

彈性薄壁桿件的平衡與穩定 的一般理論*

胡 海 昌

解 伯 民

(中國科學院數學研究所)

(清華大學材料力學教研組)

一. 引 言

開口或閉合截面的薄壁桿件，在建築結構、造船、航空、機械製造以及其他近代結構技術部門都有廣泛的應用。因此彈性薄壁桿件的理論近來研究得很多。在 1929 年，H. 華格納爾^[1]提出了開口截面彈性薄壁桿件的約束扭轉和穩定的一個實用理論。這個理論的基礎是假定：1) 桿件橫截面的周線剛硬不可變形；2) 桿件的中曲面無剪應變。但是由於 H. 華格納爾錯誤地以為桿件失去穩定後截面的旋轉中心與彎曲中心相重，因此得出了錯誤的穩定理論。

在 1936 年，B. 3. 符拉索夫^[2, 3]依據與 H. 華格納爾相同的兩個假設，但却是獨自地發展了近代的開口截面彈性薄壁桿件的實用理論。他不但建立了無誤的穩定理論，並且還同時建立了振動理論。

據說^[4]閉合截面彈性薄壁桿件的實用理論是由 A. A. 烏曼斯基^[5, 6]所發展的。

在 1946 年卡門和錢偉長^[7]發表了彈性薄壁桿件平衡的一般理論。這個理論只根據一個假設，即桿件截面的周線不可變形。利用他們的理論不但可以求得較準確的結果，並且使人有可能來決定薄壁桿件平衡的實用理論在哪些問題是適用的，在哪些問題是不適用的。

據說^[4]P. A. 亞達杜洛夫^[8]在 1943—1948 年間發展了跟卡門和錢偉長相同的一般理論，不過他的工作直到 1948 年才公開發表。

本文的目的在於根據“截面周線剛硬不可變形”的假設來建立開口和閉合截

*1955 年 1 月 16 日收到。

面的彈性薄壁桿件的平衡和穩定的一般理論。我們還提出了簡支桿件的平衡及穩定問題的一般解法。這個解法只用到三角級數而無須預先解算一系列的本徵值問題，因而比卡門和錢偉長、亞達杜洛夫等人用過的方法簡單許多。

二. 薄壁桿件平衡和穩定的基本方程

考慮一彈性薄壁桿件在按平面規律分佈的軸向壓力 P^0 ，撓矩 M_x^0, M_y^0 以及單位長度的分佈橫向載荷 $q_x(z), q_y(z)$ 和扭力矩 $m(z)$ 的聯合作用下的平衡情況。取一直角坐標系 x, y, z ，使 z 軸沿桿件的長度， x, y 軸與截面的中心主軸相重。設 s 是截面周線的弧長。對於開口截面， s 從截面的一端算起。我們假定：1) 截面 $z = \text{const}$ 上的內力可由兩個應力分量 σ_z 和 τ_{xz} 來決定，它們是法應力和剪應力沿壁厚的平均值；2) 由於沿壁厚法應力非均勻分佈所產生的影響可以略去不計；由於沿壁厚剪應力非均勻分佈所產生的影響，在閉合截面的場合可以略去不計，而在開口截面的場合可歸結為一個內扭力矩 $\bar{M}_x$ ，它與桿件的扭轉角 $\theta(z)$ 有如下的關係：

$$\bar{M}_x = C \frac{d\theta}{dz}, \quad (1)$$

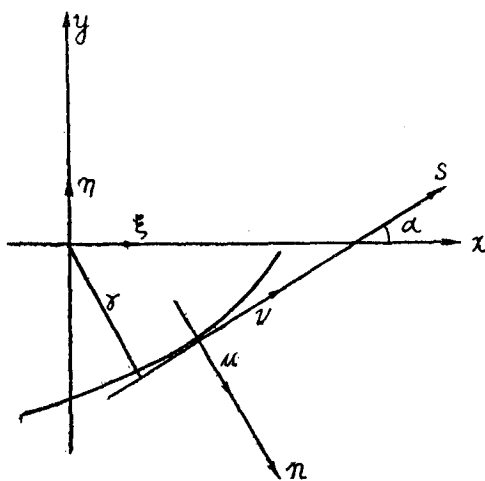


圖 1.

其中 C 是桿件自由扭轉時的抗扭剛度；3) 桿件變形後，橫截面在平面 $z = \text{const}$ 上的投影的形狀不變（即周線剛硬不可變形）。

在桿件承受按平面規律分佈的縱向力 P^0, M_x^0, M_y^0 之後但在尚未承受橫向載荷之前，桿件中已有了法應力，它的分佈情況是¹⁾

$$\sigma_z^0 = -\frac{P^0}{F} - \frac{M_y^0}{I_{xx}}x + \frac{M_x^0}{I_{yy}}y, \quad (2)$$

同時桿件內各點也有了位移。但為

1) 為了和以後引進的符號一致起見，我們將截面的慣性矩表示為

$$I_{xx} = \int_0^l x^2 h ds, \quad I_{yy} = \int_0^l y^2 h ds.$$

了簡明起見，我們以 $u, v, w, \epsilon_z, \gamma_{zs}, \sigma_z, \tau_{zs}$ 等表示由於再加上橫向載荷之後桿件內各點的位移、應變和應力的增量。

按照第三個假設，桿件各點的位移為縱位移 $w(z, s)$ 和在平面 $z = \text{const}$ 內的截面的一個剛體運動。這個剛體運動可由截面中心（即 z 軸與截面的交點）的撓度 $\xi(z)$ ， $\eta(z)$ 和截面繞中心的扭轉角 $\theta(z)$ 來決定。

由於截面周線剛硬不可變形，周線上各點沿周線法線方向的位移 $u(z, s)$ 和切線方向的位移 $v(z, s)$ 分別為（參考圖 1）：

$$\left. \begin{aligned} u &= (\xi - y\theta) \sin \alpha - (\eta + x\theta) \cos \alpha, \\ v &= \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + \theta r. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 α 是該點的切線與 x 軸的交角， r 是從截面中心至該切線的垂直距離。設¹⁾

$$\omega(s) = \int_0^s r(s) ds + \omega_0, \quad r = \frac{d\omega}{ds} = \omega'. \quad (4)$$

