物 理 學 報

第 11 卷 第 2 期 1955 年 3 月

查甫雷金氣體的超聲速運動*

莊 逢 甘

一. 引 言

在本文中我們將討論查甫雷金氣體的運動. 如果氣體之壓力與體積度之間有一線性關係存在,我們就稱這種氣體爲查甫雷金氣體. 查甫雷金氣體在自然界中還不存在. 但正如查甫雷金[1]首先指出而後又爲卡門與錢學森[2]進一步明確了的: 任何一正壓氣體的多方過程,如壓力與體積度的變化不太大,則壓力與體積度的關係曲線,可以用在該曲線上某一點之切線代替, 亦卽在理論上相當於我們有一查甫雷金氣體. 查甫雷金應用這一近似方法求解亞聲速氣流的問題. 卡門與錢學森利用這一假定得出了壓力係數在亞聲速氣流內的壓縮性修正公式, 卽著名的卡門-錢氏公式[2]. 赫里斯瓊諾維奇[3]在 1947 年曾給出了超聲速氣流近似解的解析形式. 他的方法是用一簡單的二次式近似於在準確運動方程內之函數 $\sqrt{\chi(\zeta)}$, 於是方程就變爲一個簡單的歐拉達布形式. 本文的目的亦在於近似地得出超聲速氣流解的解析形式. 應當指出關於定常勻熵二元的超聲速氣流, 我們可以利用特性線法得出近似的數值解,但是這種數字計算, 在一般情況下較嫌繁雜; 因此近似的解析解依然有其重要的實際意義. 本文將查甫雷金,卡門-錢氏的近似方法應用到超聲速氣流,於是運動方程可以被變換成一波動方程. 這樣在超聲速氣流中所常遇到的四類始值問題[4],均可以用解析形式表出. 在本文的第四節,我們仿照赫里斯瓊諾維奇的辦法,但將函數 $\sqrt{\chi(\zeta)}$ 在聲速附近展開, 且僅保留其第一項; 這樣我們便有可能利用屈立可米[5]的研究結果給出在速度平面內解的一般形式; 同時我們給出了物理平面, 卽 (x, y) 平面與速度平面之間的近似映像關係. 於是我們就解決了微超聲速氣流的問題.

* 1954 年 8 月 19 日收到.

二. 運動方程的變換

我們考慮一定常無旋二元正壓氣體的流動. 以 φ 代表速勢, ψ 爲流函數; x, y 爲物理平面內之直角坐標; q 爲速度之絕對值, θ 爲速度矢量與 $+x$ 軸之間的夾角. 根據通常的 φ 和 ψ 的定義,我們就有:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = q(\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy), \tag{1.1}$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -\frac{\rho}{\rho_0} q(\sin\theta\, dx - \cos\theta\, dy). \tag{1.2}$$

(1.2) 式中 ρ_0 代表某一特徵密度. 將上式看作是 dx 及 dy 的聯立方程,解出 dx 及 dy, 並設

$$dz = dx + i\,dy,$$

則我們有

$$dz = \left(d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho} d\psi\right)\frac{e^{i\theta}}{q}; \tag{2}$$

dz 爲一全微分. 現在我們將 z 作爲 s 與 θ 兩個獨立變數的函數, s 爲某一速度值 q 之函數

$$s = s(q) \qquad 或 \qquad q = q(s). \tag{3}$$

利用 dz 爲全微分的充要條件,我們便得出

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left[\frac{\rho_0}{\rho}\frac{q}{q'(s)}\right]\frac{\partial \psi}{\partial s}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\left[\frac{\rho_0}{\rho}\frac{q'(s)}{q} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right]\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \tag{4.2}$$

$q'(s)$ 爲 q 對 s 之微商. 我們這樣來決定 $q(s)$, 使

$$\frac{\rho_0}{\rho}\frac{q}{q'(s)} = -\left[\frac{\rho_0}{\rho}\frac{q'(s)}{q} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right] = \sqrt{K(s)}; \tag{5}$$

上式中 K 爲某一合宜的 s 的函數. 於是方程 (4.1), (4.2) 變爲:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \sqrt{K}\frac{\partial \psi}{\partial s}, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{6.2}$$

給定一函數 $K(s)$ 即可決定一壓力與密度的變化關係，且可通過決定在這一得出的關係式內的常數，使這一關係式與實在的壓力與密度變化關係非常近似，從而我們便能得出氣體流動的近似解.

