

角 變 位 移 方 程 的 研 究^{*}

潘 家 鋒

(中央燃料工業部水力發電總局設計局)

提 要

本文旨在：(1) 提出完全的角變位移方程，使可精確的解算任何形式的平面剛構，祇要其能視為由若干桿件組成即可。這裏的所謂“完全”，係指方程中已包括一切可能的形變值在內，而且包括軸向應力及剪應力之影響。(2) 全面的討論桿件常數的定義、數量和相互關係，並供給計算各常數的最一般性公式。(3) 將上述全面的和精確的公式逐步簡化，以便與目前常用的公式比較。(4) 討論某些特殊情況。

一. 緒 論

角變位移方程是表示平面剛構中每桿件兩端反力和兩端形變間的關係式，為應用形變法分析剛構的基本根據；其餘許多剛構的分析法亦多自此出發推引，因此，它在剛構理論上具有很重要的意義。但目前所用的角變位移方程是不完全的，因為在這些方程中，形變的種類只限於轉動 θ 及側移 Δ 兩種，而實際上，每桿端的獨立形變常有三個；同時，目前所用的角變位移方程是不精確的，因為它忽略了軸向力和剪應力對形變的影響。由於存在着這些缺點，在某些結構中，便不能採用角變位移方程，因而作這些結構的應力分析時必須採用較為複雜的“方法”(即最少功法)。

此外，在目前各種結構學教本和文獻中，常可以看到所謂“桿件常數”或類似的名詞；平面剛構桿件的獨立常數，一般認為是 5 個。在本文中將指出完全的桿件常數共有 42 個，其中僅有且必有 9 個具有獨立性。完全的角變位移方程即以這些桿件常數表之。

在幾種特殊情況下，完全的方程中某些項目顯得不重要，而可予以忽略，這時方程便簡化為幾種目下熟見的形式。又角變位移方程之原理及觀念，尚得推

^{*}1954 年 12 月 22 日收到。

廣,而寫出幾種廣義或變化後之形式。這些都將在本文中討論。

目前國內外已有不少有關剛構理論的論文,或對角變位移方程之改良和討論的論文,但對角變位移方程的完全面貌,各種特殊形式及各種推廣形式,似尚欠綜合性的討論。本文即在補充這個空陷。

二. 完全的角變位移方程

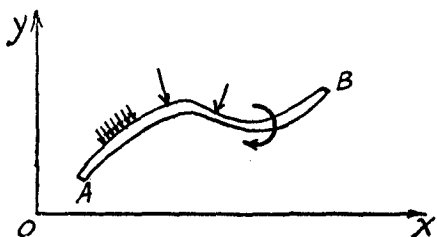


圖 1.

圖 1 中 AB 表示任一剛構中任一桿件。其截面及軸心線的形狀可以有任何的變化。 ox 及 oy 為所選用的一組坐標軸。當此桿件承受外荷載作用時,兩端點 A 及 B 均將發生變位,令

θ_A = 在荷載作用下,結點 A 的轉動角,以順時針向為正,

θ_B = 在荷載作用下,結點 B 的轉動角,以順時針向為正,

u_A = 在荷載作用下,結點 A 沿 x 軸之移動,以順 x 軸正向者為正,

u_B = 在荷載作用下,結點 B 沿 x 軸之移動,以順 x 軸正向者為正,

v_A = 在荷載作用下,結點 A 沿 y 軸之移動,以順 y 軸正向者為正,

v_B = 在荷載作用下,結點 B 沿 y 軸之移動,以順 y 軸正向者為正。

以上是每一桿件兩端的全部形變值,共計 6 個。

又令 $m_A^{\theta_A}$ 表示當結點 A 發生一單位轉動角 $\theta_A=1$,除此外完全沒有別的形變($\theta_B=u_A=u_B=v_A=v_B=0$)時,所需作用在 A 端的力矩。做此,

$x_A^{\theta_A}$ = 同上,所需作用在 A 端的 x 向分力,

$y_A^{\theta_A}$ = 同上,所需作用在 A 端的 y 向分力,

$m_B^{\theta_A}$ = 同上,所需作用在 B 端的力矩,

$x_B^{\theta_A}$ = 同上,所需作用在 B 端的 x 向分力,

$y_B^{\theta_A}$ = 同上,所需作用在 B 端的 y 向分力。

以下各項符號意義均可類似推得:

$$\begin{array}{cccccc}
 m_A^{\theta A} & x_A^{\theta A} & y_A^{\theta A} & m_B^{\theta A} & x_B^{\theta A} & y_B^{\theta A} \\
 m_A^{\theta B} & x_A^{\theta B} & y_A^{\theta B} & m_B^{\theta B} & x_B^{\theta B} & y_B^{\theta B} \\
 m_A^{u A} & x_A^{u A} & y_A^{u A} & m_B^{u A} & x_B^{u A} & y_B^{u A} \\
 m_A^{u B} & x_A^{u B} & y_A^{u B} & m_B^{u B} & x_B^{u B} & y_B^{u B} \\
 m_A^{v A} & x_A^{v A} & y_A^{v A} & m_B^{v A} & x_B^{v A} & y_B^{v A} \\
 m_A^{v B} & x_A^{v B} & y_A^{v B} & m_B^{v B} & x_B^{v B} & y_B^{v B}
 \end{array}$$

例如 $x_B^{v A}$ 表示當 A 端發生一單位 y 方向的移動 ($v_A=1$) 而無其餘形變時,所需加在 B 端的 x 向分力。

這些係數 (共計 36 個) 可以視為是一種感應係數,它是桿件本身的常數,代表某一桿件的結構性質,與外荷載無關¹⁾,按照一般的習慣,這些係數可稱為桿件的形常數。

任一桿件除有上述 36 個形常數外,在每一種特殊荷載下尚有 6 個載常數如下:

M_{FAB} = 桿件兩端完全沒有形變 (固定) 時,在外荷載下的 A 端力矩,

M_{FBA} = 同上,在外荷載下的 B 端力矩,

X_{FAB} = 同上,在外荷載下的 A 端 x 向分力,

X_{FBA} = 同上,在外荷載下的 B 端 x 向分力,

Y_{FAB} = 同上,在外荷載下的 A 端 y 向分力,

Y_{FBA} = 同上,在外荷載下的 B 端 y 向分力。

因此桿件常數的總數為形常數 36 個,載常數 6 個。但下文將指出,祇有 6 個形常數及 3 個載常數是具有獨立性的,因此獨立的桿件常數常為 9 個。

假定疊加原理適用 (其例外情形,見第八節),則顯然的:

1) 這種說法是有一定條件的,見以下第八節中的討論。

$$\left. \begin{aligned}
 M_{AB} &= M_{FAB} + m_A^{\theta A} \theta_A + m_A^{\theta B} \theta_B + m_A^{uA} u_A + m_A^{uB} u_B + m_A^{vA} v_A + m_A^{vB} v_B, \\
 M_{BA} &= M_{FBA} + m_B^{\theta A} \theta_A + m_B^{\theta B} \theta_B + m_B^{uA} u_A + m_B^{uB} u_B + m_B^{vA} v_A + m_B^{vB} v_B, \\
 X_{AB} &= X_{FAB} + x_A^{\theta A} \theta_A + x_A^{\theta B} \theta_B + x_A^{uA} u_A + x_A^{uB} u_B + x_A^{vA} v_A + x_A^{vB} v_B, \\
 X_{BA} &= X_{FBA} + x_B^{\theta A} \theta_A + x_B^{\theta B} \theta_B + x_B^{uA} u_A + x_B^{uB} u_B + x_B^{vA} v_A + x_B^{vB} v_B, \\
 Y_{AB} &= Y_{FAB} + y_A^{\theta A} \theta_A + y_A^{\theta B} \theta_B + y_A^{uA} u_A + y_A^{uB} u_B + y_A^{vA} v_A + y_A^{vB} v_B, \\
 Y_{BA} &= Y_{FBA} + y_B^{\theta A} \theta_A + y_B^{\theta B} \theta_B + y_B^{uA} u_A + y_B^{uB} u_B + y_B^{vA} v_A + y_B^{vB} v_B,
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

上式中的 M_{AB} , X_{AB} ...等,各指在桿端 A, B 的 M, X, Y 等. 每一桿件均有上面這樣一組方程,表示兩端 6 個應力 (M_{AB} , X_{AB} , Y_{AB} , M_{BA} , X_{BA} 及 Y_{BA}) 和 6 個

形變 (θ_A , θ_B , u_A , u_B , v_A 及 v_B) 間的關係,這便是完全的角變位移方程。

應用完全的角變位移方程分析平面剛構的步驟是很簡明的,茲列述如下:

(1) 將剛構分拆為相互剛接的幾根桿件. 所謂剛接是指各相交桿件在結點處有相同的形變值。

將剛構分拆為桿件的方法,可以有很多的變化. 例如圖 2 所示,但並不影響分析的成果,惟選擇得宜,可使計算工作有所簡化。

到這裏為止,本文所謂桿件都是指一根連續的桿,祇有兩個端點和其餘桿件聯接. 如果再

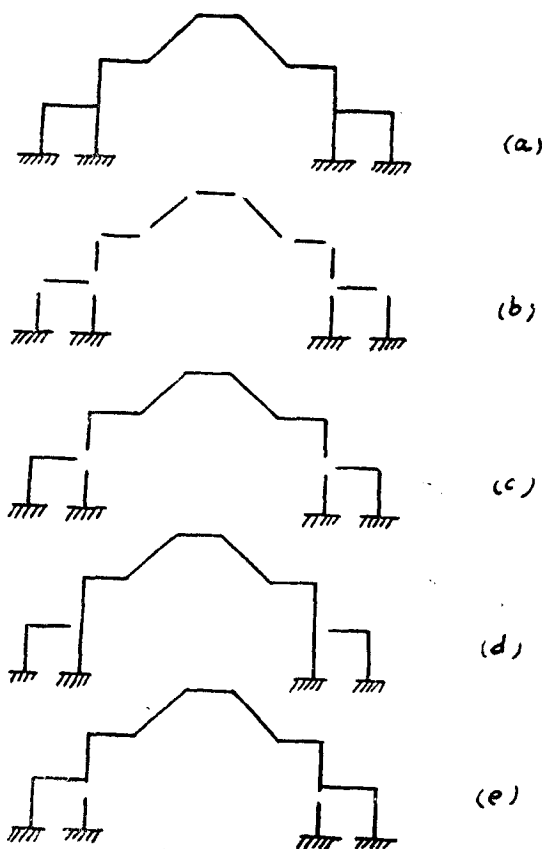


圖 2.

將桿件的定義予以推廣,規定所謂桿件是“剛構中的一部分材料,與其他部分在

端點或中間互相剛接”，則圖 2 中的剛構更可分拆為 d, e 等情況。這種做法，在分析某種結構時，會得到便利（見第十節）。

(2) 將每根桿件之 6 個端應力各以其 6 個端形變表示之——即寫下每一根桿件的角變位移方程組。因每一桿件有 6 個端形變，故全剛構共有 $6n$ 個未知值待定， n 為桿件數量。

(3) 每一桿件有三個平衡條件，即

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M = 0. \quad (2)$$

故未知元值減為 $3n$ 個。特別當桿件上並無外力時：

$$\left. \begin{aligned} X_A + X_B &= 0, \\ Y_A + Y_B &= 0, \\ M_A + M_B + Y_A \cdot b - X_A \cdot a &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 a 及 b 為桿件在 y, x 軸上的投影長（圖 3）。

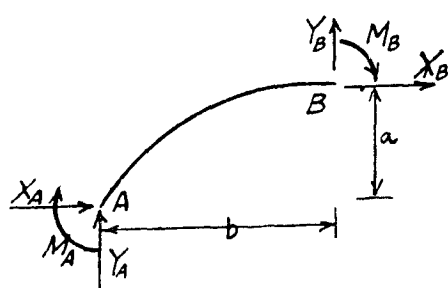


圖 3.

(4) 每一結點上有三個平衡方程，即（對結點而言）

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M = 0. \quad (4)$$

不難證明，剛構的結點（包括基礎）常為 $n + 1$ 個，且當其中 n 個結點之平衡條件滿足後，其餘一個亦必滿足，換言之，祇有 $3n$ 個獨立的平衡條件，適可用以解出 $3n$ 個未知元。

(5) 求出全部的未知元（ θ, u 及 v ）後，代回原角變位移方程組中，即可求出各桿端應力。

三. 獨立之桿件常數

從上節我們知道每個桿件共有 36 個形常數及 6 個載常數。但這些常數並非完全獨立。茲分述如下。

(甲) 載常數 桿件兩端固定（無形變）時，在外荷載下的桿端應力，稱為在這情況下的桿件載常數，共計 6 個，即

$$M_{FAB}, \quad M_{FBA}, \quad X_{FAB}, \quad X_{FBA}, \quad Y_{FAB}, \quad Y_{FBA}.$$

但是由於桿件本身的平衡條件,得

$$\left. \begin{aligned} X_{FAB} + X_{FBA} + X_0 &= 0, \\ Y_{FAB} + Y_{FBA} + Y_0 &= 0, \\ M_{FAB} + M_{FBA} + X_{FAB} a - Y_{FAB} b + M_0 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 X_0 , Y_0 及 M_0 各表外荷載沿 x , y 方向之分力及關於 B 端之力矩。因此獨立之載常數常為三個。以下我們將選擇兩個端力矩 M_{FAB} 及 M_{FBA} 及另一個分力 (X 或 Y) 作為獨立值。當然亦可採用其他方式的組合,但至少應有一個力矩在內。

(乙) 形常數 當桿件一端 (如 B) 固定,而另一端 (如 A) 有一單位形變時,將引起 6 個端應力,亦即 6 個桿件常數: m_A , m_B , x_A , x_B , y_A 及 y_B 。但根據平衡條件,

$$\left. \begin{aligned} x_A + x_B &= 0, \\ y_A + y_B &= 0, \\ m_A + m_B + y_A \cdot b - x_A \cdot a &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因此獨立的形常數將減少一半,亦即減為 18 個。

θA m_A	uA m_A	vA m_A	θB m_A	uB m_A	vB m_A
x_A θA	x_A uA	x_A vA	x_A θB	x_A uB	x_A vB
y_A θA	y_A uA	y_A vA	y_A θB	y_A uB	y_A vB
m_B θA	m_B uA	m_B vA	m_B θB	m_B uB	m_B vB
x_B θA	x_B uA	x_B vA	x_B θB	x_B uB	x_B vB
y_B θA	y_B uA	y_B vA	y_B θB	y_B uB	y_B vB

圖 4.