ω 便是所謂扇性面積， ω_0 的選擇暫不作規定。由於

$$\cos \alpha = x'(s), \quad \sin \alpha = y'(s), \quad (5)$$

(3) 式化為

$$\left. \begin{aligned} u &= (\xi - y\theta) y' - (\eta + x\theta) x', \\ v &= \xi x' + \eta y' + \theta \omega'. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

根據 (6) 式，桿件中曲面的剪應變為

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial s} + x' \frac{d\xi}{dz} + y' \frac{d\eta}{dz} + \omega' \frac{d\theta}{dz}. \quad (7)$$

因而在橫截面上法應力與剪應力的算式是：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= E \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{zs} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial s} + x' \frac{d\xi}{dz} + y' \frac{d\eta}{dz} + \omega' \frac{d\theta}{dz} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

在普通的平衡問題中，書寫桿件的平衡方程時不必考慮到形變對於各力的

1) 為了書寫方便起見，我們在外文字母上加一撇以表示該量對坐標 s 的微分。

影響。但在桿件預受縱向力的情況，則應考慮到增加的形變對於原有縱向力的影響。

由於增加的位移 u, v, w ，桿件單元體 $ABCD$ （圖 2）上的截面 CD 對於

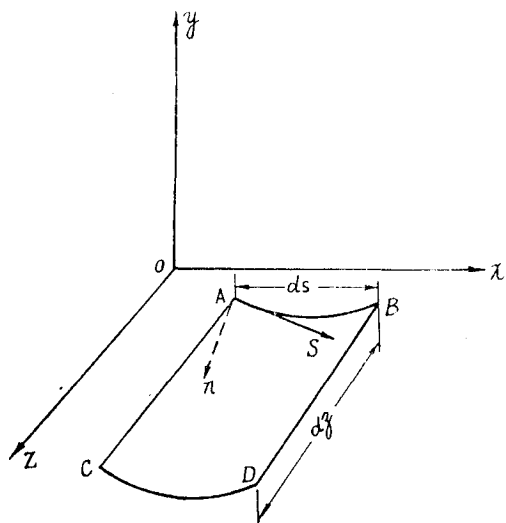


圖 2.

截面 AB 發生了轉動。不難求得這個轉動沿周線法線方向 n 的分量和切線方向 s 的分量各為 $-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz$ 。設這個轉動沿 x, y 軸方向的分量各為 $d\alpha_x, d\alpha_y$ ，那末可得

$$\left. \begin{aligned} d\alpha_x &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos \alpha - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \sin \alpha \right) dz, \\ d\alpha_y &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \sin \alpha + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cos \alpha \right) dz. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

將 u, v 的算式 (6) 代入此式，化簡後得到

$$\left. \begin{aligned} d\alpha_x &= \left(-\frac{d^2 \eta}{dz^2} - x \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right) dz, \\ d\alpha_y &= \left(\frac{d^2 \xi}{dz^2} - y \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right) dz. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

中曲面單元在 z 方向的平衡條件給出

$$h \frac{\partial (\sigma_z + \sigma_z^0)}{\partial z} + \frac{\partial (h \tau_{zs})}{\partial s} = 0.$$

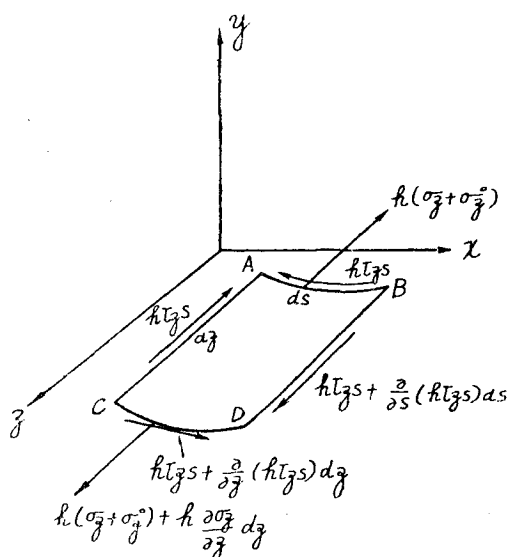


圖 3.

其中 h 是壁厚, 我們假定 h 是 s 的函數但與 z 無關. 注意到 σ_z^0 與 z 無關, 我們得到一個平衡方程如下:

$$h \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial (h \tau_{zs})}{\partial s} = 0. \quad (11)$$

另外因為桿件在截面 $z = \text{const}$ 內具有不可變形的周線, 所以在平面 $z = \text{const}$ 上的平衡條件可考慮桿件的一小段 dz 而得出 (見圖 3), 而這一小段相同於一個剛體. 這樣得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^l \tau_{zs} x' h ds + \int_0^l (\sigma_z + \sigma_z^0) \frac{\partial a_y}{\partial z} h ds + q_x &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \int_0^l \tau_{zs} y' h ds - \int_0^l (\sigma_z + \sigma_z^0) \frac{\partial a_x}{\partial z} h ds + q_y &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \int_0^l \tau_{zs} \omega' h ds - \int_0^l (\sigma_z + \sigma_z^0) \left(x \frac{\partial a_x}{\partial z} + y \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) h ds + C \frac{d^2 \theta}{dz^2} + m &= 0. \end{aligned}$$

其中 l 是截面周線的長度. 對於閉合截面的桿件, 上式以及以後各方程中凡含有 C 的各項應當除去. 略去上式中的二級小量 $\sigma_z \frac{\partial a_y}{\partial z}$, $\sigma_z \frac{\partial a_x}{\partial z}$, $\sigma_z \left(x \frac{\partial a_x}{\partial z} + y \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)$, 並將 $\frac{\partial a_x}{\partial z}$, $\frac{\partial a_y}{\partial z}$ 的公式 (10) 代入, 我們得到另外三個平衡方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^l \tau_{zs} x' h ds + \int_0^l \sigma_z^0 \left(\frac{d^2 \xi}{dz^2} - y \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right) h ds + q_x = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^l \tau_{zs} y' h ds + \int_0^l \sigma_z^0 \left(\frac{d^2 \eta}{dz^2} + x \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right) h ds + q_y = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^l \tau_{zs} \omega' h ds + \int_0^l \sigma_z^0 \left[x \frac{d^2 \eta}{dz^2} - y \frac{d^2 \xi}{dz^2} + (x^2 + y^2) \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right] h ds + \\ + C \frac{d^2 \theta}{dz^2} + m = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

