

在均佈及中心集中載荷作用下圓板 的大撓度問題*

胡 海 昌

(中國科學院數學研究所)

一. 前 言

求解圓板大撓度問題的方法有好多種。但是有的太簡單而不足以了解應力的分佈情況,有的太複雜而不便計算。其中只有攝動法^[1]計算比較簡單而又能得到可用的結果。在個別的問題中,攝動法應用得是否順利,主要依賴於攝動參數選擇得是否適當。對於負擔均佈載荷的圓板,攝動參數可有兩種選法:一種是選擇均佈載荷 q , 這是 J. J. 文蓀^[2]所採用的;另一種是選擇中心點的撓度 W_0 , 這是錢偉長教授^[3]所採用的。計算的結果表明錢偉長教授的選法比文蓀的高明。

攝動法有可能應用於各種載荷、各種邊界條件以及各種形狀的薄板的大撓度問題。例如葉開沅同志^[4]取最大撓度為攝動參數而研究了環形薄板在邊緣載荷作用下的大撓度問題,潘立宙同志^[5]取中心點的撓度為攝動參數而研究了橢圓形薄板在均佈載荷作用下的大撓度問題。

以上各位作者所討論的載荷,都只需要用一個數目便能完全決定。在載荷需要用兩個或兩個以上的數目才能完全決定的場合(為了簡便起見,以下稱這種載荷為複合載荷),選擇參數便產生了一些困難。本文的目的便在指出並解決這些困難。但為說明方便起見,我們將結合討論在均佈及中心集中載荷同時作用下圓板的大撓度問題,來說明在複合載荷場合下攝動法的應用。

*1954 年 9 月 2 日收到。

二. 基本方程和載荷參數法

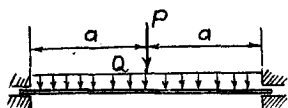


圖 1.

設 Q 為作用於圓板上的均佈載荷, P 為作用於中心點的集中載荷. 薄板的撓度 w 和徑向薄膜內力 N_r 應適合方程:

$$D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} = N_r \frac{dw}{dr} + \frac{Q}{2} r + \frac{P}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad (1a)$$

$$r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0. \quad (1b)$$

爲了計算方便起見, 今引用如下的無維數量*:

$$\left. \begin{aligned} \xi = \frac{r}{a}, \quad x = \xi^2, \quad y = \sqrt{3(1-\sigma^2)} \frac{w}{h}, \quad s = 3(1-\sigma^2) \frac{a^2 N_r}{Eh^3}, \\ q = \frac{3}{4} (1-\sigma^2) \sqrt{3(1-\sigma^2)} \frac{a^4 Q}{Eh^4}, \quad p = \frac{3}{4} (1-\sigma^2) \sqrt{3(1-\sigma^2)} \frac{a^2 P}{\pi Eh^4}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

這樣方程 (1) 簡化爲

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy}{dx} &= s \frac{dy}{dx} + q + \frac{p}{x}, \\ \frac{d^2}{dx^2} (xs) + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

我們所討論的邊界條件如下: 對於撓度 w 而言是固定的, 對於徑向薄膜位移而言是可自由滑動的, 即

$$\text{在 } r = a \text{ 上: } w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad N_r = 0. \quad (4)$$

這類邊界條件雖然在實際上不常遇到, 但在數學上却比較簡單. 至於具有各種邊界條件的圓板在均佈及中心集中載荷同時作用下的大撓度問題將在另文中討論.