事實上,所餘 18 個形常數之間,尚有 12 個是不獨立的。這一點可根據馬克斯威爾的變位互等定律證明。首先我們將 36 個形常數排成一張系統的表

(圖4)。我們將發現,在主對角線上的形常數,其形變和應力的性質是一致的(m 對 θ , x 對 u , y 對 v),而且都在同一端發生,如 $m_A^{\theta A}$, x_A^{uA} 等,這種常數共有 6 個,可以稱為主常數。其餘位在主對角線兩側的 30 個常數,或者形變與應力的性質不符,或者兩者不在同一點,這種常數可以稱為副常數。副常數之間,存在着馬克斯威爾的變位互等關係,如

$$\begin{aligned} m_A^{uA} &= x_A^{\theta A}, & m_A^{\theta B} &= m_B^{\theta A}, \\ m_A^{vA} &= y_A^{\theta A}, & x_A^{uB} &= x_B^{uA}, \\ &\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

這種相等的關係,共有 15 對。凡位在主對角線兩邊相對稱的位置上的兩個常數都有一個相等的關係,因此 30 個副常數減為 15 個。注意以上的相等關係可分為兩組。左邊一組,應力的地點相同,而性質不同,右邊一組,應力的性質相同而地點不同。

在圖 4 的表上,每一豎行可以應用平衡條件取消三個常數(至少要留下一個 m),再應用馬氏定律,剔除其相應的副常數,不難發現,至少要留下 6 個適當的常數,即可利用平衡條件及馬氏定律求出其餘全部形常數。因此,獨立的形常數祇有 6 個。

這 6 個基本常數的分配,可取各種不同的組合,作者建議採用下述方式:

- (1) $m_A^{\theta A}$ ——這就是結構學中的 A 端抗撓勁度;
- (2) $m_B^{\theta B}$ ——同上,為 B 端抗撓勁度;
- (3) $m_A^{\theta B} = m_B^{\theta A}$ ——結構學中的傳遞係數(事實上是力矩傳遞係數)和它有關,令 C_{AB} 及 C_{BA} 為傳遞係數:

$$C_{AB} = \frac{m_B^{\theta A}}{m_A^{\theta A}},$$

$$C_{BA} = \frac{m_A^{\theta B}}{m_B^{\theta B}};$$

- (4) $X_A^{\theta A}$ ——表示 A 端發生單位轉動時在同端引起的 x 向分力。可稱為 A 端的 $\theta-X$ “相干因數”;

(5) $X_B^{\theta B}$ —— 同上, 為 B 端的 $\theta-X$ 相干因數;

(6) X_A^{uA} —— 一個熟知的桿件常數: A 端沿 x 方向的抗推勁度。

四. 計算桿件常數的一般性公式

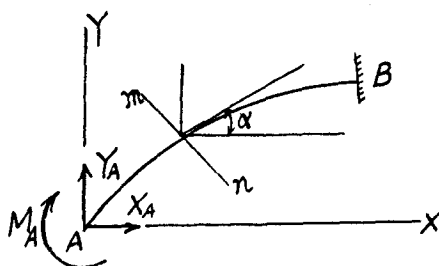


圖 5.

(甲) 形常數 在圖 5 中示一桿件

AB , B 端固定, 取 A 為坐標原點, 在 A 端作用三個分力 X_A , Y_A 及 M_A , 則在任一斷面 mn 上, 有三個應力:

$$\left. \begin{aligned} \text{軸向力 } N &= X_A \cos \alpha + Y_A \sin \alpha, \\ \text{剪 力 } V &= X_A \sin \alpha - Y_A \cos \alpha, \\ \text{力 矩 } M &= M_A + Y_A \cdot x - X_A \cdot y; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在桿件內全部應變能乃為

$$E = \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \int \frac{V^2 ds}{2AG} + \int \frac{M^2 ds}{2EI} = \int \frac{(X_A \cos \alpha + Y_A \sin \alpha)^2 ds}{2EA} + \int \frac{(X_A \sin \alpha - Y_A \cos \alpha)^2 ds}{2GA} + \int \frac{(M_A + Y_A x - X_A y)^2 ds}{2EI}. \quad (8)$$

將上式對 M_A , X_A 及 Y_A 微分, 經整理後可得

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \frac{\partial E}{\partial M_A} = M_A \int \frac{ds}{EI} - X_A \int \frac{y ds}{EI} + Y_A \int \frac{x ds}{EI}, \\ u_A &= \frac{\partial E}{\partial X_A} = -M_A \int \frac{y ds}{EI} + X_A \int \left(\frac{\cos^2 \alpha}{EA} + \frac{\sin^2 \alpha}{GA} + \frac{y^2}{EI} \right) ds + \\ &\quad + Y_A \int \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{EA} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{GA} - \frac{xy}{EI} \right) ds, \\ v_A &= \frac{\partial E}{\partial Y_A} = M_A \int \frac{x ds}{EI} + X_A \int \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{EA} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{GA} - \frac{xy}{EI} \right) ds + \\ &\quad + Y_A \int \left(\frac{\sin^2 \alpha}{EA} + \frac{\cos^2 \alpha}{GA} + \frac{x^2}{EI} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

在上列方程組中, 若令

1) 由於剪應力分佈不均, 本項中可另包括一係數 k , 在文中將此值略去。

$$\frac{\partial E}{\partial M_A} = 1, \quad \frac{\partial E}{\partial X_A} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial Y_A} = 0, \quad (10)$$

可以解出 M_A , X_A 及 Y_A 三值。按定義

$$M_A = m_A^{\theta A}, \quad X_A = x_A^{\theta A}, \quad Y_A = y_A^{\theta A}; \quad (11)$$

$m_B^{\theta A}$, $x_B^{\theta A}$ 及 $y_B^{\theta A}$ 可由平衡條件求之。同理若令

$$\frac{\partial E}{\partial M_A} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial X_A} = 1, \quad \frac{\partial E}{\partial Y_A} = 0, \quad (12)$$

則求出之

$$M_A = m_A^{uA}, \quad X_A = x_A^{uA}, \quad Y_A = y_A^{uA}; \quad (13)$$

m_B^{uA} , x_B^{uA} , y_B^{uA} 可由平衡條件求之。再令

$$\frac{\partial E}{\partial M_A} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial X_A} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial Y_A} = 1, \quad (14)$$