將 σ_z^0 , σ_z , τ_{zs} 的算式 (2), (8) 代入平衡方程 (11)–(12), 加以整理後我們得到以位移表示的平衡方程如下:

$$\frac{E}{G} h \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial s} h \frac{\partial w}{\partial s} + (x' h)' \frac{d\xi}{dz} + (y' h)' \frac{d\eta}{dz} + (\omega' h)' \frac{d\theta}{dz} = 0, \quad (15)$$

$$G \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} x' h ds + A_{11} \frac{d^2 \xi}{dz^2} + A_{12} \frac{d^2 \eta}{dz^2} + A_{13} \frac{d^2 \theta}{dz^2} + q_x = 0, \quad (16)$$

$$G \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} y' h ds + A_{12} \frac{d^2 \xi}{dz^2} + A_{22} \frac{d^2 \eta}{dz^2} + A_{23} \frac{d^2 \theta}{dz^2} + q_y = 0, \quad (17)$$

$$G \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} \omega' h ds + A_{13} \frac{d^2 \xi}{dz^2} + A_{23} \frac{d^2 \eta}{dz^2} + A_{33} \frac{d^2 \theta}{dz^2} + m = 0. \quad (18)$$

其中係數 $A_{11}, A_{12}, \dots$ 爲

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= -P + G I'_{xx}, & A_{22} &= -P + G I'_{yy}, \\ A_{33} &= -\frac{I_{xx} + I_{yy}}{F} P^0 - \frac{I_{xxx} + I_{yyy}}{I_{xx}} M_y^0 + \frac{I_{xxy} + I_{yyy}}{I_{yy}} M_x^0 + G I'_{\omega\omega} + C, \\ A_{12} &= G I'_{xy}, & A_{13} &= -M_x^0 + G I'_{x\omega}, & A_{23} &= -M_y^0 + G I'_{y\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

而 $I_{xxx}, I_{xxy}, \dots, I'_{xx}, \dots$ 等爲

$$\left. \begin{aligned} I_{xxx} &= \int_0^l x^3 h ds, & I_{xxy} &= \int_0^l x^2 y h ds, & I_{xyy} &= \int_0^l x y^2 h ds, & I_{yyy} &= \int_0^l y^3 h ds, \\ I'_{xx} &= \int_0^l x' x' h ds, & I'_{xy} &= \int_0^l x' y' h ds, & I'_{yy} &= \int_0^l y' y' h ds. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

方程 (15)–(18) 是彈性薄壁桿件平衡和穩定的基本方程。與此相伴的邊界條件，隨不同的情況而有所不同。對於開口截面的桿件，在縱向邊緣上無剪應力，因此有邊界條件：

在 $s = 0$ 和 $s = l$ 處，

$$\frac{\partial w}{\partial s} + x' \frac{d\xi}{dz} + y' \frac{d\eta}{dz} + \omega' \frac{d\theta}{dz} = 0. \quad (21)$$

對於閉合截面的桿件，條件 (21) 應被代以 w 的週期條件：

$$w(z, s + l) = w(z, s). \quad (22)$$

在桿件的端面上，可能有種種不同的邊界條件，它們是下列四組方程的各種可能的組合：

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ 或 } w = 0. \quad (23a), (23b)$$

$$Q_x = G \int_0^l \frac{\partial w}{\partial s} x' h ds + A_{11} \frac{d\xi}{dz} + A_{12} \frac{d\eta}{dz} + A_{13} \frac{d\theta}{dz} = 0, \quad (24a)$$

$$\text{或 } \xi = 0, \quad (24b)$$

$$Q_y = G \int_0^l \frac{\partial w}{\partial s} y' h ds + A_{12} \frac{d\xi}{dz} + A_{22} \frac{d\eta}{dz} + A_{23} \frac{d\theta}{dz} = 0, \quad (25a)$$

$$\text{或 } \eta = 0. \quad (25b)$$

$$M_z = G \int_0^l \frac{\partial w}{\partial s} \omega' h ds + A_{13} \frac{d\xi}{dz} + A_{23} \frac{d\eta}{dz} + A_{33} \frac{d\theta}{dz} = 0, \quad (26a)$$

$$\text{或 } \theta = 0, \quad (26b)$$

例如對於完全懸空的桿端， $\sigma_x = Q_x = Q_y = M_z = 0$ ，因此我們應該取 (23—26a)，而對於完全固定的桿件， $w = \xi = \eta = \theta = 0$ ，因此我們應該取 (23—26b)。

三．基本方程的變分推導及其簡化

上節求得的基本方程 (15)—(18)，可更簡單地從勢能原理導得。表示勢能原理的變分式，不但可作為推導微分方程的出發點，並且還可作為各種各樣的近似解法的根據。

桿件中曲面的剪應變 γ_{xs} ，可仍取其第一級近似式：

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial w}{\partial s} + x' \frac{d\xi}{dz} + y' \frac{d\eta}{dz} + \omega' \frac{d\theta}{dz}. \quad (27)$$

但是由於預加的縱向力的存在，桿件中曲面的伸縮應變 ϵ_x 需要顧及二級小量。設 P, Q 是桿件同一母線上的某兩點，其間的距離原為 dz 。設加上橫向載荷後這兩點移至 P', Q' 。線段 $P'Q'$ 在 x, y, z 軸上的投影分別為

$$\frac{\partial}{\partial z} (\xi - y\theta) dz, \quad \frac{\partial}{\partial z} (\eta + x\theta) dz, \quad dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

因此桿件的軸向應變為

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sqrt{\left(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right)^2 + \left[\left(\frac{d\xi}{dz} - y \frac{d\theta}{dz}\right) dz\right]^2 + \left[\left(\frac{d\eta}{dz} + x \frac{d\theta}{dz}\right) dz\right]^2} - dz}{dz} = \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dz} - y \frac{d\theta}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dz} + x \frac{d\theta}{dz}\right)^2} - 1. \end{aligned}$$

展開此式，並略去二次以上的小量，我們得到

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dz} - y \frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dz} + x \frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right]. \quad (28)$$