用無維數量, 條件 (4) 化爲

$$\text{在 } x = 1 \text{ 上: } y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad s = 0; \quad (5)$$

*注意在本文中泊松比用 σ 表示。

因此我們的數學問題化為在邊界條件 (5) 下求解方程 (3)。

一個比較容易想到的方法是將 y 和 s 展成載荷 p, q 的二重冪級數，即命

$$\begin{aligned} y &= y'_1 p + y'_2 q + y'_3 p^3 + y'_4 p^2 q + y'_5 p q^2 + y'_6 q^3 + \cdots, \\ s &= s'_1 p^2 + s'_2 p q + s'_3 q^2 + \cdots. \end{aligned} \quad (6)$$

當 p 和 q 都很小時，這個展開式顯然是合理的。將此代入方程 (3) 和 (5)，我們得到一系列的方程和相關的邊界條件。這些方程如下：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy'_1}{dx} &= \frac{1}{x}, \\ \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy'_2}{dx} &= 1, \\ \frac{d^2}{dx^2} (x s'_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{dy'_1}{dx} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} (x s'_2) + \frac{dy'_1}{dx} \cdot \frac{dy'_2}{dx} &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} (x s'_3) + \frac{1}{2} \left(\frac{dy'_2}{dx} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy'_3}{dx} &= s'_1 \frac{dy'_1}{dx}, \\ \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy'_4}{dx} &= s'_1 \frac{dy'_2}{dx} + s'_2 \frac{dy'_1}{dx}, \\ \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy'_5}{dx} &= s'_2 \frac{dy'_2}{dx} + s'_3 \frac{dy'_1}{dx}, \\ \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy'_6}{dx} &= s'_3 \frac{dy'_2}{dx}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在相關的邊界條件下解這些方程，我們得到

$$\begin{aligned} y'_1 &= x \log x - x + 1, \quad \frac{dy'_1}{dx} = \log x, \\ y'_2 &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \quad \frac{dy'_2}{dx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, \\ s'_1 &= -\frac{x}{4} \log^2 x + \frac{3}{4} x \log x - \frac{7}{8} x + \frac{7}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s'_2 &= -\frac{x^2}{12} \log x + \frac{5}{72} x^2 + \frac{x}{4} \log x - \frac{3}{8} x + \frac{11}{36}, \\
s'_3 &= -\frac{x^3}{96} + \frac{x^2}{24} - \frac{x}{16} + \frac{1}{32}, \\
y'_3 &= -\frac{x^3}{72} \log^3 x + \frac{13}{144} x^3 \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{119}{8 \cdot 81} x^3 + \\
&\quad + \frac{7}{32} x^2 \log x - \frac{7}{16} x^2 + \frac{283}{32 \cdot 27} x - \frac{191}{32 \cdot 81}, \\
y'_4 &= -\frac{5}{128 \cdot 9} x^4 \log^2 x + \frac{19}{128 \cdot 9} x^4 \log x - \frac{577}{1024 \cdot 27} x^4 + \\
&\quad + \frac{1}{48} x^3 \log^2 x - \frac{13}{16 \cdot 9} x^3 \log x + \frac{117}{32 \cdot 27} x^3 + \\
&\quad + \frac{11}{16 \cdot 9} x^2 \log x - \frac{151}{64 \cdot 9} x^2 + \frac{1375}{256 \cdot 27} x - \frac{473}{1024 \cdot 97}, \\
y'_5 &= -\frac{x^5 \log x}{128 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{79 x^5}{512 \cdot 9 \cdot 25} + \frac{x^4}{32 \cdot 9} \log x - \frac{13 x^4}{64 \cdot 27} - \frac{x^3}{96} \log x + \\
&\quad + \frac{161}{64 \cdot 81} x^3 + \frac{x^2}{128} \log x - \frac{31}{64 \cdot 9} x^2 + \frac{2819}{512 \cdot 27 \cdot 25} x - \frac{11596}{512 \cdot 81 \cdot 25}, \\
y'_6 &= -\frac{x^6}{256 \cdot 27 \cdot 5} + \frac{x^5}{256 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{5 x^4}{512 \cdot 9} + \frac{x^3}{128 \cdot 3} - \frac{x^2}{256} + \\
&\quad + \frac{37 x}{256 \cdot 9 \cdot 5} - \frac{73}{512 \cdot 27 \cdot 5}.
\end{aligned} \tag{8}$$