則求出之

$$M_A = m_A^{vA}, \quad X_A = x_A^{vA}, \quad Y_A = y_A^{vA}; \quad (15)$$

m_B^{vA} , x_B^{vA} 及 y_B^{vA} 可由平衡條件得之。這樣完全求出了 A 端形變的 18 個形常數。 B 端形變之 18 個形常數，完全可用以上公式求之，唯將坐標原點取在 B 點，各積分式均由 B 至 A 進行即可。因此式 (9) 至 (15) 是計算桿件形常數的最一般性公式。

(乙) 載常數 在圖 6 中，示一桿件，兩端固定，承受任何荷載。將 A 端支座移去，易以三個超靜力 M_{FAB} , X_{FAB} 及 Y_{FAB} ，則在任一斷面 mn 處的三個應力是

$$\left. \begin{aligned} N &= X_{FAB} \cos \alpha + Y_{FAB} \sin \alpha + X_l \cdot \cos \alpha + Y_l \sin \alpha, \\ V &= X_{FAB} \sin \alpha - Y_{FAB} \cos \alpha + X_l \cdot \sin \alpha - Y_l \cos \alpha, \\ M &= M_{FAB} + M_l + Y_{FAB} \cdot x - X_{FAB} y; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中 X_l , Y_l 為 A 點至該截面內一切外荷載的 x 和 y 向分力。 M_l 為這外荷載

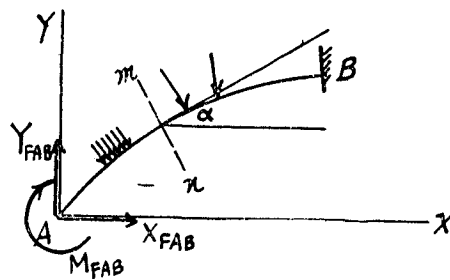


圖 6.

對該截面之力矩。將此三式代入式 (8)，然後再對 M_{FAB} , X_{FAB} , Y_{FAB} 微分，而令此三微分值為零，可得：

$$\left. \begin{aligned}
 & M_F \int \frac{ds}{EI} + Y_F \int \frac{x ds}{EI} - X_F \int \frac{y ds}{EI} = - \int M_l \frac{ds}{EI}, \\
 & - M_F \int \frac{y ds}{EI} + X_F \int \left(\frac{\cos^2 \alpha}{EA} + \frac{\sin^2 \alpha}{AG} + \frac{y^2}{EI} \right) ds + \\
 & \quad + Y_F \int \left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{EA} - \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{AG} - \frac{xy}{EI} \right) ds = \\
 & = \int \frac{M_l y ds}{EI} - \int X_l \left(\frac{\cos^2 \alpha}{EA} + \frac{\sin^2 \alpha}{EA} \right) ds - \\
 & \quad - \int Y_l \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{EA} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{AG} \right) ds, \\
 & + M_F \int \frac{x ds}{EI} + X_F \int \left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{EA} - \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{AG} - \frac{xy}{EI} \right) ds + \\
 & \quad + Y_F \int \left(\frac{\sin^2 \alpha}{EA} + \frac{\cos^2 \alpha}{AG} + \frac{x^2}{EI} \right) ds = \\
 & = - \int \frac{M_l x ds}{EI} - \int X_l \left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{EA} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{AG} \right) ds - \\
 & \quad - \int Y_l \left(\frac{\sin^2 \alpha}{EA} + \frac{\cos^2 \alpha}{AG} \right) ds.
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由此即可得 M_{FAB} , X_{FAB} 及 Y_{FAB} 三個載常數。B 端三個常數可用平衡條件求之。

五. 特殊的桿件

以上所述各項公式，均就一般性之桿件而論，因此其應用範圍十分廣泛，但計算工作，亦將必不可免的比較浩繁。在幾種常用的、重要的特例中，方程中的一些項目，或可忽略，或可直接求出。這時一般性之方程可以簡化得多。

所謂特殊的桿件，以下列幾種情況最為重要：

- (1) 桿件軸呈一直線；
- (2) 桿件截面不變化；
- (3) 軸向應力及剪應力所產生的形變影響可以忽略；
- (4) 桿件為對稱；
- (5) 桿件位置與所選用的坐標軸有適當關係；

(6) 部分形變不可能發生。

將以上各種情況加以組合，可得多種例子。茲先將以上 6 種情況分述如下。

(1) 桿件軸呈一直線 這時 $ds = dl = dx/\cos \alpha$ 或 $= dy/\sin \alpha$, α 為常數， $\int \frac{\cos^2 \alpha}{EA} ds, \dots$ 各積分式中的 $\cos \alpha, \sin \alpha$ 等均可置於積分號之前。

(2) 桿件截面不變 這時 EA, GA 及 EI 三項均可提出在積分符號之前，使積分之進行大可簡化，特別是 $\int \frac{ds}{EI} = \frac{L}{EI}$ 。

(3) 軸向力及剪應力的影響可以忽略 這時式 $\int \frac{V^2 ds}{2GA}, \int \frac{N^2 ds}{2EA}$ 兩項可以忽略，而式 (9) 可以簡化為：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial M_0} &= M \int \frac{ds}{EI} - X \int \frac{y ds}{EI} + Y \int \frac{x ds}{EI}, \\ \frac{\partial E}{\partial X_0} &= -M \int \frac{y ds}{EI} + X \int \frac{y^2 ds}{EI} - Y \int \frac{xy ds}{EI}, \\ \frac{\partial E}{\partial Y_0} &= M \int \frac{x ds}{EI} - X \int \frac{xy ds}{EI} + Y \int \frac{x^2 ds}{EI}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(4) 桿件是對稱時 這時 A 端 18 個形常數，分別等於 B 端相當之形常數。如果荷載亦為對稱，則 A 端 3 個載常數分別等於 B 端之三。

(5) 桿件和坐標軸的位置有一定的關係 例如桿件是一根直梁且和坐標軸平行；或桿件呈對稱，其對稱軸與坐標軸平行等，均可使一般性之公式簡化。

(6) 部分形變受到限制 例如桿件之一端為支承（簡支、鉸接或固定），使該端之形變受到一定之限制。又如在普通情況下，軸向應力及剪應力產生之形變較小，可以忽略時，在直桿兩端便不可能發生平行軸線之相對形變。在連續拱結構中，倘忽略橋墩之軸向形變，拱便不可能發生垂直方向之相對形變均是。

以下我們將對幾種特別常見的情況再作一些較詳細的討論。

六. 軸向力及剪應力影響可以忽視情況

上文已提及，當軸向應力及剪應力引起的形變很小可以忽視時，式 (8) 中 $\int \frac{V^2 ds}{2AG}$ 及 $\int \frac{N^2 ds}{2AE}$ 兩項可以略去，而式 (9) 化成式 (18) 的形式。將式 (18) 代入式 (10) 至 (14)，可以求得桿件之各形常數。