我們注意根據柏努利方程，沿任一流線有

$$\frac{q^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}=C=\text{常數}. \tag{7}$$

我們假設沿每一流線的滯點溫度爲同一常數[1]，則 (7) 式內常數對於任一流線均將適用. 將 (7) 式對 s 微分，我們有

$$q\,\frac{dq}{ds}+\frac{1}{\rho}\,\frac{dp}{ds}=0. \tag{8}$$

(8) 式與 (5)式組成 ρ、p、q 的三個聯立常微分方程，將此方程組積分，即可獲得一定的壓力與密度之間的關係. 我們先得出一個合適的 K 的表示式. 將 (8) 式代入 (5) 式，得

$$-\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{\rho q^2}{\frac{dp}{ds}}=\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{1}{\rho q^2}\,\frac{dp}{ds}+\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

設 a 爲局部聲速，

$$a^2=\frac{dp}{d\rho},$$

於是

$$\frac{dp}{ds}=\frac{dp}{d\rho}\,\frac{d\rho}{ds}=a^2\,\frac{d\rho}{ds}.$$

我們可得 dq/ds 如下:

$$\left(\frac{dq}{ds}\right)^2=\frac{a^2\,q^2}{q^2-a^2}. \tag{9}$$

再利用 (5) 式得 K 之表示式如下，引進 M 數，$M=q/a$，

$$K=\left[\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{q}{q'(s)}\right]^2=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\frac{q^2-a^2}{a^2}=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2(M^2-1). \tag{10}$$

---

[1] 在定常，無旋，勻熵的條件下，滯點溫度必爲一常數.

由 (10) 式可知,我們的變換式 (5) 對於超聲速氣流為一實數變換,亦卽此種變換對於亞聲速氣流不甚適宜.

現在我們看從 (5) 式與 (8) 式可得到密度 ρ 與 s 的關係,類似地我們亦可得出壓力 p 與 s 的關係. 我們有

$$\rho_0 q^2 = -\sqrt{K}\,\frac{dp}{ds},$$

及

$$\frac{\rho_0}{\rho^2 q^2}\frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \sqrt{K}.$$

因此於上兩式中消去 dp/ds, 得

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{\rho_0}{\sqrt{K}} - \frac{\rho^2}{\rho_0}\sqrt{K}. \tag{11}$$

已知 $K(s)$,將上式積分卽得 ρ 與 s 之關係.

我們將不在本文中討論 $K(s)$ 可能的函數的一般形式,而僅討論一最簡單的重要情況,卽我們設

$$K = K_0 = \text{常數},$$

這樣我們就得出一特殊的壓力與密度之關係. 從 (10) 式,我們有

$$K_0 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \left\{ \frac{2C - 2\int \frac{dp}{\rho}}{\frac{dp}{d\rho}} - 1 \right\} \tag{12}$$

或

$$K_0 \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\frac{dp}{d\rho} = 2C - 2\int \frac{dp}{\rho} - \frac{dp}{d\rho}, \tag{12$'$}$$

此為一積分微分方程. 將上式對 ρ 微分,我們有

$$\left(K_0 \frac{\rho^2}{\rho_0^2} + 1\right)\left(\frac{d^2 p}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\right) = 0.$$

因為[1] $K_0 > 0$, 上式中第一個括弧內之數量不為零,故必

[1] 我們討論超聲速氣流.

$$\frac{d^2p}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dp}{d\rho}=0\,;$$

極易得出這一微分方程之解爲

$$p=A+\frac{B}{\rho},\tag{13}$$

A 與 B 爲二積分常數. 從 (13) 式可見祇有氣體壓力與體積度有一線性關係時,亦卽僅有對查甫雷金氣體,我們才有可能選擇 K 爲一常數值.

常數 A 與 B 可仿照查甫雷金的辦法決定,卽我們以在特徵密度 ρ_0 與特徵壓力 p_0 一點的壓力與體積度關係曲線之切線表示在相應問題中的壓力與體積度的變化. 設

$$a_0^2=\frac{\gamma\,p_0}{\rho_0}\,;$$

其中 γ 爲比熱比值，a_0 爲特徵聲速. p_0、a_0、ρ_0 可以是在無窮遠上游處超聲速氣流中的壓力、聲速與密度. 決定了 A, B 之後,方程 (13) 便變爲

$$p=p_0+a_0^2\,\rho_0-\frac{a_0^2\,\rho_0^2}{\rho},\tag{13$'$}$$

故聲速

$$a^2=\frac{dp}{d\rho}=\frac{a_0^2\,\rho_0^2}{\rho^2}.\tag{14}$$

(14) 式表示密度減少,聲速卽增加；反之如密度增加,聲速卽減少. 這一情況,正如錢學森早已指出,是與一般氣體,如空氣的物理性質不符合的.

