

流體力學的一個定理及在氣象學上的應用*

(大氣溫度直降率的變化及對流頂同質點造成的條件)

束 星 北

(山東大學物理系)

一. 基本關係的導出

設某量值 $s(x, y, z, t)$ 在連續體中為 x, y, z, t 的函數, 則其隨質點運動的變化率可寫成

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (1)$$

以上 u, v, w 代表該質點在 x, y, z 三方向的分速; $\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial z}$ 代表 s 數值在空間的陡度; 其餘符號與通常相同. 將上式對 x 微分, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ds}{dt} \right) &= \frac{\partial^2 s}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial x} + v \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial x} + w \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

以連續方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{d}{dt} \ln \rho \quad (3)$$

中的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 數值代入 (2) 式, 此處 ρ 為連續體的密度, $\ln$ 代表自然對數, 則得

*1954 年 6 月 17 日收到.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{d}{dt} \ln \rho + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ds}{dt} \right).$$

如以 $\dot{s}$ 代表 ds/dt , 則上式可寫為

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial \dot{s}}{\partial x} / \frac{\partial s}{\partial x} &= \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} / \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial z} / \frac{\partial s}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

同樣我們得出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial y} \right) - \frac{\partial \dot{s}}{\partial y} / \frac{\partial s}{\partial y} &= \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial z} / \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} / \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial z} \right) - \frac{\partial \dot{s}}{\partial z} / \frac{\partial s}{\partial z} &= \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial x} / \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial y} / \frac{\partial s}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$

(4) 及 (5) 式右邊諸項有簡單的幾何意義如下。

如考慮由兩小矢量 $\delta_1 \mathbf{x} \equiv (\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z)$ 及 $\delta_2 \mathbf{x} \equiv (\delta_2 x, \delta_2 y, \delta_2 z)$ 所組成的小面積 $\delta \sigma$, 則由矢量分析知

$$\delta \sigma = [\delta_1 \mathbf{x}, \delta_2 \mathbf{x}]; \quad (6)$$

此處符號 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 代量兩矢量 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 的矢量乘積, 下面符號相同。因 $\frac{d}{dt}$ 與 δ 為獨立的, 在運算時可以互相交換, 所以 $\delta \sigma$ 在時間上隨質點運動的變化率為

$$\frac{d}{dt} \delta \sigma = [\delta_1 \mathbf{u}, \delta_2 \mathbf{x}] + [\delta_1 \mathbf{x}, \delta_2 \mathbf{u}]; \quad (7)$$

其中 $\mathbf{u}$ 為速度矢量, $\delta_1 \mathbf{u}$ 為矢量 $\delta_1 \mathbf{x}$ 兩端質點運動的速度差, 其分量為

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 u &= \frac{\partial u}{\partial x} \delta_1 x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta_1 y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta_1 z, \\ \delta_1 v &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta_1 x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta_1 y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta_1 z, \\ \delta_1 w &= \frac{\partial w}{\partial x} \delta_1 x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta_1 y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta_1 z. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

同樣 $\delta_2 \mathbf{u}$ 為矢量 $\delta_2 \mathbf{x}$ 兩端質點的速度差。今研究 (7) 的分析表示, 以

$$\delta \sigma = i \delta \sigma_x + j \delta \sigma_y + k \delta \sigma_z, \quad (9)$$

其中 i, j, k 為沿坐標系統定軸方向的單位矢量, $\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \delta \sigma_z$ 為面積 $\delta \sigma$ 在 $y-z$ 平面, $z-x$ 平面及 $x-y$ 平面上的分別投影; 則由 (7) 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \sigma_x &= \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) (\delta_1 y \delta_2 z - \delta_2 y \delta_1 z) + \\ &+ \frac{\partial v}{\partial x} (\delta_1 x \delta_2 z - \delta_2 x \delta_1 z) + \frac{\partial w}{\partial x} (\delta_2 x \delta_1 y - \delta_1 x \delta_2 y). \end{aligned}$$

將 (6) 的形式代入上式, 得

$$\frac{1}{\delta \sigma_x} \frac{d}{dt} \delta \sigma_x = \frac{d}{dt} \ln \delta \sigma_x = \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\delta \sigma_y}{\delta \sigma_x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\delta \sigma_z}{\delta \sigma_x}. \quad (10)$$