為了簡化計算起見，我們可將 A 端以一剛臂接到另外一點稱為“彈心”的地方，試求在彈心處的形常數。彈心的定義是：若以彈心為坐標原點，則

$$\int \frac{x ds}{EI} = 0, \quad \int \frac{y ds}{EI} = 0. \quad (19)$$

將坐標軸原點移至彈心，再將上兩式代入，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial M_0} &= M_0 \int \frac{ds}{EI} = M_0 A, \\ \frac{\partial E}{\partial X_0} &= X_0 \int \frac{y^2 ds}{EI} - Y_0 \int \frac{xy ds}{EI} = X_0 I_y - Y_0 I_{xy}, \\ \frac{\partial E}{\partial Y_0} &= -X_0 \int \frac{xy ds}{EI} + Y_0 \int \frac{x^2 ds}{EI} = -X_0 I_{xy} + Y_0 I_x; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

上式中 A, I_x, I_y, I_{xy} 四項為簡化之記號：

$$\left. \begin{aligned} A &= \int \frac{ds}{EI}, \quad I_x = \int \frac{x^2 ds}{EI}, \\ I_y &= \int \frac{y^2 ds}{EI}, \quad I_{xy} = \int \frac{xy ds}{EI}; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

此四項亦即結構學柱比法中所謂似柱之性質。故使彈心處有一單位轉動，一單位 x 向移動，及一單位 y 向移動所需加在彈心之力為

$$M_0^\theta = \frac{1}{A}, \quad X_0^\theta = 0, \quad Y_0^\theta = 0; \quad (22)$$

$$M_0^u = 0, \quad X_0^u = \frac{I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2}, \quad Y_0^u = \frac{I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}; \quad (23)$$

$$M_0^v = 0, \quad X_0^v = \frac{I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}, \quad Y_0^v = \frac{I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2}. \quad (24)$$

根據機動理論，在桿端 A 的形變 θ_A, u_A 及 v_A 和在彈心處的形變 θ_0, u_0 及 v_0 間存在下列關係（圖 7）：

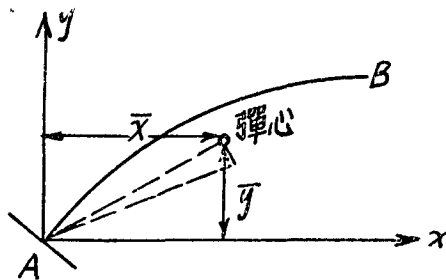


圖 7.

$$\left. \begin{array}{l} \theta_A = 1 \\ u_A = 0 \\ v_A = 0 \end{array} \right\} \text{相當於} \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = 1, \\ u_0 = -\theta_A \bar{y} = -\bar{y}, \\ v_0 = +\theta_A \bar{x} = +\bar{x}. \end{array} \right. \quad (25)$$

因此，使 A 端作一單位轉動所需在彈心之力為

$$\left. \begin{array}{l} M_0 = \frac{1}{A}, \\ X_0 = \frac{-I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \bar{y} + \frac{I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \bar{x}, \\ Y_0 = \frac{-I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \bar{y} + \frac{I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \bar{x}. \end{array} \right\} \quad (26)$$

在桿端處所需之力為

$$\left. \begin{array}{l} m_A^{\theta A} = M_A = M_0 - X_0 \bar{y} + Y_0 \bar{x} \\ \quad = M_0 + \left(\frac{I_x}{D} \bar{y} - \frac{I_{xy}}{D} \bar{x} \right) \bar{y} + \left(\frac{I_y}{D} \bar{x} - \frac{I_{xy}}{D} \bar{y} \right) \bar{x}, \\ x_A^{\theta A} = X_A = X_0 = \frac{I_{xy}}{D} \bar{x} - \frac{I_x}{D} \bar{y}, \\ y_A^{\theta A} = Y_A = Y_0 = \frac{I_y}{D} \bar{x} - \frac{I_{xy}}{D} \bar{y}; \end{array} \right\} \quad (27)$$

式中之 D 均代表 $I_x I_y - I_{xy}^2$ 。特別當桿件對稱時， $I_{xy} = 0$ ，得

$$\left. \begin{array}{l} m_A^{\theta A} = \frac{1}{A} + \frac{\bar{y}^2}{I_y} + \frac{\bar{x}^2}{I_x}, \\ x_A^{\theta A} = -\frac{\bar{y}}{I_y}, \\ y_A^{\theta A} = \frac{\bar{x}}{I_x}. \end{array} \right\} \quad (28)$$

以相同的方式，可推得下列結論：

$$\left. \begin{array}{l} m_A^{uA} = \frac{I_{xy}}{D} \bar{x} - \frac{I_x}{D} \bar{y}, \\ x_A^{uA} = \frac{I_x}{D}, \\ y_A^{uA} = \frac{I_{xy}}{D}; \end{array} \right\} \quad (29)$$

特別當桿件對稱時：

$$m_A^{uA} = -\frac{\bar{y}}{I_y}, \quad x_A^{uA} = \frac{1}{I_y}, \quad y_A^{uA} = 0. \quad (30)$$

又

$$m_A^{vA} = \frac{I_y \cdot \bar{x}}{D} - \frac{I_{xy} \cdot \bar{y}}{D}, \quad x_A^{vA} = \frac{I_{xy}}{D}, \quad y_A^{vA} = \frac{I_y}{D}; \quad (31)$$

特別當桿件對稱時

$$m_A^{vA} = \frac{\bar{x}}{I_x}, \quad x_A^{vA} = 0, \quad y_A^{vA} = \frac{1}{I_x}. \quad (32)$$

按結構學中用柱比法計算桿件常數，其最後公式實與本節所得者相符，唯柱比法公式僅為求 $m_A^{\theta A}$ （抗撓勁度）， $m_B^{\theta A}$ （傳遞係數）及 x_A^{uA} （抗推勁度）三者而已。而本節則給出了完全的公式組，而且相互間關係亦一目瞭然。總之，當軸向力及剪應力可以不計時，式 (27)，(29) 及 (31) 為計算任何桿件形常數之完整公式組，而式 (28)，(30) 及 (32) 為計算對稱桿件之公式組。

若桿件為直桿，且與 x 軸平行，則

$$\left. \begin{aligned} m_A^{\theta A} &= \frac{1}{A} + \frac{\bar{x}^2}{I_x}, & x_A^{\theta A} &= 0, & y_A^{\theta A} &= \frac{\bar{x}}{I_x}; \\ m_A^{vA} &= \frac{\bar{x}}{I_x}, & x_A^{vA} &= 0, & y_A^{vA} &= \frac{1}{I_x}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

這是計算直的變截面桿形常數之一般性公式。倘桿件截面復無變化，則

$$\left. \begin{aligned} m_A^{\theta A} &= \frac{EI}{L} + \frac{(L/2)^2}{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{EI} \cdot L^3} = \frac{EI}{L} + \frac{3EI}{L} = \frac{4EI}{L}, \\ x_A^{\theta A} &= 0, & y_A^{\theta A} &= \frac{L/2}{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{EI} \cdot L^3} = \frac{6EI}{L^2}, \\ m_B^{\theta A} &= -\frac{2EI}{L}, & m_A^{vA} &= \frac{6EI}{L^2}, \\ x_A^{vA} &= 0, & y_A^{vA} &= \frac{12EI}{L^3}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

這些均為結構學上熟見的结果。

七. 特殊的角變位移方程(一)

茲將幾種最常見的角變位移方程形式歸納如下,以供比較.

