

三合板的一般彈性理論^{*†}

杜慶華

(清華大學)

一. 引言

本文所指之三合板是一種輕質板材，在航空工業上近年來有廣泛的應用。板由三層材料構成：外層為二硬薄板（金屬薄板），夾心為較輕軟之材料（如泡狀醋酸賽璐珞、軟木、或蜂巢狀金屬材料）。前者稱為表板，後者稱為夾心，表板與夾心膠合成一綜合板。三合板之形變與應力之計算在十多年來曾引起力學家與工程師的極大注意，但由於構造之各向異性的本質，理論和計算都頗為繁複。一般作者由於採取了一些過於簡化的假定和強烈的限制（例如參考文獻 1, 3, 4, 5, 6），無論他們是用平衡條件，應力應變關係，和連續條件，或直接用形變能變分理論，都只會得到一些綫性微分方程，而根據這些方程所得的結果即使在有限的範圍內仍與實驗結果有較大出入。這種出入往往歸於材料性質的不均勻，夾心的彈性性質不肯定，其實這是不正確的。

本文採取比較合理的限制和假定：

1. 三合板受橫向分佈載荷及板向平面方向之邊界分佈常載荷。
2. 表板為受撓曲的薄板，並考慮表板中性層向拉壓與剪力因夾心存在而生之變化。
3. 夾心提供表板二種作用：(i) 彈性支撐；(ii) 膠合面剪力作用。

根據這些假定導出了一系偏微分方程¹⁾，其中含有外綫性因素，這些方程在以後具體實例（穩定和撓曲問題）中說明了它們的正確性。蘇聯 A. П. Прыца-

^{*} 1954 年 9 月 2 日收到。

[†] 本文為三篇有關三合板理論之第一篇，其餘二篇：“矩形三合板的穩定問題”及“三合板梁的撓曲問題”現正陸續寫出。

1) 參考文獻 8：這些方程作者在 1950 年得到，當時並曾應用這些理論來解決了一些實際問題。

ков. 曾用古典彈性力學方法得到與本文基本上相似的微分方程, 但 А. П. Пры-
саков^[2] 將變形限於小變形並沒有估計其中非綫性的本質. 而對非綫性因素的
考慮實為目前使三合板理論推進一步的主要關鍵.

二. 標 號 說 明

1. 坐標: x, y, z (參閱圖 1).

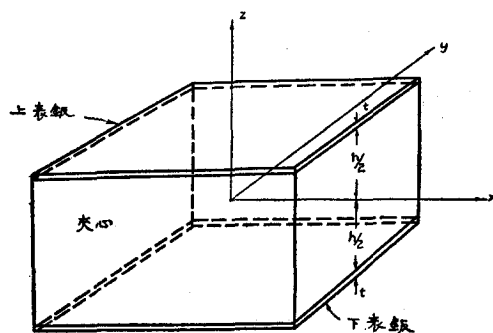


圖 1.

2. 位移: u, v, w .

3. 符號: f —— 表板; $+$ —— 上表板; $-$ —— 下表板; c —— 夾心;
 x, y, z —— 坐標方向符號.

4. 力與應力: σ —— 夾心法應力;
 τ —— 夾心剪應力;
 N, Q —— 單位長度上表板內力;
 M —— 單位長度上表板內力矩;
 q —— 三合板橫向分佈載荷;
 ΔN —— N 之變化部分;
 $\bar{N}$ —— 邊界上的不變分佈載荷.

5. 彈性常數: E_f —— 表板彈性係數;

G_f —— 表板剪彈性係數;

μ_f —— 表板泊桑比;

D —— 表板板彈性係數; $D = \frac{E_f t^3}{12(1-\mu_f^2)}$;

E_c —— 夾心彈性係數;

G_c —— 夾心剪彈性係數。

6. 微分運算: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

三. 夾 心 理 論

由於三合板的夾心通常在 x, y 方向抗拒拉壓剪力俱極微弱,而在 x, y 方向又有等向性,因此,非等向性之夾心廣義虎克定律可以簡化為:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= G_c \gamma_{xz}, \\ \tau_{yz} &= G_c \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= E_c \varepsilon_z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

而位移與形變之間的關係則為:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

相應於 (1) 式之簡化,使夾心之微分平衡方程成為:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) 式中之前二式指出 τ_{xz}, τ_{yz} 與 z 無關。而由 (3) 式第三式顯然 σ_z 為 z 之直綫式。令 σ_{z+}, σ_{z-} 為 σ_z 在 $z = \pm \frac{h}{2}$ 處之值,則

$$\sigma_z = \frac{(\sigma_{z+} + \sigma_{z-})}{2} + \frac{(\sigma_{z+} - \sigma_{z-})}{2} \frac{2z}{h}. \quad (4)$$

將 (4) 式代入 (3) 式中之第三式,得

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{(\sigma_{z+} - \sigma_{z-})}{h}. \quad (5)$$