同樣得出 $\delta \sigma_y, \delta \sigma_z$ 隨質點運動的變化率:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \delta \sigma_y &= \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\delta \sigma_z}{\delta \sigma_y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta \sigma_x}{\delta \sigma_y}, \\ \frac{d}{dt} \ln \delta \sigma_z &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\delta \sigma_x}{\delta \sigma_z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\delta \sigma_y}{\delta \sigma_z}; \end{aligned} \quad (11)$$

上式說明在某平面上投影面積的變化並不單由該平面的輻散輻合決定。例如 $x-y$ 水平面上 $\delta \sigma_x$ 的變化率除由水平輻散

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

決定一部分外, 另外要看水平速度在垂直方向的切變率和該時 $\delta \sigma$ 的空間方向。

比較 (4) 式的右邊和 (10) 式, 設取該小面積在 $s(x, y, z, t) = \text{常數}$ 的面上, 則

$$\delta \sigma_x : \delta \sigma_y : \delta \sigma_z = \frac{\partial s}{\partial x} : \frac{\partial s}{\partial y} : \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (12)$$

所以方程 (4) 的右邊諸項代表此小面積在 $y-z$ 平面上投影面積的變化率, 因之 (4) 式可寫為

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial s}{\partial x} / \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{d}{dt} \ln \delta \sigma_x$$

或

$$\rho \delta \sigma_x \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho \delta \sigma_x} \frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (13)$$

因之若質點對量值 s 有守恆性質，亦即 s 的數值不隨質點的運動而改變時則 $\dot{s}=0$ 。此種性質 s 可舉海水中的鹽分，空氣中的水分，無摩擦絕熱運動下空氣的熵，或位溫數值，或在有凝結蒸發情況下空氣的假位溫，以及在穩常情態下的“能量”

$$\frac{v^2}{2} + gz + c_p T$$

為例，則

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho \delta \sigma_x} \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0, \quad (14)$$

亦即

$$\frac{1}{\rho \delta \sigma_x} \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho \delta \sigma_y} \frac{\partial s}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho \delta \sigma_z} \frac{\partial s}{\partial z} \quad (15)$$

諸數值亦具守恆性質，其數值不隨質點的運動改變。但 (15) 中三項並非獨立，由 (12) 可見三者均同值相等，因

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= l \frac{\partial s}{\partial n}, & \frac{\partial s}{\partial y} &= m \frac{\partial s}{\partial n}, & \frac{\partial s}{\partial z} &= n \frac{\partial s}{\partial n}, \\ \delta \sigma_x &= l \delta \sigma, & \delta \sigma_y &= m \delta \sigma, & \delta \sigma_z &= n \delta \sigma; \end{aligned} \quad (15)'$$

其中 l, m, n 為該 $s(x, y, z, t) = \text{常數}$ 面上的法線方向餘弦， $\delta \sigma$ 為該小面積的絕對值， $\frac{\partial s}{\partial n}$ 為 s 在空間的陡度，故

$$\frac{1}{\rho \delta \sigma_x} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\rho \delta \sigma_y} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{\rho \delta \sigma_z} \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{\rho \delta \sigma} \frac{\partial s}{\partial n} = K \quad (16)$$

皆為同一數值，且均具有守恆性質。

方程 (16) 可以用圖形簡單的解釋。圖 1 表示原來 $ABCD$ 的位置： AB 為 $\delta \sigma$ ，在等 s_1 面上， CD 亦為 $\delta \sigma$ ，但在等 s_2 的面上， δn 為兩等 s 面的垂直距離。 $ABCD$ 所包的體積為 $\delta \sigma \delta n$ ，所含質量為 $\rho \delta \sigma \delta n$ 。圖 2 表示另

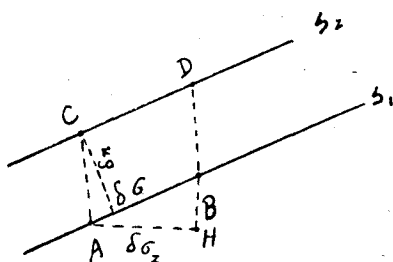


圖 1

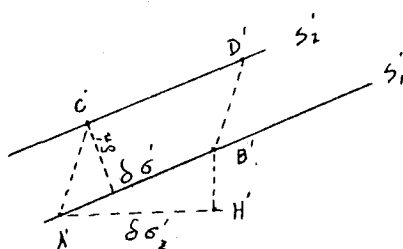


圖 2

一時間 $ABCD$ 的位置： $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$, $D \rightarrow D'$ ；因 s 守恆，故 $s_1 = s'_1$, $s_2 = s'_2$ 。此時 $A'B'$ 在等 s'_1 即等 s_1 面上所佔的位置為 $\delta\sigma'$ ， $C'D'$ 在等 s'_2 即等 s_2 面上所佔的面積為 $\delta\sigma'_2$ 。因是連續運動 $\delta\sigma'_2$ 與 $\delta\sigma'$ 相差為一高次級小數，故此時 $A'B'C'D'$ 所包的體積亦為 $\delta\sigma' \delta n'$ ，其所含質量為 $\rho' \delta\sigma' \delta n'$ 。由於質量守恆，

