

固定邊矩形板的彎曲問題*

胡 海 昌

(中國科學院數學研究所)

一. 引 言

固定邊矩形薄板的彎曲問題，由於它在實用上的重要性和在數學上的困難，曾經是許多力學家和數學家研究的對象。它是百年以來薄板理論中未曾適當解決的問題。關於這個問題的歷史發展，可參考葉開沅同志^[1]和作者^[2]的報告。到 1951 年，蘇聯科學院通訊院士 Г. А. 格林保格^[3]提出了“正交調和函數”的方法，使得求解這個問題在理論上有了可能。之後 Г. А. 格林保格、Н. Н. 列別捷夫和 Я. С. 烏弗良特^[4]算出了前 36 個這樣的正交調和函數，因而使得求解這個問題在實際上亦成為可能。格林保格和列別捷夫、烏弗良特的貢獻是重大的。

但是由於正交調和函數法的特殊性，因而除了與薄板彎曲問題完全相似的彈性力學的平面問題之外，它很難推廣到其他問題中去。

本文提出了一個特殊的攝動法來求解固定邊矩形薄板的彎曲問題。我們將撓度 w 展成小參數 λ (在實際問題中 $\lambda = 1$) 的冪級數，並證明不論矩形兩邊長度的比例如何，這個級數在 $-1 \leq \lambda \leq 1$ 的範圍內是收斂的。因此這樣求得的級數便是真正的解答。

由於本文的攝動法在數學上比較一般其他方法要容易得多，因此可毫不困難地應用於彈性地基上的固定邊矩形板的彎曲問題和某種正交各向異性的場合。據作者所知，直到最近還未曾有人對這兩個問題作過嚴格的數學探討。這並不是由於問題不重要，而由於它們在數學上太困難了。

本文提出的攝動法又富有啓發性，因此它除了適用於彈性力學的平面問題之

* 1954 年 9 月 2 日收到。

外,在加以推廣後還可能適用於固定邊矩形薄板的穩定和振動問題,柱體的平衡問題,特別是圓柱體的軸對稱形變問題,以及柱體的振動問題等等。

二. 固定邊矩形板的彎曲問題

茲先考慮固定邊矩形板的彎曲問題。設板邊的長度為 $2a$ 和 $2b$ 。取一直角坐標系 (x, y) 使得兩軸便是板的對稱軸。板的撓度 w 應適合下列方程和邊界條件:

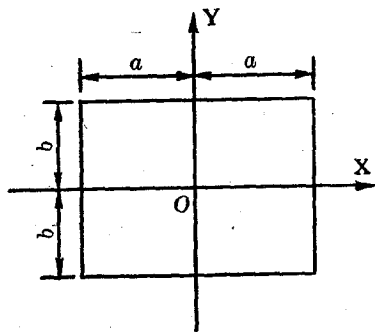


圖 1

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

$$\text{當 } x = \pm a \text{ 時: } w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\text{當 } y = \pm b \text{ 時: } w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

在 $a \gg b$ 的場合,通常認為 x 軸方向的彎曲效應可以略去不計,於是得到

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (3)$$

這亦就是說通常認為在這種場合

$$\left| \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right|. \quad (4)$$

同樣,在 $b \gg a$ 的場合,通常認為 y 軸方向的彎曲效應可以略去不計,這就是說假定

$$\left| \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right|. \quad (5)$$

合併 (4), (5) 兩式的結果可以看出

當 $a > b$ 或 $b > a$ 時, .

$$2 \left| \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right| < \left| \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right|. \quad (6)$$

上列不等式暗示人設想不論 a, b 的比例如何它都成立. 如果接受這一假定, 那末爲了顯明地表示出 $2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ 是一小量, 可把方程 (1) 改寫爲

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\lambda \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}; \quad (7)$$

其中 λ 是一個參變數. 在實際問題中 $\lambda = 1$, 而在運算時我們把它當作是一個小量.

這樣我們引進了一個小量 λ , 我們可利用它應用攝動法來求解撓度. 和別的攝動法一樣, 我們將 w 展成 λ 的幕級數如下:

$$w = w_0 + w_1 \lambda + w_2 \lambda^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \lambda^n. \quad (8)$$

將算式 (8) 代入方程 (7) 和 (2), 並比較 λ 同次幕的係數, 我們得到一系列的方程如下:

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_n}{\partial y^4} = -2 \frac{\partial^4 w_{n-1}}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad n \neq 0. \quad (10)$$

不論 n 等於何值, w_n 的邊界條件爲

$$\begin{aligned} \text{當 } x = \pm a \text{ 時: } w_n &= 0, \frac{\partial w_n}{\partial x} = 0, \\ \text{當 } y = \pm b \text{ 時: } w_n &= 0, \frac{\partial w_n}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

在邊界條件 (11) 下逐次求解方程 (9) 和 (10) 並無多大困難. (詳細的解法牽涉到一些演算技巧, 因此將在另文中討論). 求得 $w_0, w_1, \dots$ 後, 從 (8) 便得 w 的算式. 因此剩下的問題是當 $\lambda = 1$ 時級數 (8) 是否收斂?