由 (5) 式可見 τ_{xz} , τ_{yz} 俱與 z 無關。而 (5) 式為夾心邊界應力關係之一。

此種關係在一般等向性夾心材料中並不存在，因為在一般等向性夾心材料中邊界應力祇要滿足夾心整塊必須平衡即可。用 (1), (2) 式分別積分得 (6) 式之第一式再求出其餘二式。

$$\left. \begin{aligned} 2 E_C w &= (\sigma_{z+} + \sigma_{z-}) z + \frac{\sigma_{z+} - \sigma_{z-}}{h} z^2 + 2 E_C w_0, \\ 2 E_C u &= 2 E_C \left(\frac{\tau_{xz}}{G_C} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{z+} + \sigma_{z-}) z^2 - \\ &\quad - \frac{1}{3h} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{z+} - \sigma_{z-}) z^3 + 2 E_C u_0, \\ 2 E_C v &= 2 E_C \left(\frac{\tau_{yz}}{G_C} - \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{z+} + \sigma_{z-}) z^2 - \\ &\quad - \frac{1}{3h} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{z+} - \sigma_{z-}) z^3 + 2 E_C v_0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 u_0 , v_0 , 及 w_0 為 x , y 之任意函數。(5), (6) 式構成含有四夾心邊界應力 σ_{z+} , σ_{z-} , τ_{xz} , τ_{yz} 之四個方程，但式中有 x , y 之任意函數 u_0 , v_0 及 w_0 存在。表面上似乎夾心必然受力而會有任意之形變，其實不然。令 τ_{xz} , τ_{yz} , σ_{z+} , 及 σ_{z-} 為零，則得：

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0, \\ u &= -z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0, \\ v &= -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由此可見夾心之 u_0 , v_0 , w_0 不僅表示夾心可以隨意作小撓度（對整個三合板厚度而言）彎曲的板塊。至於順 x , y 平面可以任意變形之性質則早已在開始時指出。

由於我們在三合板中只注意夾心應力的邊界值及邊界位移。故將 $z = \pm \frac{h}{2}$ 代入 (5), (6) 式得：

$$2 E_C w_{\pm} = \pm \frac{h}{2} (\sigma_{z+} + \sigma_{z-}) + \frac{h}{4} (\sigma_{z+} - \sigma_{z-}) + 2 E_C w_0, \quad \left. \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 2 E_C u_{\pm} &= \pm E_C h \left(\frac{\tau_{xz}}{G_C} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \\
 &\quad - \frac{h^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{z+} + \sigma_{z-}) \mp \frac{h^2}{24} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{z+} - \sigma_{z-}) + 2 E_C u_0, \\
 2 E_C v_{\pm} &= \pm E_C h \left(\frac{\tau_{yz}}{G_C} - \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - \\
 &\quad - \frac{h^2}{8} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{z+} + \sigma_{z-}) \mp \frac{h^2}{24} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{z+} - \sigma_{z-}) + 2 E_C v_0.
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

將 (8) 式中之 u_0 , v_0 及 w_0 消去, 即得

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= -\frac{1}{h} (\sigma_{z+} - \sigma_{z-}), \\
 2(u_+ - u_-) + h \frac{\partial}{\partial x} (w_+ + w_-) &= 2h \frac{\tau_{xz}}{G_C} + \frac{h^2}{6 E_C} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{z+} - \sigma_{z-}), \\
 2(v_+ - v_-) + h \frac{\partial}{\partial y} (w_+ + w_-) &= 2h \frac{\tau_{yz}}{G_C} + \frac{h^2}{6 E_C} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{z+} - \sigma_{z-}), \\
 2(w_+ - w_-) &= \frac{h}{E_C} (\sigma_{z+} + \sigma_{z-}).
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(9) 式為夾心之邊界應力與邊界位移之一般方程, 在導出 (9) 式時我們應用力平衡關係、應力應變關係、和夾心構造的連續性。

四. 表鈹理論

在考慮表鈹時坐標仍置於夾心未變形時之中間面上, 則以上所得之夾心理論可以直接聯繫。如圖 2 所示將一平行於 x - z 及 y - z 平面微分單元截自變形之三合板。圖上所示力矩及力除 τ_{xz} 及 τ_{yz} , 外俱平行於坐標軸。

上下表鈹微分單元在 x , y , z 方向力之平衡若忽略高次微量則引出:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial N_{x\pm}}{\partial x} \mp \tau_{xz} + \frac{\partial N_{yx\pm}}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial N_{y\pm}}{\partial y} \mp \tau_{yz} + \frac{\partial N_{xy\pm}}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial Q_{y\pm}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{x\pm}}{\partial x} \pm \sigma_{z\pm} \pm \tau_{xz} \frac{\partial W_{\pm}}{\partial x} \pm \tau_{yz} \frac{\partial W_{\pm}}{\partial y} &= -q_{\pm};
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 $W_{\pm}$ 為上下表鈹中心面之 z 向位移。上下表鈹微分單元中心之 x , y , z 三方向力矩之平衡引出