$$\rho \delta\sigma \delta n = \rho' \delta\sigma' \delta n';$$

又由於

$$\delta s = s_2 - s_1 = s'_2 - s'_1 = \delta s',$$

因之

$$\frac{\delta s}{\rho \delta\sigma \delta n} = \frac{\delta s'}{\rho' \delta\sigma' \delta n'} \text{ 或 } \frac{1}{\rho \delta\sigma \delta n} \left(\frac{\partial s}{\partial n} \right) \delta n = \frac{1}{\rho' \delta\sigma' \delta n'} \left(\frac{\partial s}{\partial n} \right)' \delta n'.$$

當 δn , $\delta\sigma$ 為無限小時，上式近等式成為全等式，故

$$\frac{1}{\rho \delta\sigma} \left(\frac{\partial s}{\partial n} \right) = \frac{1}{\rho' \delta\sigma'} \left(\frac{\partial s}{\partial n} \right)';$$

再由於 (15)' 的幾何關係，得

$$\frac{1}{\rho \delta\sigma_x} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho' \delta\sigma'_x} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)'$$

等關係。亦即 (16) 各式具有守恆性質。以上證明雖不嚴格，但易於了解，不過在應用時仍須公式 (10) 及 (11) 才能記算，有時並須考慮 s 的影響而已。

(16) 的使用頗為簡便，我們在下面應用該式於 s 為空氣的熵時，以證明氣象學上的幾個關係。

二. 乾空氣溫度直降率的變化公式

在大氣中溫度直降率的數值表示空氣的穩定性,它未來的數值將表示着未來空氣的穩定性,所以有一定的重要性。Petterssen^[1] 在“天氣分析及天氣預告”一書的第二章內曾詳加討論並在該書第八十六頁上得出

$$\frac{1}{p_0 A_0} (\gamma_0 - \gamma_d) = \frac{1}{p_1 A_1} (\gamma_1 - \gamma_d) \quad (17)$$

關係;其中 p_0 指原來的空氣壓力, A_0 指某空氣柱的水平橫切面積, γ_0 指原來的空氣溫度直降率, p_1 , A_1 , γ_1 則指經過若干時後該空氣的壓力,空氣柱的水平橫切面以及溫度直降率; γ_d 代表絕熱溫度直降率。由 (17) 見溫度直降率的變化只與壓力變化以及輻散輻合的影響有關, Haurwitz^[2] 等人所得結論也相同。我們現在應用 (16) 來推出較準確的溫度直降率的變化公式,並要指出公式 (17) 並不完全,因有另一種影響未曾計入。

因乾空氣極近似理想氣體,故

$$p = \rho RT; \quad (18)$$

其中 p 為壓力, ρ 為密度, T 為絕對溫度, R 為單位質量空氣的氣體常數。其熵

$$s = c_p \ln T - R \ln p \quad (19)$$

在不太長的時間內具有守恆性,此處 c_p 代表單位質量空氣的定壓比熱。因之 $\dot{s}=0$, 故由 (16) 推論

$$\frac{1}{\rho \delta \sigma_z} \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{\rho \delta \sigma_z} \left(\frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{p} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (20)$$

亦必具有守恆性。上面公式可化簡。因垂直運動的加速度遠較重力 g 為小(尤其在較大規模運動之下),故

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (21)$$

以

$$\frac{\partial T}{\partial z} \equiv -\gamma, \quad \frac{g}{c_p} \equiv r_d \quad (22)$$

代表空氣實際溫度的直降率及假想乾空氣上升時的絕熱溫度直降率。以 (21) 及 (22) 代入 (20) 內,得

$$\frac{1}{\rho \delta \sigma_z} (\gamma_d - \gamma) = \text{常數}; \quad (23)$$

具有守恆性質。乍看 (23) 似與公式 (17) 相同,但事實上此處 $\delta \sigma_z$ 並不是空氣柱的水平橫切面,而是等熵面上一個面積的“投影”面積,不是實際的東西;而 (17) 式裏面的 A 則是實際的面積,所以兩者有原則上的差別。 $\delta \sigma_z$ 的變化率由方程 (11) 決定,並不單由水平輻散或輻合決定;即使 $w = 0$ 時,無垂直運動時,兩者亦不相同。一個是實際空氣的水平面積而另一個必須是 $s(x, y, z, t) = \text{常數}$,即等熵面上一個面積的投影。此可由等熵面的傾斜度的改變而改變。由 (11) 見後面兩項與 w 並無關係,祇看當時等熵面的傾斜度以及水平風速的垂

$$\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\delta \sigma_x}{\delta \sigma_z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\delta \sigma_y}{\delta \sigma_z}$$