爲了研究 λ 在什麼範圍內方程 (7) 的解可以展成 λ 的幕級數, 我們暫時把 λ 看作是任意的複數. 我們把方程 (7) 的解寫成爲

$$w = \frac{p}{D} \varphi(x, y, \lambda), \quad (12)$$

其中 p 是規定載荷 q 的大小的一個常數. 我們把 φ 看作是變數 x, y 和複變數 λ 的函數. 設 $\lambda = \lambda_1$ 爲 $\varphi(x, y, \lambda)$ 的異點中絕對值最小的一個異點. 根據複變函數的理論可知, 當 $|\lambda| < |\lambda_1|$ 時, 函數 $\varphi(x, y, \lambda)$ 可以展成 λ 的幕級數, 即級數 (8) 收斂於真正的解.

當 λ 趨近 λ_1 時, p 趨近於無窮大. 但若適當地選擇載荷 $p = p(\lambda)$, 那麼我們可使

$$\text{當 } \lambda \rightarrow \lambda_1 \text{ 時 } p \rightarrow 0, \text{ 而保持 } p\varphi = \text{有限}. \quad (13)$$

這就是說當 $\lambda = \lambda_1$ 時, 方程

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\lambda_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{當 } x = \pm a \text{ 時, } \varphi = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \text{當 } y = \pm b \text{ 時, } \varphi = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

有不恆等於零的解存在. 換句話說, λ_1 是方程 (14) 在邊界條件 (15) 下的絕對值最小的本徵值.

在方程 (14) 兩端乘以 φ 的共軛數 $\bar{\varphi}$, 然後在板所佔的區域 S 內積分, 得

$$\iint_S \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \bar{\varphi} dx dy + 2\lambda_1 \iint_S \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \bar{\varphi} dx dy + \iint_S \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \bar{\varphi} dx dy = 0.$$

利用部分積分, 並注意到邊界條件 (15), 使得

$$\iint_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} dx dy + 2\lambda_1 \iint_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y} dx dy + \iint_S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} dx dy = 0,$$

即

$$\lambda_1 = - \frac{\iint_s \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} \right] dx dy}{2 \iint_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x \partial y} dx dy}. \quad (16)$$

此式的右端是一實數，因此 λ_1 亦必為實數，這樣從 (14) 可以看出 φ 亦是實數，因此 $\bar{\varphi} = \varphi$ ，公式 (16) 化為

$$\lambda_1 = - \frac{\iint_s \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy}{2 \iint_s \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy}. \quad (17)$$

此式表明 λ_1 是一負數。

由於

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 \geq 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad (18)$$

所以

$$\iint_s \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \geq 2 \iint_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dx dy.$$

再利用部分積分和邊界條件，可得

$$\iint_s \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \geq 2 \iint_s \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy. \quad (19)$$

將此式代入 (17) 式，我們得到 λ_1 的上限如下：

$$\lambda_1 \leq -1. \quad (20)$$

$\lambda_1 = -1$ 相應於公式 (18) 中等號成立，由此可知在這種場合

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (21)$$

因而 φ 可表示為

$$\varphi = f_1(x+y) + f_2(x-y). \quad (22)$$

在 $x = a$ 上的邊界條件要求

$$f_1(a+y) + f_2(a-y) = 0, \quad f_1'(a+y) + f_2'(a-y) = 0. \quad (23)$$

要滿足這兩個條件就必須

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0. \quad (24)$$

當然更無論還有其他三邊上的條件。這就是說 $\lambda_1 \neq -1$, 因此

$$\lambda_1 < -1. \quad (25)$$

由此可知在

$$-1 \leq \lambda \leq 1. \quad (26)$$

的範圍內, 級數 (8) 是收斂的。因此在實際問題中 $\lambda = 1$, 級數 (8) 給出真正的解。

三. 固定邊矩形板在彈性地基上的彎曲問題

假如在板的下面有一彈性地基, 那末板的撓度應適合下列方程和邊界條件:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + k w = \frac{q}{D}, \quad (27)$$

$$\text{當 } x = \pm a \text{ 時, } w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (28)$$

$$\text{當 } y = \pm b \text{ 時, } w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0;$$