(甲)桿件爲等截面直梁(軸向力及剪應力影響不計)

$$\begin{aligned}
 M_{AB} &= M_{FAB} + 4E \frac{I}{L} \theta_A + 2E \frac{I}{L} \theta_B - 6E \frac{I}{L^2} (v_A - v_B) \\
 &= M_{FAB} + 4E \frac{I}{L} \theta_A + 2E \frac{I}{L} \theta_B - 6E \frac{I}{L^2} \Delta \quad (\Delta = v_A - v_B) \\
 &= M_{FAB} + 4E \frac{I}{L} \theta_A + 2E \frac{I}{L} \theta_B - 6E \frac{I}{L} R \quad (R = \frac{\Delta}{L}) \quad (35)
 \end{aligned}$$

(乙)桿件爲變截面直梁(軸向力及剪應力影響不計)

$$\begin{aligned}
 M_{AB} &= M_{FAB} + m_A^{\theta A} \cdot \theta_A + m_A^{\theta B} \cdot \theta_B + m_A^{vA} \cdot v_A + m_A^{vB} v_B \\
 &= M_{FAB} + S_{AB} \theta_A + C_{AB} S_{AB} \theta_B + m_A^{vA} (v_A - v_B) \\
 &= M_{FAB} + S_{AB} \theta_A + C_{AB} S_{AB} \theta_B - S_{AB} (1 + C_{AB}) \frac{v_A - v_B}{L} \\
 &= M_{FAB} + S_{AB} \theta_A + C_{AB} S_{AB} \theta_B - S_{AB} (1 + C_{AB}) R, \quad (36)
 \end{aligned}$$

式中 S_{AB} , C_{AB} 等指結構學中之抗撓勁度及傳遞係數。上述公式之導演十分簡易,不再贅論。

(丙)桿件爲變截面曲梁(軸向力及剪應力影響不計), y 方向之形變受限制:

$$\left. \begin{aligned}
 M_{AB} &= M_{FAB} + m_A^{\theta A} \theta_A + m_A^{\theta B} \theta_B + m_A^{uA} u_A + m_A^{uB} u_B \\
 &= M_{FAB} + S_{AB} \theta_A + C_{AB} S_{AB} \theta_B + T_{AB} (u_A - u_B), \\
 X_{AB} &= X_{FAB} + x_A^{\theta A} \theta_A + x_A^{\theta B} \theta_B + x_A^{uA} u_A + x_A^{uB} u_B \\
 &= X_{FAB} + T_{AB} (\theta_A - \theta_B) + J_{AB} (u_A - u_B);
 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

上式中 T_{AB} 稱爲相干係數,實即 $m_A^{uA} = -m_A^{uB} = x_A^{\theta A} = -x_A^{\theta B}$ 也; J_{AB} 稱爲抗推勁度,實即 $x_A^{uA} = -x_A^{uB}$ 也; T_{AB} 及 J_{AB} 等記法,常於連續拱結構分析中見之。

(丁)桿件爲變截面曲梁 (軸向力及剪應力影響不計), 一般性情況:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= M_{FAB} + m_A^{\theta A} \theta_A + m_A^{\theta B} \theta_B + m_A^{uA} u_A + m_A^{uB} u_B + m_A^{vA} v_A + m_A^{vB} v_B, \\ X_{AB} &= X_{FAB} + x_A^{\theta A} \theta_A + x_A^{\theta B} \theta_B + x_A^{uA} u_A + x_A^{uB} u_B + x_A^{vA} v_A + x_B^{vB} v_B, \\ Y_{AB} &= Y_{FAB} + y_A^{\theta A} \theta_A + y_A^{\theta B} \theta_B + y_A^{uA} u_A + y_A^{uB} u_B + y_A^{vA} v_A + y_A^{vB} v_B. \end{aligned} \right\} (38)$$

這是一般性的公式。當我們要利用角變位移式分析如圖 8 中的剛構時, 就須用到它。依照一般的記法, 令

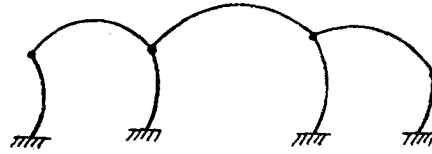


圖 8.

$$S_{AB} = m_A^{\theta A},$$

$$C_{AB} S_{AB} = m_A^{\theta B},$$

$$T_{AB} = m_A^{uA} = -m_A^{uB} = x_A^{\theta A} = -x_A^{\theta B},$$

$$G_{AB} = m_A^{vA} = -m_A^{vB} = y_A^{\theta A} = -y_A^{\theta B},$$

$$F_{AB} = x_A^{vA} = -x_B^{vB} = y_A^{uA} = y_A^{uB},$$

$$J_{AB} = x_A^{uA} = -x_A^{uB},$$

$$N_{AB} = y_A^{vA} = -y_A^{vB};$$

則式 (38) 可改寫爲

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= M_{FAB} + S_{AB} (\theta_A + C_{AB} \theta_B) + T_{AB} (u_A - u_B) + G_{AB} (v_A - v_B), \\ X_{AB} &= X_{FAB} + T_{AB} (\theta_A - \theta_B) + J_{AB} (u_A - u_B) + F_{AB} (v_A - v_B), \\ Y_{AB} &= Y_{FAB} + G_{AB} (\theta_A - \theta_B) + F_{AB} (u_A - u_B) + N_{AB} (v_A - v_B); \end{aligned} \right\} (39)$$

上式中 S_{AB} 代表抗撓勁度, J_{AB} 及 N_{AB} 各代表沿 x 及 y 方向之抗推勁度, T_{AB} ,

G_{AB} 及 F_{AB} 各代表 $M-X$, $M-Y$, $X-Y$ 間之相干係數。方程 (39) 與式 (37) 十分相似，且整齊異常，甚便記憶。

八. 特殊的角變位移方程(二)

以上所論，都是根據一個基本假定出發的，就是軸向力和撓曲應力各不相涉。嚴格講來，當一桿件同時承受軸向及側向荷載時，兩者相互有關，如果要考慮到這些影響，則角變位移方程將形複雜化。試取最簡單的例子來看，圖 9 中為一根等截面直梁，當其不承受軸向力時，欲使 A 端發生一單位轉動所需之力矩 M_A 為

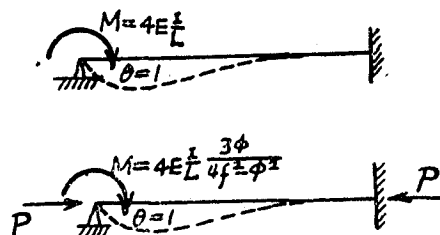


圖 9.

$$M_A = m_A^{\theta A} = 4E \frac{I}{L}, \quad (40)$$

但當其承受軸向壓力 P 時， $m_A^{\theta A}$ 即成為 P 之函數：

$$m_A^{\theta A} = 4E \frac{I}{L} \cdot \frac{3f}{4f^2 - \phi^2}; \quad (41)$$

式中 ϕ 及 f 為 $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{l}{2}$ 的函數：

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{3}{2\alpha} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\tan 2\alpha} \right), \\ \phi &= \frac{3}{\alpha} \left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