以 q_0 代表相當於特徵狀態之速度値,現在柏努利方程可寫爲

$$q^2-a^2=q_0^2-a_0^2.\tag{15}$$

上式表示如流速增加聲速亦增加，流速減少聲速亦隨之減少. 由此可見，如 $q_0>a_0$，卽在特徵狀態時氣流爲超聲速,則在我們所討論的氣流中流速將永遠爲超聲速. (15) 式亦可用速度與密度之關係表示如下:

$$q^2-\frac{a_0^2\,\rho_0^2}{\rho^2}=q_0^2-a_0^2.\tag{16}$$

從上式可見,當速度增加時密度卽減少,這與實際氣流的情况一致. 應當指出當

q 趨近於無限大時，M 數卽趨近於 1，由於聲速 a 隨流速而增加；因此，此地所用之 M 數，除代表一符號以外並無其他意義.

$$M=\frac{\rho q}{\rho_0 a_0}.$$

柏努利方程主要給出了（16）式速度與密度之間的關係. 本文的近似計算卽給出 q 與 ρ 之近似值.

現在的問題是要決定採用了（13′）壓力與密度的變化關係以後，作爲常數值之 K 的大小如何；同時 s 爲什麽樣的 q 的函數. 首先 K_0 之值極易求出. 我們注意

$$M^2-1=\frac{q^2-a^2}{a^2}=\frac{q_0^2-a_0^2}{a^2}=\frac{q_0^2-a_0^2}{a_0^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2},$$

故

$$K_0=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2(M^2-1)=\frac{q_0^2-a_0^2}{a_0^2}=M_0^2-1; \tag{17}$$

其中 M_0 爲相當於特徵狀態之 M 數. 於是對於查甫雷金氣體，方程（6.1）及（6.2）可寫成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\sqrt{M_0^2-1}\,\frac{\partial\psi}{\partial s}, \tag{18.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\sqrt{M_0^2-1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{18.2}$$

於（18）式中消去 ψ 或 φ，我們得 φ 與 ψ 均適合波動方程如下：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0, \tag{19.1}$$

及

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0. \tag{19.2}$$

$s(q)$ 可以這樣決定，從（9）式我們有

$$\frac{ds}{dq}=\sqrt{\frac{q^2-a^2}{a^2q^2}}. \tag{20}$$

利用柏努利方程，得

$$\frac{ds}{dq} = \frac{1}{q}\sqrt{\frac{q_0^2 - a_0^2}{q^2 - q_0^2 + a_0^2}}\,.$$

設當在特徵狀態時，s 之值為零．我們注意這樣的選擇 s 與另一相差一常數值之 s 對方程本身無影響．我們有

$$s = \int_{q_0}^{q}\sqrt{\frac{q_0^2 - a_0^2}{q^2 - q_0^2 + a_0^2}}\,\frac{dq}{q} = \sin^{-1}\frac{\sqrt{M_0^2 - 1} - \sqrt{M^2 - 1}}{MM_0}\,. \tag{21}$$

(21) 式可寫成

$$\sin s = \frac{\sqrt{M_0^2 - 1} - \sqrt{M^2 - 1}}{MM_0}\,. \tag{22}$$

三. 始值問題之解

φ 與 ψ 均適合波動方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0\,, \tag{19.1}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0\,. \tag{19.2}$$

引進新變數 λ 與 μ,

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= s + \theta\,, \\ \mu &= s - \theta\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

在 (λ, μ) 平面內我們有一組固定的特性線，

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \text{const.}\,, \\ \mu &= \text{const.}\,, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

方程 (19) 之通解為

$$\psi = f(\lambda) + g(\mu) \tag{25.1}$$

及

$$\varphi = \sqrt{M_0^2 - 1}\,\{f(\lambda) - g(\mu)\}\,; \tag{25.2}$$

f 及 g 為二任意函數，它們適合一定的微分條件．

(25) 式給出了 φ 與 ψ 作為 q 與 θ 的函數．我們的目的是要求出在物理平面內速度分佈的情況．為此我們利用 (2) 式，分開實數與虛數部分，得

$$dx = \frac{\cos\theta}{q}\,d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho q}\sin\theta\,d\psi\,, \tag{26.1}$$

$$dy = \frac{\sin\theta}{q}\,d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho q}\cos\theta\,d\psi. \tag{26.2}$$