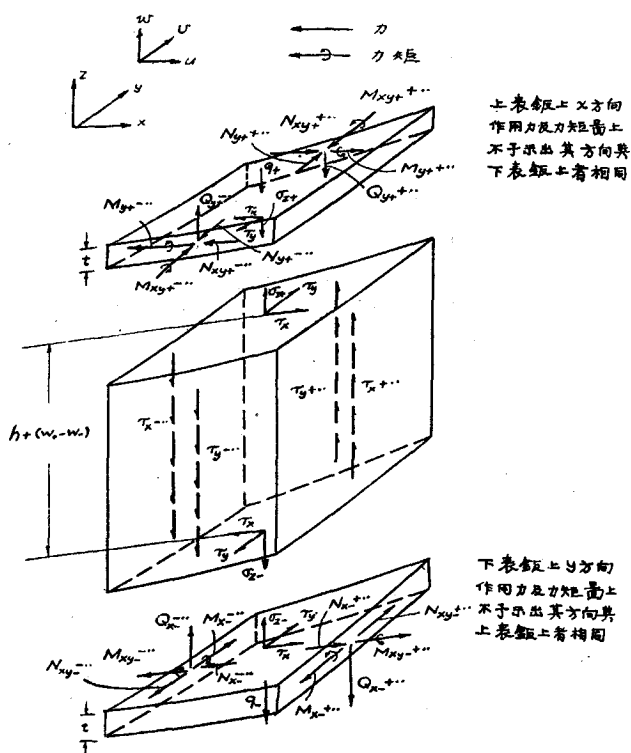


圖 2.

$$\frac{\partial M_{xy\pm}}{\partial x} + \frac{\partial M_{y\pm}}{\partial y} - Q_{y\pm} - \frac{t}{2} \tau_{yz} - N_{y\pm} \frac{\partial W_{\pm}}{\partial y} - N_{xy\pm} \frac{\partial W_{\pm}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial M_{xy\pm}}{\partial y} + \frac{\partial M_{x\pm}}{\partial x} - Q_{x\pm} - \frac{t}{2} \tau_{xz} - N_{x\pm} \frac{\partial W_{\pm}}{\partial x} - N_{xy\pm} \frac{\partial W_{\pm}}{\partial y} = 0,$$

$$N_{xy\pm} = N_{yx\pm}. \quad (11)$$

設表板在平面應力狀態下，並受撓曲形變則應力與形變之關係可以下式表之。（式中因引入小角之餘弦 ≈ 1 ，故一般常用之垂直中性面之薄板結果相同）

$$M_{x\pm} = D \left(\frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial x^2} + \mu_f \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial y^2} \right),$$

$$M_{y\pm} = D \left(\frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial y^2} + \mu_f \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy\pm} = D (1 - \mu_f) \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial x \partial y}. \quad (12)$$

由 (10), (11), (12) 諸式得:

$$D \nabla^4 W_{\pm} = \frac{t}{2} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + N_{x\pm} \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial x^2} + N_{y\pm} \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial y^2} + 2 N_{xy\pm} \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial x \partial y} \mp \sigma_{z\pm} - q_{\pm}. \quad (13)$$

(13) 式為表鋁中性面之撓曲面之微分方程，其中 $q_{\pm}$ 為外加分佈載荷； $\sigma_{z\pm}$ ， τ_{xz} ，及 τ_{yz} 為表鋁夾心間之應力。在考慮表鋁時可以認為分佈載荷。

五. 形變一致條件

1. 夾心與表鋁的連續條件：

若以 $U_{\pm}$ ， $V_{\pm}$ ， $W_{\pm}$ 代表上下表鋁中間面之 x ， y ，及 z 方向之位移，而 $u_{\pm}$ ， $v_{\pm}$ ，及 $w_{\pm}$ 代表上下表鋁與夾心相接處之 x ， y ，及 z 方向之位移，則根據小撓度及平面應力情況可得表鋁中間面之應變

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{x\pm} &= \frac{\partial U_{\pm}}{\partial x} = \frac{1}{t E_f} (N_{x\pm} - \mu_f N_{y\pm}), \\ \epsilon_{y\pm} &= \frac{\partial V_{\pm}}{\partial y} = \frac{1}{t E_f} (N_{y\pm} - \mu_f N_{x\pm}), \\ \gamma_{xy\pm} &= \frac{\partial U_{\pm}}{\partial y} + \frac{\partial V_{\pm}}{\partial x} = \frac{N_{xy\pm}}{G_f t}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

與此相應情況可以設：

$$\left. \begin{aligned} w_{\pm} &= W_{\pm}, \\ u_{\pm} &= U_{\pm} \pm \frac{t}{2} \frac{\partial w_{\pm}}{\partial x}, \\ v_{\pm} &= V_{\pm} \pm \frac{t}{2} \frac{\partial w_{\pm}}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由 (14)，(15) 式可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial x} &= \pm \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w_{\pm}}{\partial x^2} + \frac{1}{t E_f} (N_{x\pm} - \mu_f N_{y\pm}), \\ \frac{\partial v_{\pm}}{\partial y} &= \pm \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w_{\pm}}{\partial y^2} + \frac{1}{t E_f} (N_{y\pm} - \mu_f N_{x\pm}), \\ \frac{\partial u_{\pm}}{\partial y} + \frac{\partial v_{\pm}}{\partial x} &\mp t \frac{\partial^2 w_{\pm}}{\partial x \partial y} = \frac{N_{xy\pm}}{G_f t}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(16) 式中六個方程為一般連續方程，可以列如下述形式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} (u_+ + u_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ - w_-) + \frac{1}{t E_f} [(N_{x+} + N_{x-}) - \mu_f (N_{y+} + N_{y-})], \\ \frac{\partial}{\partial y} (v_+ + v_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_+ - w_-) + \frac{1}{t E_f} [(N_{y+} + N_{y-}) - \mu_f (N_{x+} + N_{x-})], \\ \frac{\partial}{\partial y} (u_+ + u_-) + \frac{\partial}{\partial x} (v_+ + v_-) - t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ - w_-) &= \frac{N_{xy+} + N_{xy-}}{G_f t}; \quad (17a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} (u_+ - u_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ + w_-) + \frac{1}{t E_f} [(N_{x+} - N_{x-}) - \mu_f (N_{y+} - N_{y-})], \\ \frac{\partial}{\partial y} (v_+ - v_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_+ + w_-) + \frac{1}{t E_f} [(N_{y+} - N_{y-}) - \mu_f (N_{x+} - N_{x-})], \\ \frac{\partial}{\partial y} (u_+ - u_-) + \frac{\partial}{\partial x} (v_+ - v_-) - t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ + w_-) &= \frac{N_{xy+} - N_{xy-}}{G_f t}. \quad (17b)\end{aligned}$$