直切變。我們將要看出 (11) 內的一項是上下冷暖平流不同的影響,並不能忽去。現將溫度直降率在時間上的變化計算於下。因

$$\frac{\delta \sigma_x}{\delta \sigma_z} = \frac{\partial s}{\partial x} / \frac{\partial s}{\partial z}, \quad \frac{\delta \sigma_y}{\delta \sigma_z} = \frac{\partial s}{\partial y} / \frac{\partial s}{\partial z}; \quad (12)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial s}{\partial z} &= \frac{c_p}{T} (\gamma_d - \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

將上值代入 (11) 內,得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \delta \sigma_z &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \\ &- \frac{1}{\gamma_d - \gamma} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

將 (23) 對 t 取對數全微分,再用上式代入,得

$$\frac{1}{\gamma_a - \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \right) + \frac{1}{\gamma_a - \gamma} \left[\frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial \nu}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right]. \quad (26)$$

如仍用 (24) 代入, 則得

$$\frac{1}{\gamma_a - \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \right) + \frac{T}{c_p (\gamma_a - \gamma)} \left[\frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial y} \right]. \quad (27)$$

(26) 或 (27) 說明在等熵運動下大氣溫度直降率 γ 變化率的全部原因。

我們現在來研究 (27) 公式右邊的物理意義。該式內第一項 $-\frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$ 及第二項 $-\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \right)$ 的物理意義都已在普通書上講過茲不再述, 惟第三項

$$\frac{1}{\gamma_a - \gamma} \left[\frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial \nu}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] \quad (26)'$$

則不包括在普通公式 (17) 之內, 其物理意義現將予以說明。先研究含溫度陡度的項, 因

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (28)$$

而右邊括弧內

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \equiv \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (29)$$

一項則代表冷煖平流, 此處 $\mathbf{u}$ 係水平風速矢量, ∇T 為水平溫度陡度矢量, “ $\cdot$ ” 代表兩者的標量乘積, 亦即祇取垂直於等溫線的風速計值。設 $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ 的數值為正, 則係冷平流, 風由低溫區吹向高溫區, 如 $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ 數為負, 則係煖平流風由高溫區吹向低溫區。因之如 (28) 的右方為正值, 則表示上層冷平流較下層為強, 或表示下層煖平流較上層為強。此時由 (26) 式見, 未來的溫度直降率 γ 將要增大。這一個關係雖然沒有包括在普通公式 (17) 之內, 但是它的物理意義是極顯而易見的; 不過我們現在只將其數值寫出而已。因為既然上面冷平流強些, 則上面的空氣應當比下層空氣更冷些, 所以 γ 必定要增加; 或者, 當下面煖平流比上面強, 則下面的空氣應當更熱些, 因之 γ 也必定要增加起來。不獨如此, 我們也可以估計由於這種物理步驟所引起的 γ 變化於下:

因溫度平流變化部分為

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx -\mathbf{u} \cdot \nabla T, \quad (30)$$

將上式對 z 微分, 交換 $\frac{\partial}{\partial t}$ 與 $\frac{\partial}{\partial z}$, 以 $\gamma \equiv -\frac{\partial T}{\partial z}$ 代入, 則

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} \approx \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{u} \cdot \nabla T) = \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right); \quad (31)$$

也就相對於 (26) 式左方 $\frac{d\gamma}{dt}$ 內的第一項。至於由 (28) 近似時所忽去的

$$u \frac{\partial \gamma}{\partial x} + v \frac{\partial \gamma}{\partial z} \quad (32)$$

部分, 恰與 $\frac{d\gamma}{dt}$ 內第二第三兩項抵消。所以 (28) 式的左方確係表示上下冷暖平流之不同對於 γ 變化的影響。無論從理論上看或是從物理觀念來看, 這一項必須考慮, 所以公式 (23) 的確要比普通公式 (17) 全面些。由物理觀念來看, 這一項, 上下冷暖平流不同所引起 γ 的變化, 是不能任意忽去的, 尤其在水平溫度陡度大時更須注意。例如鋒面附近, 該時如上下鋒面移動的速度不同, 則上下冷暖空氣的位置將發生相對變化, 勢必引起溫度直降率的強大變化, 因之改變了空氣的穩定性。