我們所利用的勢能原理如下：“在所有適合連續條件的位移中，真正的位移使總勢能達極值”。我們取桿件預受縱向力後所具有的勢能作為計算勢能的起點(即零點)。這樣，加上橫向載荷後桿件的應變能 V_s 為

$$V_s = \int_0^L \int_0^l \left(-\frac{P^0}{F} - \frac{M_y^0}{I_{xx}} x + \frac{M_x^0}{I_{yy}} y \right) \epsilon_z h ds dz + \frac{E}{2} \int_0^L \int_0^l \epsilon_z^2 h ds dz + \\ + \frac{G}{2} \int_0^L \int_0^l \gamma_{xz}^2 h ds dz + \frac{C}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz. \quad (29)$$

其中 L 是桿件的長度， l 是截面周線的長度， h 是壁厚。上式第一個積分代表預加縱向應力所增加的應變能，第二個積分代表軸向應變的應變能，第三個積分代表平均剪應變的應變能，而第四個積分代表照顧到剪應變非均勻分佈所增加的應變能。對於閉合截面的桿件，這含有 C 的一項應當除去。

將 (27)，(28) 兩式代入 (29) 式，並略去高於二次的各項，我們得到

$$V_s = -\frac{P^0}{F} \int_0^L \int_0^l \frac{\partial w}{\partial z} h ds dz - \frac{M_y^0}{I_{xx}} \int_0^L \int_0^l \frac{\partial w}{\partial z} x h ds dz + \frac{M_x^0}{I_{yy}} \int_0^L \int_0^l \frac{\partial w}{\partial z} y h ds dz - \\ - \frac{P^0}{2F} \int_0^L \left[F \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 + F \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 + (I_{xx} + I_{yy}) \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right] dz - \\ - \frac{M_y^0}{2I_{xx}} \int_0^L \left[(I_{xxx} + I_{xyy}) \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + 2I_{xx} \frac{d\eta}{dz} \frac{d\theta}{dz} \right] dz + \\ + \frac{M_x^0}{2I_{yy}} \int_0^L \left[(I_{xyx} + I_{yyy}) \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - 2I_{yy} \frac{d\xi}{dz} \frac{d\theta}{dz} \right] dz + \frac{E}{2} \int_0^L \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 h ds dz + \\ + \frac{G}{2} \int_0^L \int_0^l \frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial s} + 2x' \frac{d\xi}{dz} + 2y' \frac{d\eta}{dz} + 2\omega' \frac{d\theta}{dz} \right) h ds dz + \\ + \frac{G}{2} \int_0^L \left[I'_{xx} \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 + I'_{yy} \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 + I'_{\omega\omega} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + 2I'_{xy} \frac{d\xi}{dz} \frac{d\eta}{dz} + \right. \\ \left. + 2I'_{x\omega} \frac{d\xi}{dz} \frac{d\theta}{dz} + 2I'_{y\omega} \frac{d\eta}{dz} \frac{d\theta}{dz} \right] dz + \frac{C}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz. \quad (30)$$

其中 $I_{xxx}, \dots, I'_{xx}, \dots$ 之意義如 (20) 式所示。

加上橫向載荷 $q_x(z)$ ， $q_y(z)$ ， $m(z)$ 之後，外力勢能之增加為

$$V_q = - \int_0^L (q_x \xi + q_y \eta + m\theta) dz + \frac{P^0}{F} \int_0^l \left[w(L, s) - w(0, s) \right] h ds + \\ + \frac{M_y^0}{I_{xx}} \int_0^l \left[w(L, s) - w(0, s) \right] x h ds - \frac{M_x^0}{I_{yy}} \int_0^l \left[w(L, s) - w(0, s) \right] y h ds. \quad (31)$$

將 (30), (31) 兩式相加, 並注意到 (30) 式的前三個積分恰與 (31) 式的後三個積分相消, 我們得到桿件的總勢能的算式如下:

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{11} \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 + A_{22} \left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 + A_{33} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 + 2A_{12} \frac{d\xi}{dz} \frac{d\eta}{dz} + 2A_{13} \frac{d\xi}{dz} \frac{d\theta}{dz} + \right. \\
 & \left. + 2A_{23} \frac{d\eta}{dz} \frac{d\theta}{dz} \right] dz + \frac{E}{2} \int_0^L \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 h ds dz + \\
 & + \frac{G}{2} \int_0^L \int_0^l \frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial s} + 2x' \frac{d\xi}{dz} + 2y' \frac{d\eta}{dz} + 2\omega' \frac{d\theta}{dz} \right) h ds dz - \\
 & - \int_0^L (q_x \xi + q_y \eta + m \theta) dz. \quad (32)
 \end{aligned}$$

其中 $A_{11}, \dots$ 之意義如 (19) 式所示.

根據勢能原理, 總勢能應取極值, 所以

$$V = \text{極值}, \quad \text{即} \quad \delta V = 0. \quad (33)$$

根據歐勒-拉格倫日方程; 從變分式 (33) 我們可得到 w, ξ, η, θ 的四個微積分方程如下:

$$\frac{E}{G} h \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial s} h \frac{\partial w}{\partial s} + (x'h)' \frac{d\xi}{dz} + (y'h)' \frac{d\eta}{dz} + (\omega'h)' \frac{d\theta}{dz} = 0, \quad (34)$$

$$G \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} x'h ds + A_{11} \frac{d^2 \xi}{dz^2} + A_{12} \frac{d^2 \eta}{dz^2} + A_{13} \frac{d^2 \theta}{dz^2} + q_x = 0, \quad (35)$$

$$G \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} y'h ds + A_{12} \frac{d^2 \xi}{dz^2} + A_{22} \frac{d^2 \eta}{dz^2} + A_{23} \frac{d^2 \theta}{dz^2} + q_y = 0, \quad (36)$$

$$G \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} \omega'h ds + A_{13} \frac{d^2 \xi}{dz^2} + A_{23} \frac{d^2 \eta}{dz^2} + A_{33} \frac{d^2 \theta}{dz^2} + m = 0. \quad (37)$$