我們注意

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sqrt{\frac{M_0^2-1}{M^2-1}}$$

爲 s 的函數，故 (26) 式可寫成

$$dx = Z_1(s)\cos\theta\,d\varphi - Z_2(s)\sin\theta\,d\psi, \tag{27.1}$$

$$dy = Z_1(s)\sin\theta\,d\varphi + Z_2(s)\cos\theta\,d\psi; \tag{27.2}$$

此地

$$Z_1(s) = \frac{1}{q}, \qquad Z_2(s) = \frac{\rho_0}{\rho q}.$$

但

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\,d\theta, \tag{28.1}$$

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial s}\,ds + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,d\theta. \tag{28.2}$$

再利用 (18) 式，我們有

$$dx = \left\{Z_1(s)\cos\theta\sqrt{M_0^2-1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - Z_2(s)\sin\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\right\}ds + \\ + \left\{Z_1(s)\cos\theta\sqrt{M_0^2-1}\,\frac{\partial\psi}{\partial s} - Z_2(s)\sin\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right\}d\theta, \tag{29.1}$$

$$dy = \left\{Z_1(s)\cos\theta\sqrt{M_0^2-1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + Z_2(s)\sin\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\right\}ds + \\ + \left\{Z_1(s)\cos\theta\sqrt{M_0^2-1}\,\frac{\partial\psi}{\partial s} + Z_2(s)\sin\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right\}d\theta. \tag{29.2}$$

決定了 $\psi = \psi(\lambda,\mu) = \psi(s,\theta)$ 以後，將上式積分，卽可求出在物理平面內速度分佈的情況.

現在我們就利用通解 (25) 求出四種標準始値問題解的解析形式.

1. 在物理平面 (x, y) 內給出一曲線 C，曲線之方程用參變數 t 表示如下:

$$\left.\begin{aligned} x &= X(t), \\ y &= Y(t). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

在此曲線上我們給出氣流速度之值及其方向 (q, θ):

$$q = q(t),$$
$$\theta = \theta(t).$$

設此時這一曲線不為一特性線,且在任何一點均不與特性線相切. 對應於曲線上一點 (q, θ) 之值,有一相當的 (λ, μ) 之值; 因此在物理平面內的曲線可以映像到 (λ, μ) 平面內之一曲線 C', 這一曲線的方程可以

$$\lambda = \Lambda(\mu)$$

或

$$\mu = M(\lambda) \tag{31}$$

表示,且此曲線並不具有水平或垂直切線. 在這一曲線上 φ 和 ψ 之值可用下列辦法求得; 沿曲線 C 我們有

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dY}{dt},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dY}{dt}. \tag{32}$$

因為在 C 上, $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = q\cos\theta$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = q\sin\theta$, $\cdots$ 均為 t 的已知函數,於是 (32) 式即為 φ 與 ψ 的兩個一級常微分方程,積分即可求得 φ 與 ψ 在 C 上作為 t 的函數. 積分常數是無關緊要的,因為我們可以選擇在流場中某一點,使在該點之 φ 與 ψ 之值為零. 這樣,沿曲線 C', 我們就有

$$\varphi = \varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\mu)$$

及

$$\psi = \psi_1(\lambda) = \psi_2(\mu). \tag{33}$$

利用 ψ 之通解形式

$$\psi = f(\lambda) + g(\mu),$$

將上式對 λ 或 μ 偏微分.我們就得

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{df}{d\lambda}, \tag{34.1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = \frac{dg}{\partial\mu}. \tag{34.2}$$

如果求出在 C' 上之 $\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$ 與 $\frac{\partial\psi}{\partial\mu}$ 之值，則將上式積分，極易求出 f 與 g，從而求得本問題中之流函數．我們注意，在 C' 上

$$\frac{d\psi_1}{d\lambda}=\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}+\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{dM}{d\lambda}, \tag{35.1}$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\lambda}=\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{dM}{d\lambda}. \tag{35.2}$$

採用變數 λ 及 μ，我們可將 (18) 式變換成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\sqrt{M_0^2-1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \tag{36.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}=\sqrt{M_0^2-1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\mu}. \tag{36.2}$$