在 (26) 式第三項中另含壓力水平陡度部分

$$-\frac{1}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \right), \quad (33)$$

是由於平流壓力變化, 由上下風速的不同所引起的膨脹壓縮的不同致產生上下溫度變化的不同所引起的。不過在膨脹壓縮時引起輻合輻散以致和前面 dp/dt , $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ 兩項互相系聯起來, 不容易單純的分析開。因為 (33) 數值一般較 (28) 要小得多, 我們也不詳細的分析它了。但是仍舊可以看出點物理意義來, 如

$$u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} > 0, \quad (34)$$

則空氣由低壓區吹向高壓區, 因之將要或多或少地被壓縮而增溫。此時如上面

風速小些，增溫也應當小些，所以 γ 應當增大些。我們由 (33) 可以看出：既然風速向上減小，(33) 式應為正號，回到 (26)，可以看出該式也是叫 γ 增大。因之正負號的符號是相合的。

我們從 (27) 式看出，因為熵而不是溫度具有守恆性，所以 (30) 表示的平流溫度變化不完全，在 (27) 式內以熵的陡度代替溫度陡度就說明了這一點。因之我們可以用 (27) 式總結溫度直降率隨質點變化率的規律於下：

在等熵運動中，空氣溫度直降率的增加只由於三種原因：(1) 空氣壓力的減低；(2) 水平輻合；(3) 冷暖平流的切變。如風從低熵區(可用低溫區近似)吹向高熵區(可用高溫區近似)，上空風大則 γ 變大，風小則 γ 變小；但如風係從高熵區吹向低熵區(暖平流)，則上空風大 γ 變小，風小 γ 變大。

(23) 式又可以寫成另外形式，因 $p\delta\sigma_z$ 等於等熵面上小面積 $\delta\sigma$ 上面所有空氣的重量 W ，故可寫成

$$\frac{1}{W} (\gamma_d - \gamma) = \text{常數}, \quad (23)'$$

$$\gamma_d - \gamma = C W \quad (23)''$$

形式，因之 γ 可從 $\delta\sigma$ 上所有空氣柱重量計算。如等熵面升高，則 W 減小， γ 增大；如等熵面上輻散則 $\delta\sigma$ 上的 W 增大， γ 減小；如等熵面傾斜，則 $\delta\sigma$ 上的 W 減小， γ 增大。所以等熵面作傾斜旋轉運動時同樣的影響 γ 變化率。

如用地轉風公式：

$$\begin{aligned} u &= -\frac{RT}{f} \frac{\partial \ln p}{\partial y} = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ v &= \frac{RT}{f} \frac{\partial \ln p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned} \quad (35)$$

此處 f 為科來參數，代入 (26) 式右方的第三項內，則

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{u}{T} \gamma - \frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{v}{T} \gamma + \frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (36)$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_d - \gamma} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] \\ = \frac{1}{T} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{T} \mathbf{u} \cdot \nabla T. \end{aligned} \quad (37)$$

因之

$$\frac{1}{\gamma_d - \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{T} \mathbf{u} \cdot \nabla T. \quad (38)$$

我們可估計末項數值的大小，如以

$$|\mathbf{u}| \approx 10^3, \quad \nabla T \approx 10^{-7}, \quad T \approx 300 \quad (39)$$

代入，則末項僅為 3×10^{-7} ，這樣（因平流關係）在十二小時後所引起的 γ 變化不過

$$\delta\gamma = \frac{(\gamma_d - \gamma)}{T} \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta t \approx 4 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^{-7} \times 4.3 \times 10^4 \approx 5 \times 10^{-7}; \quad (40)$$

以上把 γ 作 6×10^{-5} 計算。因之數值頗小，不足影響大氣的穩定度。而且在（39）的估計中，溫度陡度作每百公里相差一度，且風沿溫度陡度直吹計算，已覺估計過高，所以有人*認為（26）式第三項比第二項小可以忽去。不過事實上並非如此：我們在做天氣預告考慮到溫度直降率變化時，經常考慮到高空冷平流的來到以影響大氣的穩定性¹⁾；不獨如此，由於輻散輻合及 $\frac{dp}{dt}$ 兩項不易算出，通常還只考慮這一項呢！這個事實說明在研究 γ 變化時，平流的影響一般不能用熱成風關係，而只能從當時兩層天氣圖上的實際風值，估計。