2. 表鉸中間面位移之形變一致條件:

表鉸中間面位移之形變一致條件要求

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{v\pm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{v\pm}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy\pm}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (18)$$

自 (14) 式 (18) 式及 (10) 式之前二式, 可得

$$\nabla^2 (N_{x\pm} + N_{y\pm}) = (1 + \mu_f) \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right). \quad (19)$$

(19) 式指出問題一若平面應力狀態但有體積力 τ_{xz} , 及 τ_{yz} , 若限制邊界之鉸平面方向分佈載荷為常數 $\bar{N}_x$, $\bar{N}_y$ 及 $\bar{N}_{xy}$, 則

$$\left. \begin{aligned} N_{x\pm} &= \bar{N}_x + \Delta N_{x\pm}, \\ N_{y\pm} &= \bar{N}_y + \Delta N_{y\pm}, \\ N_{xy\pm} &= \bar{N}_{xy} + \Delta N_{xy\pm}; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中 $\Delta N_{x\pm}$, $\Delta N_{y\pm}$, 及 $\Delta N_{xy\pm}$ 為 $N_{x\pm}$, $N_{y\pm}$ 及 $N_{xy\pm}$ 中之變化部分; 但由於夾心要求 τ_{xz} , τ_{yz} 在夾心上下面為同值但方向相反, 因而:

$$\left. \begin{aligned} N_{x\pm} &= \bar{N}_x \pm \Delta N_x, \\ N_{y\pm} &= \bar{N}_y \pm \Delta N_y, \\ N_{xy\pm} &= \bar{N}_{xy} \pm \Delta N_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

於是 (19) 遂可以下式代之:

$$\nabla^2 (\Delta N_x + \Delta N_y) = (1 + \mu_f) \left(\frac{\partial r_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial r_{yz}}{\partial y} \right). \quad (22)$$

3. 幾種特殊形式的位移：

在考慮三合板變形時，由實驗和分析都可發現下列的位移。在實際問題中有其重要性，所以略加討論：

(i) 對稱形變(位移)：在對稱的情況下可令

$$(w_+ + w_-) = 0, \quad (u_+ - u_-) = 0, \quad \text{及} \quad (v_+ - v_-) = 0.$$

而對稱情況要求 w 為 z 之奇次函數。因而自 (6) 中第一式，

$$(\sigma_{xz} - \sigma_{z-}) = w_0 = 0;$$

再依據 (9) 中之第二、三式，則

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

而 (22) 式簡化為： $\nabla^2 (\Delta N_x + \Delta N_y) = 0$ 。

由於 ΔN_x , ΔN_y 在邊界上俱為 0，則在邊界內任何處俱不存在，故

$$\Delta N_x = \Delta N_y = 0.$$

再由平衡微分方程 (10) 及 (11)，則 $\Delta N_{xy} = 0$ 。

其實顯然平面應力狀態中，邊界應力為常數，則面內各處應力不變，因而 $N_{x\pm} = \bar{N}_x$, $N_{y\pm} = \bar{N}_y$ 及 $N_{xy\pm} = \bar{N}_{xy}$ ，而 (17a) 式在對稱位移下簡化為：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (u_+ + u_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ - w_-) + \frac{2}{tE_f} (\bar{N}_x - \mu_f \bar{N}_y), \\ \frac{\partial}{\partial y} (v_+ + v_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_+ - w_-) + \frac{2}{tE_f} (\bar{N}_y - \mu_f \bar{N}_x), \\ \frac{\partial}{\partial y} (u_+ + u_-) + \frac{\partial}{\partial x} (v_+ + v_-) - t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ - w_-) &= \frac{2\bar{N}_{xy}}{G_f t}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(17b) 之三式顯然全部適合 (23) 為對稱形變之連續方程。

(ii) $(w_+ - w_-) = 0$ 型之形變(位移)：

作者認為 $(w_+ - w_-) = 0$ 型之形變為“基本上反對稱形變”，但並不設 $(u_+ + u_-) = 0$ ，及 $(v_+ + v_-) = 0$ 使之完全符合反對稱條件。這種形變在穩定問題中是存在而且必為如此，因為形變首先由於邊界的鉸向壓力為對稱類型然