由此可知，當桿件同時承受軸向力及側力時， $m_A^{\theta A}$ 將不復是一個常數，而視軸向力大小改變。如果此軸向力為一定，則桿件之角變位移方程仍可寫出，如下示形式：

$$M_{AB} = M'_{FAB} + S'_{AB} \theta_A + S'_{AB} C'_{AB} \theta_B - S'_{AB} (1 + C'_{AB}) R_{AB}; \quad (43)$$

式中之 M'_{FAB} , S'_{AB} 及 C'_{AB} 等為修正之桿件載常數及形常數，均為軸向力 P 之函數。在所舉的簡單情況下，這些函數不難求得為

$$S'_{AB} = S_{AB} \frac{3f}{4f^2 - \phi^2}, \quad (44)$$

$$C'_{AB} = C_{AB} \cdot \frac{\phi}{f}, \quad (45)$$

$$M'_{FAB} = M_{FAB} \cdot \frac{3\phi}{2f + \phi} \quad [\text{以均佈荷載為例, } \phi = \frac{3}{\alpha^3} (\tan \alpha - \alpha)]. \quad (46)$$

修正載常數與原來載常數間之關係，並不能以一個公式表示，須對每一種荷載分別求出，式(46)所列的僅為均佈荷載之例子。

如果桿件截面有變化，則角變位移方程仍可以式(43)形式表之，唯各修正常數很難推求。作者曾解出數種特殊情況，且發現在普通變梁情況中，這些修正常數的公式多可由貝塞爾函數表示之。

當桿件承受軸向拉力時，各修正常數之公式仍為式(44-46)，但其中 ϕ , f 及 ψ 三函數改為雙曲線函數如下：

$$\phi = \frac{3(1 - 2\alpha \operatorname{csch} 2\alpha)}{2\alpha^2}, \quad (47)$$

$$f = \frac{3(2\alpha \coth 2\alpha - 1)}{4\alpha^2}, \quad (48)$$

$$\psi = \frac{3(\alpha - \tanh \alpha)}{\alpha^3}. \quad (49)$$

如果桿件不是一根直梁，而係曲梁，則各常數的表達式將更為複雜。但根據作者研究，將直梁和曲梁相比較，前者軸向力對撓曲應力之影響遠比後者嚴重。換言之，在曲梁情況中，軸向力對撓曲的影響，往往可以安全的予以忽視。

九. 特殊的角變位移方程(三)

以上所論，又是根據結點具有完全之剛固性的假定出發的。實際上的剛構結點，多非絕對剛固，尤其以鉚接結點為然。因此普通之結點性質，實在介於剛結點和鉸結點之間，可以稱為是一種半剛性的結點；其結構特徵是：當結點承受力矩時，各桿件間之夾角可能有一定程度之變動。這些變動角 ϕ 與所承受力矩 M 間之關係，根據許多試驗指出，常成一條曲線。如為便於分析起見，假定 ϕ 與 M 成直線變化，則這種理想的半剛性結點可以稱為“彈性結點”。具有彈性結點

的剛構，其角變位移方程又將採取另一種形式出現。我們試仍以簡單的直桿情況加以說明。

考慮圖 10 中的結點。圖中劃斜線部分的材料是剛固體而無形變。這部分材料即稱為結點。在外荷載下，結點有一轉動角 θ_A 。

AB 是與 A 點相連接的一根桿件，在荷載下，它也有轉動角 θ_{AB} 。由於結點是彈性的，故 $\theta_A \neq \theta_{AB}$ ，其相差之值記為

$$\phi_{AB} = \theta_A - \theta_{AB}, \quad (50)$$

而且根據定義， $\phi_{AB} \propto M_{AB}$ ，令比例常數為 K_{AB} ，則

$$\left. \begin{aligned} \theta_A - \theta_{AB} &= K_{AB} M_{AB}, \\ \theta_B - \theta_{BA} &= K_{BA} M_{BA}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

同理

將上兩式代入角變位移式中，

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= M_{FAB} + S_{AB} \theta_{AB} + C_{AB} S_{AB} \theta_{BA} - S_{AB} (1 + C_{AB}) R_{AB}, \\ M_{BA} &= M_{FBA} + S_{BA} \theta_{BA} + C_{BA} S_{BA} \theta_{AB} - S_{BA} (1 + C_{BA}) R_{AB}, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

消去 θ_{AB} ，並解出 M_{AB} ，可得（以 β_{AB} 代表 $K_{AB} S_{AB}$ ， β_{BA} 代表 $K_{BA} S_{BA}$ ）：

$$M_{AB} = \frac{S_{AB}}{(1 + \beta_{AB})(1 + \beta_{BA}) - C_{AB} C_{BA} \beta_{AB} \beta_{BA}} \left[(1 + \beta_{BA} - C_{AB} C_{BA} \beta_{BA}) \theta_A + C_{AB} \theta_B - \{ (1 + \beta_{BA})(1 + C_{AB}) - C_{AB} \beta_{BA}(1 + C_{BA}) \} R + M'_F \right]. \quad (53)$$

關於 M_{BA} 之方程，可以做此寫出。特別當桿件截面不變時，上式簡化成

$$M_{AB} = \frac{EK}{(1 + \beta_{AB} + \beta_{BA} + \frac{3}{4} \beta_{AB} \beta_{BA})} \left[(4 + 3 \beta_{BA}) \theta_A + 2 \theta_B + (6 + 3 \beta_{BA}) R + M'_{FAB} \right]. \quad (54)$$

注意上式中的載常數 M'_{FAB} 和普通的 M_{FAB} 已不同，須就每種特殊荷載分別求算。例如當荷載為均勻分佈時，

$$M'_{FAB} = (3\beta_{BA} + 2) \frac{\omega l^3}{24 EI}. \quad (55)$$

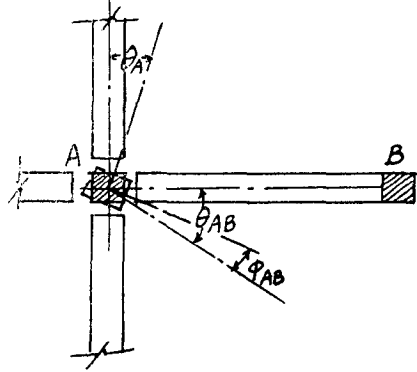


圖 10.

關於彈性結點剛構之分析公式，作者曾導得很多。限於篇幅，不能一一寫出。總之，根據基本關係式 (51) 及 (52)，一切彈性結點的公式，均可由代數方法推出，並不困難。

十. 桁架梁——結點與桿件定義之推廣

在許多實際結構中，我們常須採取剛構和桁架混合的形式，就是以桁架來用作剛構的一根桿件。桁架的結構性質和普通的梁頗有區別，因此其角變位移方程亦值得略加探討。

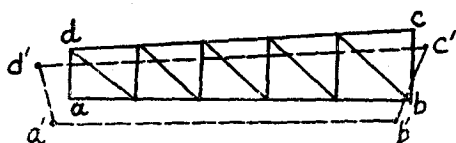


圖 11.