這同輻散輻合不能利用地轉風計算相似。假使輻散輻合也用地轉風公式（35），則如不計科來參數的變化，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{T} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{T} \mathbf{u} \cdot \nabla T; \quad (41)$$

故（38）內後兩項恰巧對消，而變成

$$\frac{1}{\gamma_d - \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt}. \quad (42)$$

即 γ 的變化只須看壓力的變化就可決定，與輻散輻合也無關係了。我想這樣的結論顯然是不可靠。

*在本文送物理學報時，審查者提出。

1) 此點承青島氣象台王華文台長及孫月浦技正見告，順此致謝他們經常的幫助。

三. 對流頂係同質點造成的證明和條件

對流頂是否為同質點造成的，是氣象學上一個重要的問題。蘇聯基培爾就這樣的假設過，很多人也討論過^[4]，但是有很多人對這一點有疑問，認為這樣對流頂上下空氣不能交換，實為不可想像。不獨如此，由同樣的證明也可以得到逆溫層亦係同質點所造成的結論，但輻射逆溫的向上移動在物理觀念上看來似乎不是同質點所造成的。本節利用公式 (26) 來研究這一個問題，並指出它的限制性。

對流頂的特性是 γ 到此處有不連續的變化。設以

$$z = h(x, y, t) \quad (43)$$

代表對流頂的形狀，並以

$$z - h(x, y, t) = c_1, c_2, c_3 \cdots \text{等值。} \quad (44)$$

$c_1, c_2, c_3, \cdots$ 係常數，代表鄰近對流頂 $c=0$ 的一系列曲面。圖 3 表示這樣的兩個曲面。 $h(x, y, t)$ 是一定的 x, y, t 的函數， c_1 亦即面 $z - h(x, y, t) = c_1$ 離開曲面 $z - h(x, y, t) = 0$ 為一固定高度 c_1 的曲面， c_2 即面 $z - h(x, y, t) = c_2$

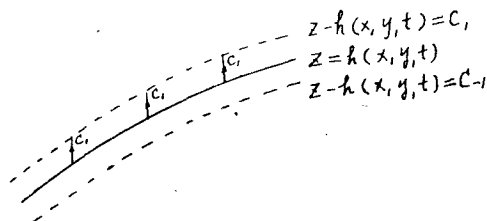


圖 3

離開曲面 $z - h(x, y, t) = 0$ 為一固定高度 c_2 的曲面，等等。因 γ 祇在對流頂上下有不連續的變化，在其他各處變化要小得多，所以我們在研究對流頂曲面的左近時可將 γ 寫成下列形式：

$$\gamma = \gamma(c). \quad (45)$$

不同的 c 值，其 γ 不同，但同一個 c 值上的 γ 皆同。在以上的形式中，可能有人有這樣的疑問：假如 $c=0$ 時， γ 的值如何決定？因為不連續的函數可以先當做連續的看待，然後再推到極限去，（實際的物理現象也是如此）。所以我們在處

理 (45) 式時可以先把它當連續函數看待, 不過 $\frac{d\gamma}{dc}$ 在 $c=0$ 時有極大值而已. 這樣做也可以應用到 $\frac{d\gamma}{dc}$ 不是無限大而是有一個定值時的情況, 作更實際的分析. 也就是說我們把對流頂看做不是一個幾何的面

$$z - h(x, y, t) = 0 \quad (43)'$$

而是由一組曲面

$$z - h(x, y, t) = t_1, t_2, t_3 \cdots, 0, t_{-1}, t_{-2}, t_{-3} \cdots, \quad (46)$$

所組成, $t_1, t_2, t_3, t_{-1}, t_{-2}, t_{-3}$ 等值可均為小數. 在每一個 t 上有一個固定的 γ : $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \cdots \gamma_{-1}, \gamma_{-2}, \gamma_{-3} \cdots$, 其值相差亦微. 不獨如此, 我們也可以廣泛以 (44) 為任何形式的函數

$$F(x, y, z, t, c) = 0; \quad (46)$$

其中 c 為一參數, 不限定代表高度差; 而以 γ 為此參數的函數, 等 c 面即選等 γ 面而已. 這樣 (45) 變成一個定義, 可以不管 γ 如何依 x, y, z, t 變化皆可包括在 (45) 及 (46) 式之內. 不過我們為避免誤會且易於討論計, 仍以 F 為 $z - h(x, y, t) - c = 0$ 的形式. 這樣做雖然稍有限制, 但容易了解, 且研究的結果並不受影響.