後繼之以反對稱之形變(撓曲形變)。將 $(w_+ - w_-) = 0$ 條件代入 (17a) 及 (17b), 得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (u_+ + u_-) &= \frac{2}{tE_f} (\bar{N}_x - \mu_f \bar{N}_y), \\ \frac{\partial}{\partial y} (v_+ + v_-) &= \frac{2}{tE_f} (\bar{N}_y - \mu_f \bar{N}_x), \\ \frac{\partial}{\partial y} (u_+ + u_-) + \frac{\partial}{\partial x} (v_+ + v_-) &= \frac{2\bar{N}_{xy}}{G_f t}; \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (u_+ - u_-) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ + w_-) + \frac{2}{tE_f} (\Delta N_x - \mu_f \Delta N_y), \\ \frac{\partial}{\partial y} (v_+ - v_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ + w_-) + \frac{2}{tE_f} (\Delta N_y - \mu_f \Delta N_x), \\ \frac{\partial}{\partial y} (u_+ - u_-) + \frac{\partial}{\partial x} (v_+ - v_-) - t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ + w_-) &= \frac{2\Delta N_{xy}}{G_f t}. \end{aligned} \right\} \quad (24b)$$

其中 (24a) 指出表鋁鋁向的位移平均數值是由鋁向的常值張(壓)力 $\bar{N}_x, \bar{N}_y$ 及剪力 $\bar{N}_{xy}$ 所引起。而 (24b) 為 $(w_+ - w_-) = 0$ 型之形變連續條件。

六. 三合板的一般方程

在三,四,五三節中所得的平衡條件,應力應變關係,以及形變一致條件指出一共有十六個方程 (9, 10 之第一,二 13, 16) 和十六個常數 ($\tau_{xy}, \tau_{yz}, u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}, \sigma_{z\pm}, N_{x\pm}, N_{y\pm}, N_{xy\pm}$), 經過適當的運算可以將數減為五個,即: $w_+, w_-, \Delta N_x, \Delta N_y$, 及 ΔN_{xy} ; 得到五個方程:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta N_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta N_y + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta N_{xy} = \frac{1}{(1+\mu_f)} \nabla^2 (\Delta N_x + \Delta N_y), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (h+t) \nabla^2 (w_+ + w_-) &= -\frac{4(1-\mu_f)}{tE_f} (\Delta N_x + \Delta N_y) + \frac{2h}{(1+\mu_f)G_c} \\ &\quad \nabla^2 (\Delta N_x + \Delta N_y) - \frac{h^3}{6(1+\mu_f)E_c} \nabla^4 (\Delta N_x + \Delta N_y), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} (h+t) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ + w_-) &= \left[\frac{h}{G_c} \nabla^2 - \frac{2}{G_f t} \right] \Delta N_{xy} + \frac{h}{G_c} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ &\quad (\Delta N_x + \Delta N_y) - \frac{h^3}{6(1+\mu_f)E_c} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 (\Delta N_x + \Delta N_y), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 D\nabla^4(w_+ + w_-) &= \frac{h+t}{(1+\mu_f)} \nabla^2(\Delta N_x + \Delta N_y) - (q_+ + q_-) \\
 &+ \bar{N}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}(w_+ + w_-) + \bar{N}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}(w_+ + w_-) + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(w_+ + w_-) \\
 &+ \Delta N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}(w_+ - w_-) + \Delta N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}(w_+ - w_-) + 2\Delta N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(w_+ - w_-), \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D\nabla^4(w_+ - w_-) &= -\frac{2E_c}{h}(w_+ - w_-) - (q_+ - q_-) \\
 &+ \bar{N}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}(w_+ - w_-) + \bar{N}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}(w_+ - w_-) + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(w_+ - w_-) \\
 &+ \Delta N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}(w_+ + w_-) + \Delta N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}(w_+ + w_-) + 2\Delta N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(w_+ + w_-), \quad (29)
 \end{aligned}$$

方程 (25), (26), (27), (28) 及 (29) 構成五個變數 ($w_+ + w_-$), ($w_+ - w_-$), ΔN_x , ΔN_y , 及 N_{xy} 的方程。加上邊界條件即足夠決定 ($w_+ + w_-$), ($w_+ - w_-$), ΔN_x , ΔN_y 及 ΔN_{xy} 之值, 若此五值決定後則由三, 四, 五節之關係可以求出表鋁及夾心之應力及位移。

討 論

本文處理三合板之主要依據：表鋁為受撓曲之薄鋁，而夾心則提供支撐及沿表鋁鋁向之剪力。而現有文獻一般不外於下列情況中加以選擇：

1. 表鋁：(i) 薄膜狀態； (ii) 薄板狀態。
2. 夾心：(i) 彈性支撐； (ii) 剪力作用。

E. Reissner 曾以大撓度薄膜狀態表鋁及剪力作用之夾心開始處理問題。但因過早的綫性化，不但剪力作用的非綫性效應在文中由於反對稱之限制而消失，而且大撓度表鋁的理論竟因此與小撓度表鋁理論相同。此文之缺點顯然更在於表鋁之抗撓作用及夾心之彈性支撐不予計入而不能應用於較厚之表鋁或較硬之夾心構造中。