與集中載荷 p 對應的位移是中心點的撓度 $\Delta = y(0)$ 。從公式 (6) 和 (8) 得到

$$\begin{aligned}
\Delta &= p + \frac{1}{4} q - \frac{191}{32 \cdot 81} p^3 - \frac{473}{1024 \cdot 9} p^2 q - \\
&\quad - \frac{11596}{512 \cdot 81 \cdot 25} p q^2 - \frac{73}{512 \cdot 27 \cdot 5} q^3 + \dots;
\end{aligned} \tag{9}$$

與均佈載荷 q 對應的位移是

$$v = \int_0^1 y dx. \tag{10}$$

將公式 (6) 和 (8) 代入此式得到

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{4} p + \frac{1}{12} q - \frac{473}{1024 \cdot 27} p^3 - \\
&\quad - \frac{11596}{512 \cdot 81 \cdot 25} p^2 q - \frac{73}{512 \cdot 9 \cdot 5} p q^2 - \frac{1}{128 \cdot 7} q^3 + \dots.
\end{aligned} \tag{11}$$

外力所作之餘功爲

$$U_c = \int (\Delta dp + v dq). \quad (12)$$

將 (9) 和 (11) 代入上式得到

$$U_c = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} p q + \frac{1}{24} q^2 - \frac{191}{128 \cdot 81} p^4 - \frac{473}{1024 \cdot 27} p^3 q - \frac{11596}{1024 \cdot 81 \cdot 25} p^2 q^2 - \frac{73}{512 \cdot 27 \cdot 5} p q^3 - \frac{1}{512 \cdot 7} q^4 + \dots \quad (13)$$

或許有人感到二重級數收斂得很慢，計算時不甚方便。如果命

$$p = \alpha f, \quad q = \beta f; \quad (14)$$

那末展開式 (6) 變爲

$$\left. \begin{aligned} y &= (y'_1 \alpha + y'_2 \beta) f + (y'_3 \alpha^3 + y'_4 \alpha^2 \beta + y'_5 \alpha \beta^2 + y'_6 \beta^3) f^3 + \dots, \\ s &= (s'_1 \alpha^2 + s'_2 \alpha \beta + s'_3 \beta^2) f^2 + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

這兩個級數在表面上雖然已化成兩個普通的級數，但在實質上它們仍然是二重級數。由此可知若不預先指定 α 與 β 之比，用一個參數的方法並不能簡化計算。

在指定 α, β 的數值後， f 便唯一地規定了外界載荷狀況，因此它可以作爲廣義載荷。與 f 對應的廣義位移是

$$\delta = \alpha \Delta + \beta v. \quad (16)$$

δ 與 f 的關係可從 (9), (11) 兩式導得，但從外力所作之餘功 U_c 出發更方便些。將 (14) 式代入 (13) 式，得

$$U_c = \left(\alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha \beta + \frac{1}{12} \beta^2 \right) \frac{f^2}{2} - \left(\frac{191}{32 \cdot 81} \alpha^4 + \frac{473}{256 \cdot 27} \alpha^3 \beta + \frac{11596}{256 \cdot 81 \cdot 25} \alpha^2 \beta^2 + \frac{73}{128 \cdot 27 \cdot 5} \alpha \beta^3 + \frac{\beta^4}{128 \cdot 7} \right) \frac{f^4}{4} + \dots \quad (17)$$

因此，

$$\delta = \frac{dU_c}{df} = \delta'_1 f - \delta'_3 f^3; \quad (18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \delta'_1 &= \alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha \beta + \frac{1}{12} \beta^2, \\ \delta'_3 &= \frac{191}{32 \cdot 81} \alpha^4 + \frac{473}{256 \cdot 27} \alpha^3 \beta + \frac{11596}{256 \cdot 81 \cdot 25} \alpha^2 \beta^2 + \frac{73}{128 \cdot 27 \cdot 5} \alpha \beta^3 + \frac{\beta^4}{128 \cdot 7}. \end{aligned} \right\} (19)$$

將 (14) 式代入 (9) 式, 得中心點的撓度 Δ 與 f 的關係如下:

$$\Delta = \Delta'_1 f - \Delta'_3 f^3 + \dots; \quad (20)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_1 &= \alpha + \frac{1}{4} \beta, \\ \Delta'_3 &= \frac{191}{32 \cdot 81} \alpha^3 + \frac{473}{1024 \cdot 9} \alpha^2 \beta + \frac{11596}{512 \cdot 81 \cdot 25} \alpha \beta^2 + \frac{73}{512 \cdot 27 \cdot 5} \beta^3. \end{aligned} \right\} (21)$$