利用 (36) 式，(35.2) 式可寫成

$$\frac{d\varphi_1}{d\lambda}=\sqrt{M_0^2-1}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{dM}{d\lambda}\right\}. \tag{35.2$'$}$$

從 (35.1) 及 (35.2)$'$ 二式卽可求出 $\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$ 及 $\frac{\partial\psi}{\partial\mu}$ 在曲線 C' 上作爲 λ 或 μ 的函數．這樣我們就可求出 $f(\lambda)$ 和 $g(\mu)$，解決了在本段中所提出的問題．

2．在第二類問題中，我們將討論所謂特性始值問題．始值給定在二相交的特性線上，

$$\lambda=\lambda_0,\qquad \mu=\mu_0.$$

在此二特性線上不能將 φ 與 ψ 之值同時給出，這樣做會使解不存在，除非原來所給之 φ 或 ψ 值中間的一個是多餘的．設沿特性線 $\lambda=\lambda_0$ 時

$$\psi=\psi_1(\mu),$$

沿特性線 $\mu=\mu_0$ 時

$$\psi=\psi_2(\lambda).$$

爲了使 ψ 爲一連續函數，我們必須有

$$\psi_1(\mu_0)=\psi_2(\lambda_0).$$

我們可以設這一數值爲零

$$\psi_1(\mu_0) = 0\,. \tag{37}$$

這一問題之解極其簡單. 利用 ψ 的通解形式

$$\psi = f(\lambda) + g(\mu)$$

及始值條件,我們有

$$\psi_1(\mu) = f(\lambda_0) + g(\mu)\,, \tag{38.1}$$

$$\psi_2(\lambda) = f(\lambda) + g(\mu_0)\,. \tag{38.2}$$

將上兩式相加,得

$$\psi = \psi_1(\mu) + \psi_2(\lambda) - f(\lambda_0) - g(\mu_0)\,. \tag{39}$$

於 (38.2) 式中令 $\lambda = \lambda_0$, 並注意 (37) 式,我們有

$$\psi_2(\lambda_0) = f(\lambda_0) + g(\mu_0) = 0\,. \tag{40}$$

於是我們便得 ψ 之解為

$$\psi = \psi_1(\mu) + \psi_2(\lambda)\,, \tag{41}$$

速勢 φ 為

$$\varphi = \sqrt{M_0^2 - 1}\left\{\psi_2(\lambda) - \psi_1(\mu)\right\}. \tag{42}$$

3. 常常我們遇到在物理平面內邊界值的問題. 設我們有一二元固體邊界,如用 θ 作為參變數,我們將固體邊界曲線 C 的方程用下式表示:

$$\begin{aligned} x &= X(\theta)\,,\\ y &= Y(\theta)\,. \end{aligned} \tag{43}$$

氣體流過固體邊界曲線時與邊界相切, 亦即邊界曲線為一流線 $\psi =$ 常數, 取這一常數為零,即沿曲線 C 我們有

$$\psi = 0\,. \tag{44}$$

同時在這類問題中,我們已知在一與邊界曲線相交的特性線上之流函數之值. 設此一特性線為 $\lambda = \lambda_0 =$ 常數,於是我們有

$$當\quad \lambda = \lambda_0\,,\qquad \psi = \psi_2(\mu)\,. \tag{45}$$

這一類問題的解比較復雜. 我們可將它化成一個常微分方程的積分問題.

首先我們寫出 ψ 之通解

$$\psi = f(\lambda) + g(\mu),$$

並利用在特性線上的初始條件,我們有

$$\psi_2(\mu) = f(\lambda_0) + g(\mu).$$

因此,流函數 ψ 爲

$$\psi(\lambda, \mu) = f(\lambda) - f(\lambda_0) + \psi_2(\mu). \tag{46}$$

現在我們設法利用條件 (44). 我們注意當

$$x = X(\theta), \qquad \psi = 0;$$

因而

$$d\psi = 0.$$

利用公式 (27.1), 我們有

$$\frac{dX}{d\theta} = Z_1(s)\cos\theta \frac{d\varphi}{d\theta} = Z_1(s)\cos\theta \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{d\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\theta}\right\}.$$

利用公式 (36) 上式可寫成

$$\frac{dX}{d\theta} = Z_1(s)\sqrt{M_0^2 - 1}\cos\theta \left\{\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{d\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\theta}\right\}. \tag{47}$$