N. J. Hoff 以薄板狀態表鋁以及具有抗剪力作用之夾心處理三合板，其結果以反對稱之形變之限制成為一綫性理論。

J. N. Goodier, H. Neuber, D. Williams, D. M. A. Leggett, 及 H. G. Hopkins 以及其他作者曾以薄板之表鋁以及具有彈性支撐及抗剪力之夾心建立三夾板理論，但因形變加以限制，“對稱形變”及“反對稱形變”，使問題的非綫性消失；而且

由於夾心材料假定為各向同性體而使理論與實際相去太遠；有時因 E_c/G_c 過小因而略去 E_c 之作用，則結果與 N. J. Hoff 相同。

蘇聯 A. П. Прусаков 曾以薄板及夾心具有彈性支撐及剪力作用情況導出三合板之一般理論，但因 A. П. Прусаков 以各向異性體之小形變彈性力學的方式處理問題（形變受到與表板厚度比較亦為微小之限制），故有關非線性的性質俱在其討論中不能顯出。

本文的 (26) 及 (28) 式如設無分佈載荷， $(q_+ + q_-) = 0$ ，則得

$$\begin{aligned}
 D \left\{ 4 \left[\left(\frac{h}{2t} + 1 \right)^3 - \left(\frac{h}{2t} \right)^3 \right] - \frac{1}{2} \frac{E_f}{G_c} \frac{ht}{(1-\mu_f^2)} \nabla^2 - \frac{1}{24} \frac{E_f}{E_c} \frac{h^3 t}{(1-\mu_f^2)} \nabla^4 \right\} \\
 \nabla^4 (w_+ + w_-) = \left[1 - \frac{1}{2} \frac{E_f}{E_c} \frac{th}{(1-\mu_f^2)} \nabla^2 - \frac{1}{24} \frac{E_f}{E_c} \frac{h^3 t}{(1-\mu_f^2)} \nabla^4 \right] \\
 \left[\bar{N}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ + w_-) + \bar{N}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_+ + w_-) + 2 \bar{N}_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ + w_-) \right. \\
 \left. + \Delta N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ - w_-) + \Delta N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_+ - w_-) + 2 \Delta N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ - w_-) \right]. \quad (30)
 \end{aligned}$$

倘若拋棄非線性各項：

$$\Delta N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ - w_-) + \Delta N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_+ - w_-) + 2 \Delta N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ - w_-),$$

亦即令 $(w_+ - w_-) = 0$ ，則可見 A. П. Прусаков 之結果為本文之一特殊情形。

倘若假設表板無抗撓作用，令 $E_c = \infty$ ， $(w_+ - w_-) = 0$ ，則 (30) 式可以簡化為：

$$\begin{aligned}
 \frac{E_f t (h+t)^2}{4(1-\mu_f^2)} \nabla^4 (w_+ + w_-) = \left[1 - \frac{1}{2} \frac{E_f th}{E_c(1-\mu_f^2)} \nabla^2 \right] \left[\bar{N}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ + w_-) \right. \\
 \left. + \bar{N}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_+ + w_-) + 2 \bar{N}_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ + w_-) \right]. \quad (31)
 \end{aligned}$$

設 $h + t \approx h$ ，則得 E. Reissner 之結果，若僅令 $E_c = \infty$ ， $(w_+ - w_-) = 0$ ，保持表板抗撓作用，則得 N. J. Hoff 之結果。

作者意見：在三合板穩定問題中，達到臨界載荷之起始，形變極小；設為對稱或非對稱型式自屬合理（包括波狀小幅度或局部皺彎），然後根據五、3 中之分

析此種不穩定狀態俱尚可以作為綫性穩定問題解決。但在彎曲問題中由於 τ_{xz} , τ_{yz} 引起之非綫性因素並不能忽略,上列參考文獻以及就作者所知之文獻常以“完全反對稱”作為彎曲之形變限制而使問題綫性。此種處理方式引導出有 τ_{xz} , 及 τ_{yz} , 而 ΔN_x , ΔN_y 竟不存在,這樣是造成理論在稍大形變時即不能與實際符合之主要原因,而所謂稍大形變是指與表板厚度相比,這幾乎是必然會發生的。關於這一問題量的討論以及邊界條件的影響將在文首中所提另文中詳細分析。

三合板的彎曲問題不但應考慮上述以非綫性因素,並且在這一問題上搞清後應更進一步將薄板大撓曲之理論引入表板。也許有人以為既然夾心是以彈性力學小彎形問題為根據,是否表板的形變還可以用大撓度理論呢?其實顯然在本文所指出的夾心性質上 u_0 , v_0 , 及 w_0 本身可以有相當大的有限形變,然而它並不引出夾心應力而再加附加形變,則表板的大撓度理論是完全可以合理建立的。當然這樣的問題在數學上的困難是會更多些。關於大撓度的表板理論對穩定問題和在對稱及 $(w_+ - w_-) = 0$ 型形變的作用,將在附錄中加以討論。