由 (45) 可見

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dc} \frac{dc}{dt}, \quad (47)$$

dc/dt 的物理意義代表質點由一個面走到另一個面的速度. 故如質點在同一個面上走, 則 $dc/dt=0$. 用 (44) 的形式, 則 dc/dt 即為質點與對流頂面的相對垂直速度, 在廣泛的形式 (46) 中, 則 $\frac{dc}{dt}$ 為質點離開一“定曲面”在法線方向的相對分速.

以 (47) 代入公式 (27), 得 γ 變化的另一種形式:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\gamma_a - \gamma} \right) \frac{d\gamma}{dc} \frac{dc}{dt} = & -\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & + \frac{T}{(\gamma_a - \gamma)c_p} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

在對流頂附近熵是連續的, u, v 也是連續的, 壓力的變化也是連續的, 也就

是說均爲有限數值。

但 $\frac{d\gamma}{dc}$ 則爲不連續的。因之設

$$\frac{d\gamma}{dc} \rightarrow \infty, \quad (49)$$

則 (48) 表示 dc/dt 必趨近於零, 或

$$\frac{dc}{dt} \rightarrow 0; \quad (50)$$

也就是說如質點原來的 c 爲零, 則永遠爲零, 不離開 $c=0$ 的面。換言之, 對流頂乃係同質點所造成。此處證實了基培爾的假定, 不過是有限制的! 第一我們假設了等熵運動條件

$$\dot{s} = 0 \quad (51)$$

及條件 (49)

$$\frac{d\gamma}{dc} \rightarrow \infty, \quad (52)$$

而這兩個條件均不可靠。由於 $\dot{s}$ 到底的數值, 目前無法計算, 我們仍暫不討論。(在輻射逆溫中, $\dot{s}$ 顯然是非零, 而且 $\frac{\partial \dot{s}}{\partial z}$ 也顯然的很大, 則由公式 (5) 可以看出我們必須另作研究。) 我們現在研究在假設 (51) 成立而假設 (52) 不成立時質點如何離開對流頂的情形, 並討論因此而產生的錯誤。

今假定對流頂的寬度爲 100 米, γ 由 6×10^{-5} 減到 $\gamma=0$, 故 (48) 式左方的, 取 $\gamma_a = 10^{-4}$, 數值

$$\frac{1}{\gamma_a - \gamma} \frac{d\gamma}{dc} = -\frac{1}{4 \times 10^{-5}} \cdot \frac{6 \times 10^{-5}}{10^4} = -1.5 \times 10^{-4} \quad (53)$$

這裏均用 $c. g. s.$ 單位及絕對溫度。因之質點離開對流頂的速度爲

$$\frac{dc}{dt} = 6.7 \times 10^3 \left\{ \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{T}{c_p(\gamma_a - \gamma)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial y} \right) \right\} \quad (54)$$

或

$$\Delta c \approx 6.7 \times 10^3 \left\{ \int^{\Delta t} \frac{dp}{p} + \int^{\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dt - \dots \right\}. \quad (55)$$

如對流頂的寬度為 500 米，則上面右方各式均乘以 5。以此類推。

我們先看 (55) 的第一項，如對流頂由 300mb 升高到 250mb，則

$$\int^{\Delta t} \frac{dp}{p} \approx \ln \frac{250}{300} \approx -0.19;$$

故此質點離開對流頂，落在下面共 1.3×10^3 或 13 米左右。以之與對流頂上升幾近 1 公里比較，僅落後 13 米，可以說對流頂係同質點所造成。即使對流頂有 500 米的寬度，也不過落後六十餘米，與 1 公里比較起來並不算大。如 p 變得多些也不要緊，因 $\ln \frac{p_1}{p_2}$ 約與上升距離成正比， Δc 雖然大些，但上升的距離也大些，比例仍舊差不多；所以我們可以說：對流頂在僅作上升下沉運動時，可當做同質點看待。

另外再看 (55) 式右邊第二項的影響，假設對流頂水平輻散平均為 10^{-6} c.g.s.，則 24 小時內

$$\int^{\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dt \approx 8.6 \times 10^{-2}.$$

故原在對流頂的質點離開對流頂祇 6 米左右(寬度 100 米)；如寬度為 500 米，則原在對流頂的質點離開對流頂約 30 米左右；以之與對流頂寬度比較，並不算大，因之也可以說對流頂係同質點所造成。

但如輻散輻合極強時，(此時對流頂必有強烈的氣旋或反氣旋產生!) 水平輻散或輻合的數值

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \approx 10^{-5} \quad (56)$$