$\delta'_1, \delta'_3, \Delta'_1, \Delta'_3$ 的若干數值如下表所示:

α	β	δ'_1	δ'_3
1	0.0	1.0000	0.07369
	0.1	1.0508	0.08076
	0.2	1.1035	0.08831
	0.3	1.1575	0.09644
	0.4	1.2134	0.10491
	0.5	1.2780	0.11403
	0.6	1.3300	0.12373
	0.7	1.3908	0.13403
	0.8	1.4542	0.14496
	0.9	1.5175	0.15655
	1.0	1.5833	0.16883

β	α	δ'_1	δ'_3
1	0.0	0.0833	0.000112
	0.1	0.1433	0.000834
	0.2	0.2233	0.002517
	0.3	0.3233	0.005837
	0.4	0.4433	0.011647
	0.5	0.5833	0.02098
	0.6	0.7433	0.03503
	0.7	0.9233	0.05520
	0.8	1.1233	0.08303
	0.9	1.3433	0.12027
	1.0	1.5833	0.16883

觀察公式 (18) 可以看出, 當 f 頗大時, δ 與 f 的符號相反. 這顯然和實際情況相違背. 由此可知, 上面的公式只有當 p 和 q 都很小時才適用. 當 p 和 q 稍大時, 它們或者是收斂得很慢, 取前面幾項與真正的結果相差頗遠; 或者竟是發散的. 上面指出的缺點可以說是載荷參數法所共有的. 為了避免這個缺點, 我們應當採用位移參數法.

三. 位 移 參 數 法

我們假定已經知道外力 p 和 q 的比, 因此外力可用一個參數 f 表示如 (14) 式. 在這種場合我們只需要選擇一個位移參數以作為攝動法的根據. 但是這個參數並不能任意選擇. 我們首先應注意到, 某一數量 ϵ 可以作為攝動參數, 必須滿足下面這個條件: ϵ 可以取一系列的數值, 並且當 ϵ 趨近於零時, 撓度和載荷亦都同時趨近於零. 根據這個條件可知在複合載荷場合中心點的撓度不能作為攝動參數, 因為它可以等於零而撓度不恆等於零(實例見下一節).

如果單從數學上考慮, 那末我們可以取

$$\epsilon = \int_0^1 y^2 dx. \quad (22)$$

很顯然的, 當 ϵ 趨近於零時, 撓度亦趨近於零. 可是 ϵ 的物理意義不清楚, 因此它仍不宜作為攝動參數.

作者曾經指出^[6], 取與載荷對應的廣義位移為攝動參數, 不但富有物理意義, 並且是比較方便的. 在本文所討論的具體問題中, 即是取

$$\delta = \alpha \Delta + \beta v \quad (16)$$

為攝動參數.

由於薄板的應變能等於外力所作之功, 即

$$U = \int_0^\delta f(\delta) d\delta, \quad (23)$$

因此當 δ 趨近於零時, U 亦趨近於零. 但是只要撓度不恆等於零, U 便大於零. 因此當 U 趨近於零時, 撓度亦必同時趨近於零. 由此可知廣義位移符合於作攝動參數的必要條件.

這樣我們設

$$p = \alpha f, \quad q = \beta f, \quad (24a)$$

$$f = f_1 \delta + f_3 \delta^3 + \dots, \quad (24b)$$

$$y = y_1 \delta + y_3 \delta^3 + \dots, \quad (24c)$$

$$s = s_2 \delta^2 + \dots. \quad (24d)$$

將此代入方程 (3) 和 (16), 我們得到一系列的方程和用以決定 $f_1, f_3, \dots$ 的一系列條件如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy_1}{dx} &= \left(\frac{\alpha}{x} + \beta \right) f_1, \\ \alpha y_1(0) + \beta \int_0^1 y_1 dx &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (x s_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 = 0. \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy_3}{dx} &= s_2 \frac{dy_1}{dx} + \left(\frac{\alpha}{x} + \beta \right) f_3, \\ \alpha y_3(0) + \beta \int_0^1 y_3 dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

.....