將 (46) 式結果代入上式,得

$$\frac{dX}{d\theta} = Z_1(s)\sqrt{M_0^2 - 1}\cos\theta \left\{f'(\lambda)\frac{d\lambda}{d\theta} - \psi_2'(\mu)\frac{d\mu}{d\theta}\right\}.$$

但沿 C, $\psi = 0$, 故

$$f(\lambda) - f(\lambda_0) + \psi_2(\mu) = 0.$$

將上式對 θ 微分,我們得

$$f'(\lambda)\frac{d\lambda}{d\theta} + \psi_2'(\mu)\frac{d\mu}{d\theta} = 0; \tag{48}$$

故

$$\frac{dX}{d\theta} = -2Z_1(s)\sqrt{M_0^2 - 1}\cos\theta\, \psi_2'(\mu)\frac{d\mu}{d\theta},$$

但

$$\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta} - 1.$$

最後我們得沿曲線 C, s 與 θ 的關係微分方程如下：

$$\frac{dX}{d\theta} = 2\,Z_1(s)\sqrt{M_0^2-1}\,\cos\theta\;\psi_2'(s-\theta)\left\{1-\frac{ds}{d\theta}\right\}, \tag{49}$$

將上式積分，即得沿 C 之 s 或 q 之分佈規律

$$s = s(\theta)\,.$$

這樣我們便可找到曲線 C 在 (λ, μ) 平面內的映像 C'，以方程

$$\mu = M(\lambda)$$

表示．這樣我們就極易求出 ψ 之解為

$$\psi = -\psi_2\,(M(\lambda)) + \psi_2(\mu)\,, \tag{50.1}$$

及

$$\varphi = -\sqrt{M_0^2-1}\left\{\psi_2\,(M(\lambda)) + \psi_2(\mu)\right\}. \tag{50.2}$$

4．在上一類問題中我們考慮了固體邊界的情況，現在我們考慮自由邊界的情況．在自由表面上，一方面它為一流線，另一方面在此流線上壓力到處相等，亦即在此線上 s 為一常數值，設為 s_0；於是我們有在這一問題中的條件是

$$\text{當}\quad \lambda+\mu = s_0\,,\qquad \psi = 0\,.$$

另外我們給出沿一特性線 ψ 之值，我們設

$$\text{當}\quad \lambda = \lambda_0\,,\qquad \psi = \psi_2(\mu)\,.$$

再取 ψ 之通解形式如下：

$$\psi = f(\lambda) + g(\mu)\,.$$

當 $\lambda = \lambda_0$,

$$\psi_2(\mu) = f(\lambda_0) + g(\mu)\,;$$

故

$$\psi = f(\lambda) - f(\lambda_0) + \psi_2(\mu)\,. \tag{51}$$

當 $\lambda = s_0 - \mu$, 我們有

$$f(s_0-\mu) - f(\lambda_0) + \psi_2(\mu) = 0\,.$$

故以 $\mu = (s_0 - \lambda)$ 代入上式，便得

$$f(\lambda) - f(\lambda_0) + \psi_2(s_0 - \lambda) = 0 .$$

於是最後得 φ 與 ψ 之解爲

$$\psi = -\psi_2(s_0-\lambda) + \psi_2(\mu) \tag{52}$$

及

$$\varphi = -\sqrt{M_0^2 - 1}\left\{\psi_2(s_0-\lambda) + \psi_2(\mu)\right\}. \tag{53}$$

四. 微超聲速氣流

赫里斯瓊諾維奇[3] 在討論超聲速氣流近似解時,曾導出下列方程,表示沿特性線 $d\varphi$ 與 $d\psi$ 的關係爲

$$d\psi = \pm \frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{v})}} d\varphi ; \tag{54}$$

此地

$$\bar{v} = \frac{q}{a_*},$$

a_* 爲臨界聲速,

$$\chi(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^2 - 1}{\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\bar{v}^2\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} . \tag{55}$$

特性線之方程爲

$$\theta \mp \zeta(\bar{v}) = \text{const.} . \tag{56}$$

此地

$$\zeta(\bar{v}) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \sqrt{\frac{\bar{v}^2 - 1}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\bar{v}^2}} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\bar{v}^2 - 1}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\bar{v}^2}} .$$

引進變數 λ 及 μ,

$$\zeta - \theta = 2\lambda,$$

$$\zeta + \theta = -2\mu .$$

我們有

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{v})}} , \tag{57.1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{v})}} . \tag{57.2}$$

