OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC HALF SPACE

HU HAI-CHANG

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In a previous paper [1], we have obtained a general solution of three dimensional problem of the theory of elasticity for a transversely isotropic body. This general solution

is applied in the present paper to the problem of equilibrium of a transversely isotropic half space. The following six problems are treated: 1) half space under given surface load, 2) half space under given surface displacement, 3) half space under given normal surface load and tangential surface displacement, 4) half space under given tangential surface load and normal surface displacement, 5) the contact problem of a rigid stamp upon a half space, 6) the problem of bending of thin plate resting upon a half space. It is found that, if, in problems 5) and 6), frictional force between stamp or plate and half space may be neglected, there exist simple relations between solutions for a transversely isotropic half space and corresponding solutions for an isotropic half space.

Consider a transversely isotropic elastic half space whose surface is parallel to planes of isotropy. Take a rectangular coordinate system (x, y, z) , such that the xy -plane coincides with the surface of the half space and the z -axis points outside the half space. It has been proved in the previous paper [1] that the general solution for the displacement is expressible in terms of two scalar functions F and φ as follows:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ w &= \alpha \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

where F and φ satisfy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{s_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{s_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (8)$$

respectively. Formula (6) is a general solution. It can be simplified in the case of a half space. Let $f_i(x, y, z)$ ($i=1,2$) be harmonic functions of x, y, z . Let

$$F_i(x, y, z) = f_i(x, y, s_i z) \quad (i = 1, 2). \quad (9)$$

Then it is evident that

$$F = F_1 + F_2 \quad (10)$$

is a solution of Eq. (7). Now letting

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} = \varphi_i(x, y, z) \quad (i = 1, 2), \quad (12)$$

and in equations (6) and (8) using φ_0 instead of φ , formula (6) simplifies to the form

$$\left. \begin{aligned} u &= - \sum_{i=1,2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \\ v &= - \sum_{i=1,2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \\ w &= - \sum_{i=1,2} \frac{\alpha - \gamma s_i^2}{s_i^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

The three stress functions φ_j ($j=0, 1, 2$) may be derived from three harmonic functions $\phi_j(x, y, z)$ as follows:

$$\varphi_j(x, y, z) = \phi_j(x, y, s_j z) \quad (j = 0, 1, 2). \quad (14)$$

The stress components corresponding to solution (13) are

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} \frac{q_i}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} - 2 \left\{ \sum_{i=1,2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} \right\}, \\ \frac{\sigma_y}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} \frac{q_i}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} - 2 \left\{ \sum_{i=1,2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} \right\}, \\ \frac{\sigma_z}{B_{66}} &= \sum_{i=1,2} \frac{k_i}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}, \\ \frac{\tau_{yz}}{B_{66}} &= - \frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\tau_{xz}}{B_{66}} &= - \frac{1}{s_0^2} \sum_{i=1,2} \frac{\alpha + (1-\gamma) s_i^2}{s_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\tau_{xy}}{B_{66}} &= - 2 \sum_{i=1,2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

The three stress functions are determined from the boundary conditions for the six problems listed above. Explicit expressions are given.