根據這些方程和適當的邊界條件便可以決定 $f_1, f_3, \dots, y_1, y_3, \dots, s_2, \dots$ 等。但是所需要的計算將是十分繁複的, 因為 $f_1, \dots, y_1, \dots, s_2, \dots$ 等都是 α, β 的分式, 加法乘法的運算很不方便。

這裏我們欲指出, 算式 (24) 中的係數和算式 (15), (18) 中的係數有簡單的關係。用還原法不難證明, 根據 (18) 式把 f 用 δ 的冪級數表示便可得到 (24b) 式, 即

$$f_1 = \frac{1}{\delta_1'}, \quad f_3 = \frac{\delta_3'}{\delta_1'^4}, \dots; \quad (28)$$

而公式 (24c, d) 可將 (24b) 代入 (15) 式而導得, 即

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= (y_1' \alpha + y_2' \beta) f_1, \\ y_3 &= (y_1' \alpha + y_2' \beta) f_3 + (y_3' \alpha^3 + y_4' \alpha^2 \beta + y_5' \alpha \beta^2 + y_6' \beta^3) f_3, \\ &\dots\dots\dots \\ s_2 &= (s_1' \alpha^2 + s_2' \alpha \beta + s_3' \beta^2) f_1^2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

從上面的討論可以看出, 載荷參數法計算比較簡單而結果較差, 位移參數法

結果較好而計算却比較複雜。因此作者認為在複合載荷的場合下，最好先用載荷參數法作必要的計算，而後把結果用位移參數來表示。這樣避免了兩種方法的缺點而利用了它們的優點。

四．中心點的撓度等於零的場合

適當地選擇 p, q 的大小，我們可以使中心點的撓度等於零而其他各點的撓度不等於零。這種場合相當於在薄板的中心點增加一個支座，如圖 2 所示。



圖 2.

欲解這樣一個問題，可以利用上節的結果而加以適當的簡化，亦可以依照上節的方法再計算一遍，但以後者比較方便。由於在這種場合

$$\Delta = y(0) = 0, \quad (30)$$

因此 v 即為與外力對應的廣義位移。所以我們設

$$q = q_1 v + q_3 v^3 + \dots, \quad (31a)$$

$$p = p_1 v + p_3 v^3 + \dots, \quad (31b)$$

$$y = y_1 v + y_3 v^3 + \dots, \quad (31c)$$

$$s = s_2 v^2 + \dots; \quad (31d)$$

將此代入方程 (3), (10) 和 (30)，我們得到一系列的方程如下：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy_1}{dx} &= \frac{p_1}{x} + q_1, \\ \int_0^1 y_1 dx &= 1, \quad y_1(0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (x s_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 = 0. \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} x \frac{dy_3}{dx} &= s_2 \frac{dy_1}{dx} + \frac{p_3}{x} + q_3, \\ \int_0^1 y_3 dx &= 0, \quad y_3(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

利用第二節的結果不難證明此組方程的解為

$$\begin{aligned}
 q_1 &= 48, & q_3 &= \frac{628532}{25.7}, \dots \\
 p_1 &= 12, & p_3 &= \frac{1812117}{4.3 \cdot 25.7}, \dots \\
 y_1 &= y'_1 p_1 + y'_2 q_1, \\
 y_3 &= y'_1 p_3 + y'_2 q_3 + y'_3 p_1^3 + y'_4 p_1^2 q_1 + y'_5 p_1 q_1^2 + y'_6 q_1^3, \\
 &\dots\dots\dots \\
 s_2 &= s'_1 p_1^2 + s'_2 p_1 q_1 + s'_3 q_1^2, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{35}$$

其中 $y'_1, y'_2, \dots, s'_2, \dots$ 的意義如 (8) 式所規定。根據 (31) 式, p, q 與 v 的關係如圖 3 所示。利用這個圖可立刻得到 p 與 q 的關係。