這便是以前得到的基本方程 (15) — (18). 不難證明從變分式 (33) 導得的邊界條件也和以前的相同。

如果桿件不預受縱向力的作用, 即 $P^0 = M_x^0 = M_y^0 = 0$, 那末係數 A_{ij} 的公式 (19) 簡化為

$$\left. \begin{aligned}
 A_{11} &= G I'_{xx}, \quad A_{22} = G I'_{yy}, \quad A_{33} = G I'_{\omega\omega} + C, \\
 A_{23} &= G I'_{y\omega}, \quad A_{13} = G I'_{x\omega}, \quad A_{12} = G I'_{xy};
 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

而同時方程 (34) — (37) 便化為普通平衡理論中的基本方程。由此可知方程 (34) — (37) 在形式上與普通平衡理論中的基本方程相同。

仿倣普通平衡問題中的 P. A. 亞達杜洛夫的方法, 我們引進一個應力位移函數 $\Phi(z, s)$ 如下:

$$w = \frac{1}{Eh} \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad (39a)$$

$$\tau_{zs} = G \left(\frac{\partial w}{\partial s} + x' \frac{d\xi}{dz} + y' \frac{d\eta}{dz} + w' \frac{d\theta}{dz} \right) = -\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (39b)$$

算式 (39) 已滿足了方程 (34). 從 (39b) 得到

$$Gh \frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - Gh \left(x' \frac{d\xi}{dz} + y' \frac{d\eta}{dz} + w' \frac{d\theta}{dz} \right). \quad (40)$$

將此代入方程 (35)–(37), 我們得到 Φ, ξ, η, θ 所適合的三個方程如下:

$$\int_0^l \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} x' ds + P^0 \frac{d^2 \xi}{dz^2} + M_x^0 \frac{d^2 \theta}{dz^2} = q_x, \quad (41)$$

$$\int_0^l \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} y' ds + P^0 \frac{d^2 \eta}{dz^2} + M_y^0 \frac{d^2 \theta}{dz^2} = q_y, \quad (42)$$

$$\int_0^l \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} w' ds + M_x^0 \frac{d^2 \xi}{dz^2} + M_y^0 \frac{d^2 \eta}{dz^2} + (\gamma P^0 + \alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C) \frac{d^2 \theta}{dz^2} = m. \quad (43)$$

其中

$$\gamma = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{F}, \quad \alpha = \frac{I_{xxy} + I_{xyy}}{I_{xx}}, \quad \beta = \frac{I_{xyy} + I_{yyx}}{I_{yy}}. \quad (44)$$

Φ, ξ, η, θ 所適合的第四個方程, 可從 (39a), (39b) 消去 w 得到:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 h \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + Gh \left(x' \frac{d\xi}{dz} + y' \frac{d\eta}{dz} + w' \frac{d\theta}{dz} \right) = 0. \quad (45)$$

其中

$$k^2 = \frac{G}{E}. \quad (46)$$

邊界條件亦可用 Φ, ξ, η, θ 來表示. 在開口截面的縱向邊緣上, $\tau_{zs} = 0$, 因而

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (47)$$

對於閉合截面桿件的週期條件顯然是

$$\Phi(z, s + l) = \Phi(z, s). \quad (48)$$

在桿件的端面上, 邊界條件 (23)–(26) 化爲

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial s} = 0, \text{ 或 } \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0, \quad (49a), (49b)$$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} x' ds + P^0 \frac{d\xi}{dz} + M_x^0 \frac{d\theta}{dz} = 0, \quad (50a)$$

$$\text{或 } \xi = 0, \quad (50b)$$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} y' ds + P^0 \frac{d\eta}{dz} + M_y^0 \frac{d\theta}{dz} = 0, \quad (51a)$$

$$\text{或 } \eta = 0, \quad (51b)$$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \omega' ds + M_x^0 \frac{d\xi}{dz} + M_y^0 \frac{d\eta}{dz} + (\gamma P^0 + \alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C) \frac{d\theta}{dz} = 0, \quad (52a)$$

$$\text{或 } \theta = 0. \quad (52b)$$

比較方程組 (15)–(18) 和 (41)–(43), (45) 以及相關的邊界條件, 可以看出通常以把 Φ, ξ, η, θ 當作基本未知函數比較方便。下面我們將討論方程組 (41)–(43), (45) 在一種常遇的邊界條件下的解法。

四. 簡支桿件的平衡問題

我們來討論一種在數學上比較簡單的問題, 即簡支桿件的平衡問題。這類桿件的兩端邊界條件為 $\sigma_x = \xi = \eta = \theta = 0$, 亦即(設 L 是桿件的長度)

$$\text{在 } z = 0 \text{ 和 } z = L \text{ 處, } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial s} = \xi = \eta = \theta = 0. \quad (53)$$

值得指出, 如果在兩個端面上 $\sigma_x = 0$, 那末爲了使桿件在空間中有確定不移的位置, 就必須同時使得在兩端面上 $\xi = \eta = \theta = 0$ 。

爲了滿足邊界條件 (53), 可將 Φ, ξ, η, θ 都展成 z 的餘弦或正弦級數如下:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s) \cos \frac{n\pi z}{L}, & \xi &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi z}{L}, \\ \eta &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi z}{L}, & \theta &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi z}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

其中 $\phi_n(s)$ 只是 s 的函數, 而 A_n, B_n, C_n 是常數。將此算式代入方程 (41)–(43), (45), 我們得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left\{ \frac{n\pi}{L} \int_0^l \phi_n(s) x' ds - P^0 A_n - M_x^0 C_n \right\} \sin \frac{n\pi z}{L} = q_x, \quad (55)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left\{ \frac{n\pi}{L} \int_0^l \phi_n(s) y' ds - P^0 B_n - M_y^0 C_n \right\} \sin \frac{n\pi z}{L} = q_y, \quad (56)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left\{ \frac{n\pi}{L} \int_0^l \phi_n(s) \omega' ds - M_x^0 A_n - M_y^0 B_n - (\gamma P^0 + \alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C) C_n \right\} \sin \frac{n\pi z}{L} = m, \quad (57)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\phi_n + \frac{k^2 L^2}{n^2 \pi^2} h \frac{d}{ds} \frac{1}{h} \frac{d\phi_n}{ds} + \frac{GL}{n\pi} h(x' A_n + y' B_n + \omega' C_n) \right\} \cos \frac{n\pi z}{L} = 0. \quad (58)$$