極易證明當 $\zeta \approx 0$ 時,卽在聲速附近[1)]

$$\sqrt{\chi} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{2+\gamma}{3(\gamma-1)}} \sqrt[3]{3\zeta} + \cdots .$$

因此作爲一次近似,我們可取

$$\sqrt{\chi} = \alpha \zeta^{1/3}, \tag{58}$$

這裏

$$\alpha = (3)^{1/3}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{2+\gamma}{3(\gamma-1)}} .$$

於是 φ 和 ψ 之微分方程爲

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial\lambda\,\partial\mu} - \frac{1}{6(\lambda-\mu)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right) = 0, \tag{59.1}$$

及

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \frac{1}{6(\lambda-\mu)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) = 0. \tag{59.2}$$

(59) 式爲歐拉–達布方程. 利用屈立可米的結果, ψ 之通解可寫成

$$\psi = (\lambda-\mu)^{2/3}\int_0^1 F\,[\lambda + (\lambda-\mu)\,t]\,[t\,(1-t)]^{-1/6}\,dt + \\ + \int_0^1 G\,[\lambda + (\lambda-\mu)\,t]\,[t\,(1-t)]^{-5/6}\,dt. \tag{60}$$

F 與 G 爲二任意函數,適合一定的積分條件. 如果在聲速線

$$\lambda = \mu$$

上 ψ 與 φ 爲已知,

$$\psi = \Psi_0(\lambda), \qquad \varphi = \Phi_0(\lambda);$$

則不難找出 ψ_0, φ_0 與 F, G 之關係如下:

$$G(\lambda) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}\Psi_0(\lambda), \tag{61.1}$$

及

[1)] 此地我們僅討論超聲速氣流,卽有一組實特性線時,因此下面的討論適用於微超聲速氣流.

$$F(\lambda) = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}\frac{d\Phi_0}{d\lambda}. \tag{61.2}$$

公式（60）與（61）基本上解決了微超聲速氣流的問題，如果聲速線的形狀及在線上的速度方向分佈爲已知．爲了能使在（λ，μ）平面內之解搬回物理平面，我們必須找出一種近似的映像關係．很明顯的，現在我們不能直接將結果代入（26.1）及（26.2）式求出積分，因爲由於（58）式 dx 與 dy 將不爲全微分．

以 u，v 代表沿（x，y）方向的分速度，我們爲方便起見，採用與上面稍不同的 φ 和 ψ 的定義，我們定義

$$\rho u = \rho_* a_* \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \rho v = -\rho_* a_* \frac{\partial\psi}{\partial x}; \tag{62.1}$$

$$u = a_* \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = a_* \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{62.2}$$

ρ_* 爲臨界密度．採用在（3）節中處理的辦法，我們得

$$dx = \frac{1}{\bar{v}}\cos\theta\, d\varphi - \frac{\rho_*}{\rho\bar{v}}\sin\theta\, d\psi,$$

及

$$dy = \frac{1}{\bar{v}}\sin\theta\, d\varphi + \frac{\rho_*}{\rho\bar{v}}\cos\theta\, d\psi.$$

引進 Z_1，Z_2 作爲 ζ 的函數，

$$Z_1 = \frac{1}{\bar{v}}, \qquad Z_2 = \frac{\rho_*}{\rho\bar{v}};$$

於是

$$dx = Z_1(\zeta)\cos\theta\, d\varphi - Z_2(\zeta)\sin\theta\, d\psi,$$

$$dy = Z_1(\zeta)\sin\theta\, d\varphi + Z_2(\zeta)\cos\theta\, d\psi.$$

將（x，y）看作是（λ，μ）的函數，並利用方程（57），我們有

$$dx = -[Z_1\sqrt{\chi}\cos\theta + Z_2\sin\theta]\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}d\lambda + $$

$$+ [Z_1\sqrt{\chi}\cos\theta - Z_2\sin\theta]\frac{\partial\psi}{\partial\mu}d\mu,$$

及

$$dy = -[Z_1\sqrt{\chi}\sin\theta - Z_2\cos\theta]\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}d\lambda + $$

$$+ [Z_1\sqrt{\chi}\sin\theta + Z_2\cos\theta]\frac{\partial\psi}{\partial\mu}d\mu.$$