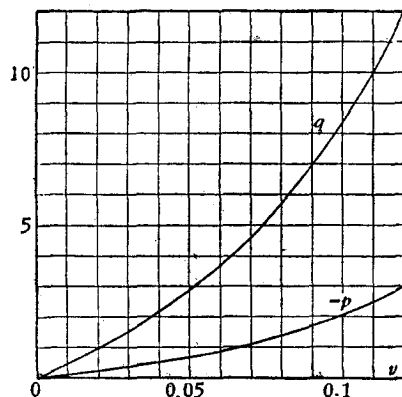


圖 3.

參 考 文 獻

- [1] 錢偉長: “圓薄板大撓度理論的攝動法”, 彈性圓薄板大撓度問題, 中國科學院出版, 1954 年.
- [2] J. J. Vincent: The bending of a thin circular plate, *Philos. Mag.*, vol. 12, pp. 188-196, 1931.
- [3] 錢偉長: “Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure”. 中國物理學報, 7 卷 2 期, 第 102—113 頁, 1947.
- [4] 葉開沅: “邊緣載荷下環形薄板大撓度問題”. 物理學報, 9 卷 2 期, 第 110—129 頁, 1953 年.
- [5] 潘立宙: “固定邊圓形薄板的大撓度問題”. 尚未發表. 1954 年.
- [6] 彈性圓薄板大撓度問題, 第 125 頁, 中國科學院出版, 1954 年.

ON THE LARGE DEFLECTION OF A CIRCULAR PLATE UNDER COMBINED ACTION OF UNIFORMLY DIS- TRIBUTED LOAD AND CONCENTRATED LOAD AT THE CENTER

HU HAI-CHANG

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

This problem is solved by perturbation methods. We first expand the deflection¹⁾ y and the radial membrane stress s in double power series of the uniformly distributed load q and the concentrated load p :

$$y = y'_1 p + y'_2 q + y'_3 p^3 + y'_4 p^2 q + y'_5 p q^2 + y'_6 q^3 + \dots, \quad (6)$$

$$s = s'_1 p^2 + s'_2 p q + s'_3 q^2 + \dots.$$

Expressions of $y'_1, \dots, y'_6, s'_1, s'_2, s'_3$ are given for one type of boundary conditions. When we know the ratio p/q , it is convenient to write

$$p = \alpha f, \quad q = \beta f, \quad (14)$$

where α, β are constants and f is a load parameter. In this case, Eq. (6) reduces to the form

$$y = (y'_1 \alpha + y'_2 \beta) f + (y'_3 \alpha^3 + y'_4 \alpha^2 \beta + y'_5 \alpha \beta^2 + y'_6 \beta^3) f^3 + \dots, \quad (15)$$

$$s = (s'_1 \alpha^2 + s'_2 \alpha \beta + s'_3 \beta^2) f^2 + \dots.$$

Let δ be the generalized displacement corresponding to the load parameter f . From Eq. (6) we find

$$\delta = \delta'_1 f - \delta'_3 f^3 + \dots. \quad (18)$$

We next expand the deflection y , the radial membrane stress s and the load parameter f in power series of δ :

¹⁾ Here and hereafter all quantities are dimensionless.

$$p = \alpha f, \quad q = \beta f, \quad (24a)$$

$$f = f_1 \delta + f_3 \delta^3 + \cdots, \quad (24b)$$

$$y = y_1 \delta + y_3 \delta^3 + \cdots, \quad (24c)$$

$$s = s_2 \delta^2 + \cdots. \quad (24d)$$

It is found that series (24b) may be obtained by inverting series (18) and series (24c), (24d) may be obtained by substituting (24b) into (15).

It is worth to note that expression (6) is convenient for calculation but expression (24) gives better results.

Finally we discuss the problem of a circular plate with a central support under uniformly distributed load as shown in Fig. 2. The relations between the uniformly distributed load q , the corresponding generalized displacement ν and the reaction p of the central support are plotted in Fig. 3.