程亦值得略加探討。

試看圖 11 中的桁架 $abcd$ 。首先我們將發現桁架的端部，不是一個點子，而是兩點（如 ad 或 bc ），這是和普通梁不同之處。

其次，設圖中虛線表示形變後的桁架位置，則在兩端將各有四個形變值，即 u_a, u_d, v_a, v_d ，或 u_b, u_c, v_b, v_c 。

普通梁端則只有三個形變值（ θ, u 及 v ），故桁架梁之一般性角變位移式將和普通梁完全不同。

但若假定桁架之端桿 ad 或 bc 無伸長（壓縮）可能，則每端之獨立形變減而為 3，便和梁相似。在實用情況中，桁架兩端往往只有水平變位，則每端只有兩個形變（ u_a, u_d 或 u_b, u_c ），其結構性質更和普通之跨變梁相似。

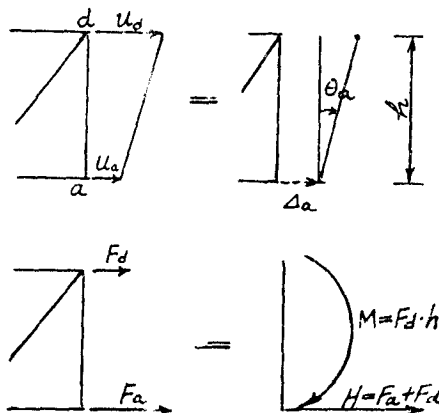


圖 12.

要使桁架和一跨變梁相等，首先須把桁架兩端之兩個變位 u_a 和 u_d 化為梁端形變 θ_a 和 Δ_a 。這可利用疊加原理得之。由圖 12 可見， u_a 及 u_d 相當於

$$\left. \begin{aligned} \Delta_a &= u_a, \\ \theta_a &= \frac{u_d - u_a}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

同理，在桁架端的兩個反力 F_a, F_d 也可化成一個推力及一個力矩：

$$\left. \begin{aligned} H_a &= F_a + F_d, \\ M_a &= F_d \cdot h. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

這樣便完成了相似的工作，而桁架的角變位移方程乃可寫為

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= M_{FAB} + S_{AB} \theta_A + C_{AB} S_{AB} \theta_B + T_{AB} (\Delta_A - \Delta_B), \\ H_{AB} &= H_{FAB} + T_{AB} (\theta_A - \theta_B) + J_{AB} (\Delta_A - \Delta_B); \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

式中 M_{FAB} 及 H_{FAB} 為桁架之載常數， S_{AB} ， C_{AB} ， T_{AB} 及 J_{AB} 為桁架之形常數，其定義示於圖 13 中。利用這種廣義的角變位移式，桁架剛構便可用角變位移法或力矩分配法解之。

在這裏，我們已把結點的意義推廣了，結點已不再是一個點子，而是桁架和柱子相接合的一部分，根據這意義，圖 14 中的立柱可以視為由上下兩段在中央結點相剛接。

我們如果再將桿件的定義推廣為：“桿件是指結構中的一部分，在兩端或在中部和其他桿件相接”，則圖 14 中的雙層桁架剛構更可以視為由四根

桿件組成，不必視為由 6 根桿件組成，立柱作為一根桿件，在三處和其他桿件或基礎連接。利用這種廣義的想法，可使雙層桁架的分析工作簡化至和單層相同。

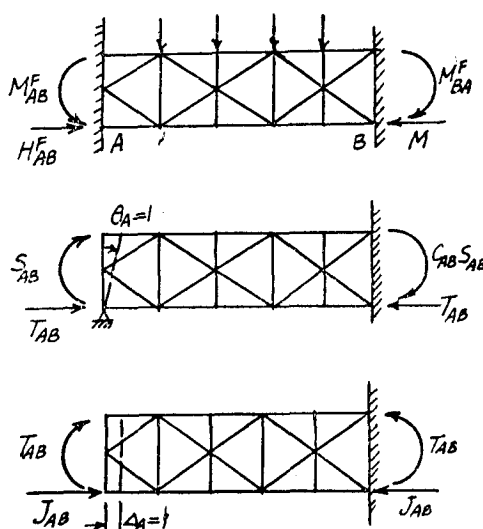


圖 13.

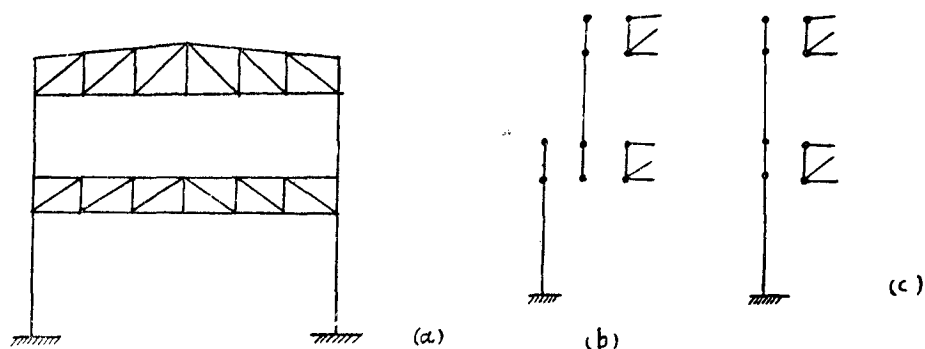


圖 14.

十一. 結 論

本文將結構學中的角變位移式作了個較全面的討論，提出了完全的形式，並討論了各種特殊情況下的形式。其中許多觀點都可以再行深入討論與推廣。

雖然本文中已討論了不少特殊的角變位移式，但尚有許多情況是沒有涉及，例如：將桿件本身寬度的影響考慮在內，便可以得到另一形式的角變位移式。因為這種問題重要性較次，限於篇幅，故從略。

本文中關於桁架梁的處理係得參考文獻[1]之啓發，又本文承許以民同志整理完成，謹致謝。

參 考 文 獻

- [1] 蔡方蔭，桁架剛構正確分析之兩項原理，土木工程學報 2 卷 1 期，1955。
- [2] 潘家鏞，考慮結點寬度影響之剛構分析，1954 (待發表)。
- [3] Timoshenko, S., Theory of Elastic Stability, Chap. I, (1936).
- [4] Pippard, A. J. S. and Baker, J. F., The Analysis of Engineering Structures pp. 184-187, 208-210 (1943).

ON THE GENERALIZED SLOPE-DEFLECTION EQUATIONS

PAN CHIA-CHENG

(The National Bureau of Hydroelectrical Eng.)

ABSTRACT

This paper investigates the general and complete form of slope-deflection equations used in structural analysis. The word "complete" indicates that all the possible deformations (deflections and rotations) and all the strain energies (due to shear, direct stress and flexure) are included in the equations. The definitions, numbers, and relations of member constants are then discussed and the general equations for computing these constants are given. By neglecting the factors of minor importance, the general form is reduced to the usual slope-deflection equations. Some special forms of such equations which are useful in certain practical problems are also discussed briefly, such as the slope-deflection equations including the effect of direct stress on flexure and the slope-deflection equations of semi-rigid frames. Slope deflection equations for trussed bents are also presented.