今將外載荷亦展成 z 的正弦級數：

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \sum_{n=1}^{\infty} q_{xn} \sin \frac{n\pi z}{L}, \\ q_y &= \sum_{n=1}^{\infty} q_{yn} \sin \frac{n\pi z}{L}, \\ m &= \sum_{n=1}^{\infty} m_n \sin \frac{n\pi z}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

將此代入方程 (55)–(58)，然後比較同類項的係數，我們得到有關 ϕ_n , A_n , B_n , C_n 的四個方程如下：

$$\frac{n\pi}{L} \int_0^l \phi_n x' ds - P^0 A_n - M_x^0 C_n = \frac{L^2 q_{xn}}{n^2 \pi^2}, \quad (60)$$

$$\frac{n\pi}{L} \int_0^l \phi_n y' ds - P^0 B_n - M_y^0 C_n = \frac{L^2 q_{yn}}{n^2 \pi^2}, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi}{L} \int_0^l \phi_n \omega' ds - M_x^0 A_n - M_y^0 B_n - (\gamma P^0 + \alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C) C_n &= \\ &= \frac{L^2 m_n}{n^2 \pi^2}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\frac{k^2 L^2}{n^2 \pi^2} h \frac{d}{ds} \frac{1}{h} \frac{d\phi_n}{ds} - \phi_n + \frac{GL}{n\pi} h(x' A_n + y' B_n + \omega' C_n) = 0. \quad (63)$$

爲了將 ϕ_n 用 A_n , B_n , C_n 表示出來，設 $X_n(s)$, $Y_n(s)$, $\Omega_n(s)$ 是方程

$$\frac{k^2 L^2}{n^2 \pi^2} h \frac{d}{ds} \frac{1}{h} \frac{dX_n}{ds} - X_n + \frac{GL}{n\pi} h x' = 0, \quad (64)$$

$$\frac{k^2 L^2}{n^2 \pi^2} h \frac{d}{ds} \frac{1}{h} \frac{dY_n}{ds} - Y_n + \frac{GL}{n\pi} h y' = 0, \quad (65)$$

$$\frac{k^2 L^2}{n^2 \pi^2} h \frac{d}{ds} \frac{1}{h} \frac{dQ_n}{ds} - Q_n + \frac{GL}{n\pi} h \omega' = 0 \quad (66)$$

的解，並且對於開口截面的桿件適合縱向邊緣上的邊界條件

$$X_n(0) = X_n(l) = 0, \quad Y_n(0) = Y_n(l) = 0, \quad Q_n(0) = Q_n(l) = 0; \quad (67)$$

而對於閉合截面適合週期條件

$$X_n(s+l) = X_n(s), \quad Y_n(s+l) = Y_n(s), \quad Q_n(s+l) = Q_n(s). \quad (68)$$

這樣從方程 (63) 便可得到

$$\phi_n(s) = A_n X_n(s) + B_n Y_n(s) + C_n Q_n(s). \quad (69)$$

從方程 (64)–(66) 和邊界條件 (67) 或 (68) 不難證明

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l x' Y_n ds &= \int_0^l y' X_n ds, \\ \int_0^l x' Q_n ds &= \int_0^l \omega' X_n ds, \\ \int_0^l y' Q_n ds &= \int_0^l \omega' Y_n ds. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

因此將算式 (69) 代入方程 (60)–(62)，並命

$$\left. \begin{aligned} e_n^{11} &= \frac{n\pi}{L} \int_0^l x' X_n ds, & e_n^{22} &= \frac{n\pi}{L} \int_0^l y' Y_n ds, & e_n^{33} &= \frac{n\pi}{L} \int_0^l \omega' Q_n ds, \\ e_n^{12} &= \frac{n\pi}{L} \int_0^l x' Y_n ds, & e_n^{23} &= \frac{n\pi}{L} \int_0^l y' Q_n ds, & e_n^{13} &= \frac{n\pi}{L} \int_0^l x' Q_n ds. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

我們便得到決定 A_n, B_n, C_n 的聯立代數方程如下：

$$(e_n^{11} - P^0) A_n + e_n^{12} B_n + (e_n^{13} - M_x^0) C_n = \frac{L^2 q_{xn}}{n^2 \pi^2}, \quad (72)$$

$$e_n^{12} A_n + (e_n^{22} - P^0) B_n + (e_n^{23} - M_y^0) C_n = \frac{L^2 q_{yn}}{n^2 \pi^2}, \quad (73)$$

$$(e_n^{13} - M_x^0) A_n + (e_n^{23} - M_y^0) B_n + [e_n^{33} - (\gamma P^0 + \alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C)] C_n = \frac{L^2 m_n}{n^2 \pi^2}. \quad (74)$$

設上列聯立方程的係數的行列式為

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} e_n^{11} - P^0, & e_n^{12}, & e_n^{13} - M_x^0, \\ e_n^{12}, & e_n^{22} - P^0, & e_n^{23} - M_y^0, \\ e_n^{13} - M_x^0, & e_n^{23} - M_y^0, & e_n^{33} - (\gamma P^0 + \alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C) \end{vmatrix}. \quad (75)$$

如果 $\Delta_n \neq 0$, 那末從方程 (72)–(74) 便可解得 A_n, B_n, C_n . 將這些解得

的數值代入算式 (69) 和 (54), 便得所需的解答.

如果 $\Delta_n = 0$, 那末一般便無解答存在, 這就是說桿件已失去了穩定. 因此穩定問題的特徵方程為

$$\Delta_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (76)$$

簡支桿件的穩定問題將在下一節作進一步的討論.

例如我們來考慮一個矩形閉合截面桿件的問題如圖 4 所示. 取 A 點為計算 s 的起點並以逆時針方向為正, 於是得到 x', y', ω' 的分佈圖如圖 5 所示. 設壁厚 h 為一常數, 於是方程 (64)–(66) 簡化為:

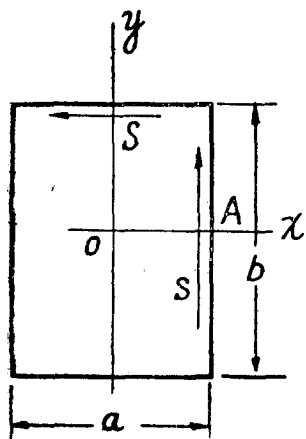


圖 4.