可能達到 10^{-5} 之上。例如 Palmén^[5] 觀察到 $1.4 \times 10^{-5} \rightarrow 2.1 \times 10^{-5}$ 數值，則在 24 小時內，

$$\int^{\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dt \approx 0.86 \rightarrow 1.7; \quad (57)$$

故此時質點可離開對流頂(在 100 米寬度情形下) 60—120 米。以之與對流頂寬度 100 米比較，則絕不是同質點了！在 500 米對流頂的寬度下，離開亦達五倍，不過比例仍舊一樣。因之我們可以說：當對流頂的輻散或輻合近於 10^{-5} c. g. s. 繼續作用十餘小時，對流頂不能當做同質點造成的看待。(輻合的積分約略相當

於渦度的相對增強)

我們也同樣的可以看出 (54) 的冷暖平流差異的影響, 不過沒有實際資料, 此地不再討論了。同樣本文也不討論吸熱及導熱對 s 產生切變的影響, 這一些問題留待以後有機會時再討論。

四. 結 論

本文在第一節內嚴格的導出當 $s(x, y, z, t)$ 有守恆的性質時, 則其導分 (16) 亦具守恆性質並予以幾何說明。設 $s(x, y, z, t)$ 不具守恆性質, 關係 (4), (5) 仍舊成立。

在第二節中應用第一節的公式於等熵性質求出大氣溫度直降率的變化, 在等熵運動條件下該變化只由於三種原因, 並述其物理意義。

在第三節中仍應用等熵性質及 γ 不連續的性質以證明對流頂係同質點所造成。更申論在 γ 並非不連續的情形下對上述論斷的改變, 得出當對流頂高空有強烈的氣旋反氣旋產生時, 對流頂同質點的性質即為破壞。另外指出在任何情形下, 可由公式 (54) 加上公式 (5) 內 $\partial s / \partial z$ 一項以判斷對流頂, 或任何 γ 轉折點, 同質點的性質是否被破壞或是否合於某一個研究的目的。

參 考 文 獻

- [1] Petterssen: Weather Analysis and Forecasting, (1940).
- [2] Haurwitz: Dynamic Meteorology p. 24 (1941).
- [3] Lamb: Hydrodynamics p. 7 (1932 劍橋版)
- [4] Ertel: Meteor. Zeit. (1936)
Lowell: Tellus (1951).
東星北: 山東大學學報第三期 (1953)
- [5] 例如 Palmén: Tellus vol. 1, No. 1, p. 27 (1949).

ON A THEOREM IN HYDRODYNAMICS WITH SOME METEOROLOGICAL APPLICATIONS

(DEDUCTION OF THE RATE OF CHANGE OF LAPSE RATE AND
CONDITIONS FOR THE SUBSTANTIALITY OF TROPOPAUSE)

SOH HSIN-PEI (HSIN P. SOH)

(Department of Physics, Shantung University, Tsingtao)

ABSTRACT

It is proved in this paper that for a conservative function in a continuous medium, the quantities

$$\frac{1}{\rho \delta \sigma_x} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\rho \delta \sigma_y} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{\rho \delta \sigma_z} \frac{\partial s}{\partial z}$$

are also conserved, where ρ is the density of the medium and where $\delta \sigma_x$, $\delta \sigma_y$, $\delta \sigma_z$ are the projections of a small area on the surface $s(x, y, z, t) = \text{Constant}$ on the x, y, z , planes. If s were not conserved then the followings equations

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial s}{\partial z} \right) = \frac{\partial s}{\partial z} \left/ \frac{\partial s}{\partial z} \right. + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial y} \right) \left/ \frac{\partial s}{\partial z} \right.$$

etc., hold. Applications are then made in Meteorology where entropy may be considered as approximately conserved for a certain length of time. It is then shown that the changes of the lapse rate of the atmosphere depend solely on three factors: change of pressure, horizontal convergence and level difference of horizontal advection of warm or cold air. We next proved that under adiabatic and such discontinuity condition

$$\frac{d\gamma}{dc} \rightarrow \infty,$$

where c denotes the vertical distance from the tropopause, γ denotes the lapse rate, tropopauses are material surfaces. Next if the above conditions do not strictly hold, then tropopauses sometimes behave as material surfaces and sometimes do not behave as material surfaces. Specially, when strong cyclonic or anticyclonic vortex is produced on the tropopause, the substantiality of it will be destroyed to a certain extent depending upon the magnitude of the total convergency.