其中 k 是大於零的常數。

爲了解方程 (27), 我們接受與上節相似的一個假定, 即

$$2 \left| \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right| < \left| \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + k w \right|. \quad (29)$$

爲了明顯地表示出這一假定, 可把方程 (27) 改寫爲

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \lambda \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + k w = \frac{q}{D}. \quad (30)$$

其中 λ 是一參數, 在實際問題中 $\lambda = 1$, 而在演算時把它看成是一個小量。

這樣我們便可以應用攝動法把 w 展成 λ 的冪級數

$$w = w_0 + w_1 \lambda + w_2 \lambda^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \lambda^n. \quad (31)$$

將此代入方程 (30) 和 (28)，並比較 λ 同次幕的係數，得

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + k w_0 = \frac{q}{D}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_n}{\partial y^4} + k w_n = -2 \frac{\partial^4 w_{n-1}}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad n \neq 0. \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{當 } x = \pm a \text{ 時, } w_n = 0, \frac{\partial w_n}{\partial x} = 0, \\ \text{當 } y = \pm b \text{ 時, } w_n = 0, \frac{\partial w_n}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

方程 (32), (33) 的解法亦無多大困難。(詳細的解法將在另文中討論).
決定 $w_0, w_1, \dots$ 後，我們便得 w 的算式。

爲了決定級數 (31) 的收斂半徑，和上節一樣引導到一個本徵值問題；

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \lambda_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + k \varphi = 0, \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{當 } x = \pm a \text{ 時, } \varphi = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \text{當 } y = \pm b \text{ 時, } \varphi = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

可以證明 λ_1 和 φ 都是實數。在方程 (35) 乘以 φ 然後在板所佔的區域內積分，可得

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= - \frac{\iint_s \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + k \varphi^2 \right] dx dy}{2 \iint_s \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy} < \\ &< - \frac{\iint_s \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy}{2 \iint_s \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy}. \end{aligned} \quad (39)$$

利用上節的結果可知

$$\lambda_1 < -1. \quad (40)$$

因此在

$$-1 \leq \lambda \leq 1 \quad (41)$$

的範圍內級數 (31) 是收斂的, 其中包括了實際問題中的數值 $\lambda = 1$.

四. 正交各向異性板的場合

上兩節提出的方法還適用於某種正交各向異性的矩形板. 設板在一彈性地基上, 那末板的撓度適合方程^[5]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + k w = q. \quad (42)$$

其中 D_{11} , D_{22} , D_{12} , D_{66} 為規定各向異性狀態的常數. 由於 D_{11} , D_{22} 都大於零, 因此經過坐標變換

$$\xi = \frac{x}{\sqrt[4]{D_{11}}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt[4]{D_{22}}}, \quad (43)$$

$$\lambda = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (44)$$

後, 方程 (42) 化為

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\lambda \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + k w = q. \quad (45)$$

根據上節的結果可知當

$$\lambda = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \leq 1 \quad (46)$$

時, 方程 (45) 可用我們的攝動法求解.

參 考 文 獻

- [1] 葉開沅, 彈性薄平板小撓度問題. 彈性薄板的小撓度平衡問題, 中國科學院出版, 1955 年
- [2] 胡海昌, 蘇聯在薄板力學方面的貢獻. 彈性薄板的小撓度平衡問題, 中國科學院出版, 1955 年.
- [3] Гринберг, Г. А., О решение плоской задачи упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром. ДАН СССР, 76 (1951), 661—664.
- [4] Гринберг, Г. А. Лебедев, Н. Н. и Уфлянд, Я. С., Метод решения общей бигармонической задачи прямоугольной области при задании на контуре значений функции и ее нормальной производной, ПММ, 17 (1953), 73—86.
- [5] Лехницкий, С. Г., Анизотропные пластинки, 1947.

ON THE BENDING OF RECTANGULAR PLATES WITH CLAMPED EDGES

HU HAI-CHANG

(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The problem of bending of orthotropic rectangular plates with clamped edges on elastic foundation may be reduced to the following differential equation and boundary conditions

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\lambda \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw = \frac{q}{D}.$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm a,$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \text{at} \quad y = \pm b.$$

In the case of isotropic plates, $\lambda = 1$. In this paper a perturbation method is proposed for the solution of this problem by expanding w in power series of λ :

$$w = w_0 + w_1 \lambda + w_2 \lambda^2 + \dots.$$

It is proved that this series is convergent when $-1 \leq \lambda \leq 1$.