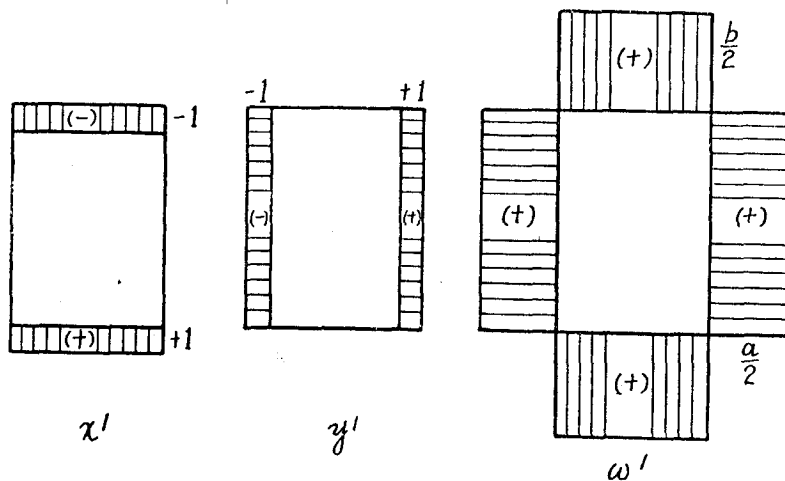


圖 5.

$$\left. \begin{aligned} \frac{k^2 L^2}{n^2 \pi^2} \frac{d^2 X_n}{ds^2} - X_n + \frac{GL}{n\pi} h x' &= 0, \\ \frac{k^2 L^2}{n^2 \pi^2} \frac{d^2 Y_n}{ds^2} - Y_n + \frac{GL}{n\pi} h y' &= 0, \\ \frac{k^2 L^2}{n^2 \pi^2} \frac{d^2 \Omega_n}{ds^2} - \Omega_n + \frac{GL}{n\pi} h \omega' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

不難證明方程 (77) 在週期條件 (68) 下的解是：

$$X_n(s) = \frac{\kappa h E}{2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_n l}{2}} \int_0^l x'(t) \operatorname{ch} \lambda_n \left(s + \frac{l}{2} - t \right) dt - \kappa h E \int_0^t x'(t) \operatorname{sh} \lambda_n (s - t) dt. \quad (78)$$

其中

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\kappa L}. \quad (79)$$

關於 Y_n 或 Ω_n 的公式可用 y' 或 ω' 代替 (78) 式中的 x' 而得到。對於所考慮的矩形截面場合, 公式 (78) 給出：

$$\text{在 } -\frac{b}{2} \leq s \leq \frac{b}{2} \text{ 時,}$$

$$\left. \begin{aligned} X_n &= 0, \\ Y_n &= -\frac{\kappa h E}{\lambda_n} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_n b}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_n (a+b)}{2}} \operatorname{sh} \lambda_n \left(s + \frac{a+b}{2} \right) + 1 - \operatorname{ch} \lambda_n \left(s + \frac{b}{2} \right) \right\}, \\ \Omega_n &= \frac{\kappa h E}{\lambda_n} \left\{ \frac{a \operatorname{ch} \lambda_n \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4} \right) \operatorname{sh} \frac{\lambda_n b}{4} + \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_n a}{2}}{\operatorname{sh} \lambda_n \frac{a+b}{2}} \operatorname{ch} \lambda_n s + \frac{a}{2} (1 - \operatorname{ch} \lambda_n s) \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (80a)$$

$$\text{當 } \frac{b}{2} \leq s \leq \frac{b}{2} + a \text{ 時,}$$

$$\left. \begin{aligned} X_n &= -\frac{\kappa h E}{\lambda_n} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_n a}{2}}{\operatorname{ch} \lambda_n \frac{a+b}{2}} \operatorname{sh} \lambda_n s + 1 - \operatorname{ch} \lambda_n \left(s - \frac{b}{2} \right) \right\}, \\ Y_n &= 0, \\ \Omega_n &= \frac{\kappa h E}{\lambda_n} \left\{ \frac{a \operatorname{ch} \lambda_n \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4} \right) \operatorname{sh} \frac{\lambda_n b}{4} + \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_n a}{2}}{\operatorname{sh} \lambda_n \frac{a+b}{2}} \operatorname{ch} \lambda_n s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a-b}{2} \operatorname{ch} \lambda_n \left(s - \frac{b}{2} \right) + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \operatorname{ch} \lambda_n s \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (80b)$$

有了 X_n , Y_n , Ω_n 便可根據公式 (71) 計算 e_n^{11} , e_n^{12} , $\dots$ 。這裏我們可注意到由於截面對 x 軸和 y 軸是對稱的, 因而

$$e_n^{12} = e_n^{13} = e_n^{23} = 0, \quad (81a)$$

而在計算 e_n^{11} , e_n^{22} , e_n^{33} 時實際上也只需要計算四分之一週長。這就使我們的計算簡化許多。最後的結果是：

$$\left. \begin{aligned} e_n^{11} &= \frac{4hG}{\lambda_n} \left\{ \frac{\lambda_n a}{2} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_n a}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_n b}{2}}{\operatorname{ch} \lambda_n \frac{a+b}{2}} \right\}, \\ e_n^{22} &= \frac{4hG}{\lambda_n} \left\{ \frac{\lambda_n b}{2} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_n b}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_n a}{2}}{\operatorname{ch} \lambda_n \frac{a+b}{2}} \right\}, \\ e_n^{33} &= \frac{hG}{\lambda_n} \left\{ \frac{\lambda_n ab(a+b)}{2} - (a-b)^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_n a}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_n b}{2}}{\operatorname{sh} \lambda_n \frac{a+b}{2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (81b)$$