附 錄

一. 夾心與表板受力與物性說明

夾心由於 x , y 方向極為鬆軟,故在受力甚小時即產生有限形變。在量的表達上, E_{cx} , E_{cy} , G_{cxy} 皆 $\ll E_{cz}$ 。故設 $E_{cx} = E_{cy} = G_{cxy} = 0$,同時由於 xz , yz 抗剪的等向性,可設 $G_{cxz} = G_{cyz} = G_c$,原來三正向材料之虎克定律可以用下式表之:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= c_x \sigma_x + c_{xy} \sigma_y + c_{xz} \sigma_z, \\ \epsilon_y &= c_{yx} \sigma_x + c_y \sigma_y + c_{yz} \sigma_z, \\ \epsilon_z &= c_{zx} \sigma_x + c_{zy} \sigma_y + c_z \sigma_z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}}; \end{aligned} \quad (a)$$

其中 $c_{xy} = c_{yx}$, $c_{xz} = c_{zx}$, 及 $c_{yz} = c_{zy}$ 。由於 $c_x = \frac{1}{E_{cx}}$, $c_y = \frac{1}{E_{cy}}$, 且 E_x ,

E_y 皆為有限；故 $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ，而 $G_{cxy} = 0$ ；故 $\tau_{xy} = 0$ 。當 (a) 式中 E_x ， E_y 為有限量時， $c_{xz} = c_{zx}$ ， $c_{yz} = c_{zy}$ 亦必有限。故所需之應力應變關係遂成 (1) 式。同時 c_{xy} ， c_{yz} 既為有限，則在 z 向受力 x ， y 方向自然不會產生橫向形變的現象。

表鈹為等向性材料。在 z 向載荷不大的條件下，(a) 式成為 G. Kirchhoff 情況：

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E_f} (\sigma_x - \mu_f \sigma_y), \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E_f} (\sigma_y - \mu_f \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_f} = \frac{2(1+\mu_f)}{E_f} \tau_{xy}.\end{aligned}\quad (b)$$

(b) 式在表鈹為薄板的情況下限制其 z 向之較大形變。以上討論中始終並不引用設某些彈性係數為無限量（例如參考文獻 2，4，7）的觀念。這些文獻上的假設在物性上解釋是有困難的。

二. 表鈹之大撓度理論

表鈹之形變可能超出表鈹之厚度，故大撓度理論應為合理的方向。根據 Th. V. Karman^[7] 包括鈹向拉(壓)的作用，故下列應變應力關係將代替 (14) 式：

$$\begin{aligned}\epsilon_{x\pm} &= \frac{\partial U_{\pm}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_{\pm}}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{tE_f} (N_{x\pm} - \mu_f N_{y\pm}), \\ \epsilon_{y\pm} &= \frac{\partial V_{\pm}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_{\pm}}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{tE_f} (N_{y\pm} - \mu_f N_{x\pm}), \\ \gamma_{xy\pm} &= \frac{\partial U_{\pm}}{\partial y} + \frac{\partial V_{\pm}}{\partial x} + \frac{\partial W_{\pm}}{\partial x} \frac{\partial W_{\pm}}{\partial y} = \frac{N_{xy\pm}}{G_f t}.\end{aligned}\quad (c)$$

保留 (15) 式，但 (18) 式將易為

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{x\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{y\pm}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy\pm}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial y^2} \right). \quad (d)$$

從 (d) 式開始將使目前所得結果更加複雜。但有一足以注意的情況，若

$$W_{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\pm} e^{\alpha_{n\pm} x + \beta_{n\pm} y}, \quad (e)$$

其中 $A_{n\pm}$ ， $\alpha_{n\pm}$ ，及 $\beta_{n\pm}$ 為未定常數，可為實數或虛數。則 (e) 式雖尚不能包

含所有可能形變，但顯然為綫性方程之一般解可以使之符合，一般平板問題的邊界條件。其實夾心理論的微分方程既為綫性，則形變不過大時令 u, v, w ，和 $W_{\pm} = w_{\pm}$ 成為 (c) 式是合理的，而在邊界壓縮剪切穩定問題中，(c) 式之一項 $A_{n\pm} e^{\alpha_{n\pm}x + \beta_{n\pm}y}$ 為主要形變，無論整塊三合板為何種對稱式 ($w_+ - w_- = 0$ 形變(包括波狀彎曲，局部彎曲)，俱可由 $A_{n\pm} e^{\alpha_{n\pm}x + \beta_{n\pm}y}$ 來表示。但此種形式之形變顯然使 (d) 式的右側不復存在，因而 (19) 式，(21) 式，及 (22) 式俱不受影響；其所引起之變更，祇在 (23) 式及 (24) 式中。此時對稱形變應為：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (u_+ + u_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ - w_-) - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial x} (w_+ - w_-) \right]^2 + \\ &\quad + \frac{2}{tE_f} (\bar{N}_x - \mu_f \bar{N}_y), \\ \frac{\partial}{\partial y} (v_+ + v_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_+ - w_-) - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial y} (w_+ - w_-) \right]^2 + \\ &\quad + \frac{2}{tE_f} (\bar{N}_y - \mu_f \bar{N}_x), \\ \frac{\partial}{\partial y} (u_+ + u_-) + \frac{\partial}{\partial x} (v_+ + v_-) - t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ - w_-) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (w_+ - w_-) \frac{\partial}{\partial y} (w_+ - w_-) = \frac{2\bar{N}_{xy}}{G_f t}. \end{aligned} \quad (f)$$