由於 dx, dy 應爲全微分,故得

$$\frac{dZ_2}{d\zeta} - Z_1\sqrt{\chi} = 0\,, \tag{63.1}$$

$$\sqrt{\chi}\,\frac{dZ_1}{d\zeta} + Z_2 = 0\,. \tag{63.2}$$

現在

$$\sqrt{\chi} = \alpha\zeta^{1/3}.$$

從（63）式中消去 Z_2，我們得

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^{1/3}\frac{dZ_1}{d\zeta}\right) + Z_1\zeta^{1/3} = 0\,.$$

令 $Z_1 = \zeta^{1/3}\ W(s)$，我們得

$$\frac{d^2W}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dW}{d\zeta} + \left(1 - \frac{1}{9\zeta^2}\right)W = 0\,. \tag{64}$$

上式爲一標準貝塞耳微分方程,故

$$W = C\,J_{1/3}(\zeta) + C_2\,J_{-1/3}(\zeta)\,. \tag{65}$$

C_1 與 C_2 爲二積分常數,於是我們有

$$Z_1 = \zeta^{1/3}\{C_1\,J_{1/3}(\zeta) + C_2\,J_{-1/3}(\zeta)\}\,, \tag{66.1}$$

利用（63.2）式我們有

$$\begin{aligned} Z_2 &= -\alpha\,\zeta^{1/3}\frac{d}{d\zeta}Z_1 \\ &= \alpha\,\zeta^{1/3}\{-C_1\,J_{-2/3}(\zeta) + C_2\,J_{2/3}(\zeta)\}\,. \end{aligned} \tag{66.2}$$

我們這樣決定 C_1 與 C_2 使當 $\zeta = 0$ 卽在聲速時爲準確,卽取

$$Z_1(0) = Z_2(0) = 1\,,$$

於是

$$c_1 = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{2/3}\,\alpha}\,, \qquad c_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2^{1/3}}\,. \tag{67}$$

五. 結　　語

在本文中我們研究了查甫雷金氣體的超聲速運動. 研究這一類氣體運動之價值在於任何一實際氣體流動過程中,壓力與體積度變化的關係曲線，當密度與壓力變化不大時,可以用一切線表示，亦卽此時的氣體運動可以被認爲是查甫雷

金氣體的運動. 當然此地所描述的方法，不僅限於用一根切線來近似壓力與體積度的關係； 我們可以用一系列的切線，這樣就很容易推廣我們這一理論應用的範圍. 同時從本文的討論中可以明顯地看出赫里斯瓊諾維奇[3]的方法，本質上相當於選擇一壓力與體積度的關係， 這一關係在赫里斯瓊諾維奇理論應用的 M 數範圍內與實際的壓力與體積度的關係非常近似. 但在本文中更給出了求近似解的廣泛的可能性，祇要選擇適當的 $K(s)$[1)]，使我們在現有的數學基礎上能很順利地解出流函數方程就可以. 給定一 $K(s)$，通過積分可決定壓力與密度變化關係，這裏的積分常數可以這樣決定，例如使這一變化關係通過實際壓力與密度變化曲線上的某幾點.

參 考 文 獻

[1] Чаплыгин, С. А., О газовых струях. Собрание сочинений, Т. П. Гостехиздат, (1948).

[2] Tsien H. S. (錢學森), Two-Dimensional Subsonic Flow of Compressible Fluids. *Jour. Aero. Sci.*, **6** (1939), 399.

[3] Христианович, С. А., Приближенное интегрирование уравнений сверхзвуковых течений газа. *ПММ* XI. (1947), 2.

[4] 例見 Аржаников и Мальцев: Аэродинамика, Оборонгиз (1952).

[5] Трикоми (Tricomi), Ф, О линейных уравнениях смешанного типа. Гостехиздат, (1947).

ON THE SUPERSONIC MOTION OF CHAPLYGIN GAS

CHUANG FENG-KAN

ABSTRACT

In this paper the approximation which was originally introduced by Chaplygin in his famous paper "on gas jet" for the treatment of subsonic flow is extended to the supersonic motion. Four typical initial value problems are solved using hodograph variables, and the analytical forms of the solutions are obtained. The approximate solutions of supersonic flow given by Christianovich is extended in this paper to slightly supersonic flow. Finally the relation between the Christianovich's approximate method and the general treatment presented here is studied.

1) 林鴻蓀同志指出我們可以選擇一 $K(s)$ 函數形式，內含有邊界條件參數例如厚度參數，這樣將可使解邊界值問題時更爲方便.