其餘諸式自然滿足。而 ($w_+ - w_- = 0$ 型形變則

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (u_+ + u_-) + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial x} (w_+ + w_-) \right]^2 &= \frac{2}{tE_f} (\bar{N}_x - \mu_f \bar{N}_y), \\ \frac{\partial}{\partial y} (v_+ + v_-) + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial y} (w_+ + w_-) \right]^2 &= \frac{2}{tE_f} (\bar{N}_y - \mu_f \bar{N}_x), \\ \frac{\partial}{\partial y} (u_+ + u_-) + \frac{\partial}{\partial x} (v_+ + v_-) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (w_+ + w_-) \frac{\partial}{\partial y} (w_+ + w_-) &= \frac{2\bar{N}_{xy}}{G_f t}. \quad (g)_a \\ \frac{\partial}{\partial x} (u_+ - u_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_+ + w_-) + \frac{2}{tE_f} (\Delta W_x - \mu_f \Delta W_y), \\ \frac{\partial}{\partial y} (v_+ - v_-) &= \frac{t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_+ + w_-) + \frac{2}{tE_f} (\Delta W_y - \mu_f \Delta W_x), \\ \frac{\partial}{\partial y} (u_+ - u_-) + \frac{\partial}{\partial x} (v_+ - v_-) - t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_+ + w_-) &= \frac{2\Delta N_{xy}}{G_f t}. \quad (g)_b \end{aligned}$$

由 (f)，(g)_a 可見較 (23)，(24a) 多了非綫性項次，但顯然此問題在本文

所提供解三合板之一般理論中並不引起更多的困難,因為首先 $(w_+ + w_-)$, $(w_+ - w_-)$, ΔN_x , ΔN_y , 及 ΔN_{xy} 可由 (25), (26), (27), (28) 及 (29) 式及邊界條件求得。然後再用 (f) 及 (g)₀ 式。(25) 至 (29) 式僅引用 (17b) 及 (21) 式,而此二者所得結果與 (g)₀ 完全相同,由此可見大撓度表板理論倘若應用在對稱及 $(w_+ - w_-) = 0$ 型的形變範圍內則不會有什麼變更。(25) 至 (29) 式亦即本文由小撓度表板理論所導出之結果。(g)₀ 式中由於 $(w_+ - w_-) = 0$ 的限制使大撓度理論的精細部分完全消失。同時也說明許多作者引用小撓度薄膜理論可與從薄膜應力考慮大撓度表板 E. Reissner^[6] 得出同樣結果。

作者的意見在穩定問題中薄膜表板是不合式的,((30) 式中表板抗撓項次在一般三合板尺寸下並不能略去)。而三合板的彎曲理論首先應從小撓度表板中解決其非綫性的本質。然後再進一步引用大撓度理論,正像本文中所指出夾心理論 (7) 式並不限制其有較大之形變。

參 考 文 獻

- [1] Goodier, J. N., Cylindrical Buckling of Sandwich Plates, *Journal of Applied Mechanics*, **13**(4), 1946.
- [2] Прусаков, А. П., Основные Уравнения изгиба и Устойчивости Трехслойных Пластин с Легким Заполнителем, *Прикладная Математика и Механика* Том XV. В.1. 1951.
- [3] Neuber, H., Stabilitäts theorie der Druckbeanspruchter Verbundplatte, *Report*, No. T-TS-964-RE, March 1948.
- [4] Hoff, N. J., and Mautner, S. F., Bending and Buckling of Sandwich Beams, *Journal of Aeronautical Science* **15**, 1948.
- [5] Williams, D., Leggett, D. M. A., and Hopkins, H. G., Flat Sandwich Panel Under Compression End Loads, *A.R.C. Technical Report*, No. 1987, R. & M. June 1941.
- [6] Reissner, E., Finite Deflections of Sandwich Plates, *Journal of Aeronautical Science*, Vol. **15** July 1948.
- [7] Karman, Th. V., *Encyklopadie der Mathmetischen Wissenschaften*, Vol. 4, p. 349, 1910.
- [8] Tu, C. H., *The Range of Linear Bending*, and the Stability, of Sandwich Plates. Ph. D. Dissertation. Stanford University.

GENERAL EQUATIONS OF SANDWICH PLATES UNDER TRANSVERSE LOADS AND EDGEWISE SHEARS AND COMPRESSIONS

TU CHING-HUA

(*Tsing Hua University*)

ABSTRACT

Non-linear differential equations have been developed for the calculation of the deflections and buckling loads of Sandwich plates subjected to transverse loads and edgewise shears and compressions.

The Sandwich plate consists of two thin metal face sheets bonded to a light slab—the core. The core is taken to have zero moduli as deformations in its own plane. This appears to give an adequate representation of behavior of many core materials.

Some previous theories are shown to be special cases of this more general theory. The essence of non-linearity are shown through the discussion of core properties and action of interface-and-core forces. The restriction of some special forms of displacements of practical interest has been studied and the existence of nonlinear element in the bending problem is clarified. The relative merit of using large bending deflection theory instead of the small bending deflection theory in the faces is given.