這樣，在指定外界分佈載荷之後，便可從方程 (72)–(74) 求得 A_n , B_n , C_n 。

五. 簡支桿件的穩定問題

上節說明的方法還可應用於討論簡支桿件的穩定問題。如果桿件以 n 個半波形式失去穩定，那末根據上節的結果， ξ , η , θ , Φ 可表示為

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A_n \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad \eta = B_n \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad \theta = C_n \sin \frac{n\pi z}{L}, \\ \Phi &= \left\{ A_n X_n(s) + B_n Y_n(s) + C_n Q_n(s) \right\} \cos \frac{n\pi z}{L}, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

其中函數 X_n , Y_n , Q_n 仍由方程 (64)–(66) 規定，而常數 A_n , B_n , C_n 由下列聯立方程決定：

$$\left. \begin{aligned} (e_n^{11} - P^0) A_n + e_n^{12} B_n + (e_n^{13} - M_x^0) C_n &= 0, \\ e_n^{12} A_n + (e_n^{22} - P^0) B_n + (e_n^{23} - M_y^0) C_n &= 0, \\ (e_n^{13} - M_x^0) A_n + (e_n^{23} - M_y^0) B_n + [e_n^{33} - (\gamma P^0 + \alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C)] C_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

如果這組方程有不全為零的解存在，那末係數的行列式必為零，即

$$\begin{aligned} & (e_n^{11} - P^0)(e_n^{22} - P^0)[e_n^{33} - (\gamma P^0 + \alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C)] + 2e_n^{12}(e_n^{23} - M_y^0)(e_n^{13} - M_x^0) - \\ & - (e_n^{11} - P^0)(e_n^{23} - M_y^0)^2 - (e_n^{22} - P^0)(e_n^{13} - M_x^0)^2 - \\ & - e_n^{12} e_n^{12} [e_n^{33} - (\gamma P^0 + \alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C)] = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

對應於任一組適合方程 (84) 的 P^0 , M_x^0 , M_y^0 ，都有一種可能的使桿件失穩

定的形式，而兩個方向的撓度與扭轉角大小之比（即 A_n, B_n, C_n 之比）可由方程（83）決定。

下列數種特殊情況值得特別提出：

1. 如果 $P^0 = 0$ ，那末特徵方程（84）化爲

$$e_n^{11} e_n^{22} [e_n^{33} - (\alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C)] + 2e_n^{12} (e_n^{23} - M_y^0) (e_n^{13} - M_x^0) - e_n^{11} (e_n^{23} - M_y^0)^2 - e_n^{22} (e_n^{13} - M_x^0)^2 - e_n^{12} e_n^{12} [e_n^{33} - (\alpha M_y^0 - \beta M_x^0 - C)] = 0,$$

整理後得

$$e_n^{22} M_x^{02} + e_n^{11} M_y^{02} - 2e_n^{12} M_x^0 M_y^0 - M_x^0 [2e_n^{22} e_n^{13} - 2e_n^{12} e_n^{23} + \beta(e_n^{11} e_n^{22} - e_n^{12} e_n^{12})] - M_y^0 [2e_n^{11} e_n^{23} - 2e_n^{12} e_n^{13} - \alpha(e_n^{11} e_n^{22} - e_n^{12} e_n^{12})] + e_n^{11} e_n^{23} e_n^{23} + e_n^{22} e_n^{13} e_n^{13} - 2e_n^{12} e_n^{23} e_n^{13} - (e_n^{33} + C)(e_n^{11} e_n^{22} - e_n^{12} e_n^{12}) = 0. \quad (85)$$

在 M_x^0, M_y^0 平面上，特徵方程（85）代表一個橢圓。

2. 如果 $P^0 \neq 0$ ，那末我們可設

$$M_x^0 = -P^0 a_y, \quad M_y^0 = P^0 a_x, \quad (86)$$

a_x, a_y 代表 P^0, M_x^0, M_y^0 的合力的作用點的坐標。將（86）式代入（84）式，得到

$$(e_n^{11} - P^0)(e_n^{22} - P^0)[e_n^{33} + C - P^0(\gamma + \alpha a_x + \beta a_y)] + 2e_n^{12}(e_n^{23} - a_x P^0)(e_n^{13} + a_y P^0) - (e_n^{11} - P^0)(e_n^{23} - a_x P^0)^2 - (e_n^{22} - P^0)(e_n^{13} + a_y P^0)^2 - e_n^{12} e_n^{12} [e_n^{33} + C - P^0(\gamma + \alpha a_x + \beta a_y)] = 0. \quad (87)$$

指定 a_x, a_y 的數值後，特徵方程（87）變爲 P^0 的一個三次方程。因此一般有三個臨界值，這和 B. 3. 符拉索夫的理論相同。

B. 3. 符拉索夫的理論證明當合力的作用點落在“拉伸穩定圓”圓外時，拉伸亦能使桿件失去穩定。根據我們的理論可得到完全相同的結果，這表明 B. 3. 符拉索夫的這一結論，事實上並不依靠中曲面無剪應變這一假設。在特徵方程（87）中令 $P^0 = -\infty$ ，我們得到 a_x, a_y 應滿足的關係如下：

$$a_x^2 + a_y^2 - \alpha a_x - \beta a_y - \gamma = 0. \quad (88)$$

這個方程與 B. 3. 符拉索夫得到的方程相同。

六．能化爲簡支桿件的支承情況

上面我們討論了簡支桿件的平衡與穩定問題的解法。還有兩類支承狀況的桿件可化爲簡支桿件，因而亦可應用上面說明的方法。

1. 一端懸空一端固定的桿件 考慮一個一端 A 懸空另一端 B 固定的桿件 AB 如圖 6a 所示. 在懸空端 A , 邊界條件為 $\sigma_z = Q_x = Q_y = M_z = 0$; 在固定端 B , 邊界條件為 $w = \xi = \eta = \theta = 0$. 這類桿件可化為一個相當的簡支桿件 ABC 如圖 6b 所示. AC 的長度為 $2L$, 在 AB 上的載荷與原有桿件的載荷相同, 而 BC 上的載荷使得載荷對 B 點對稱, 同時在 B 點又有集中的橫載荷 $2Q_{xB}$,

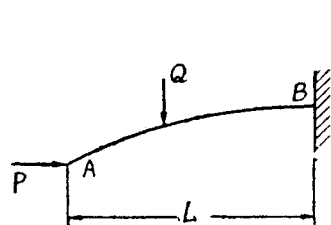


圖 6a.

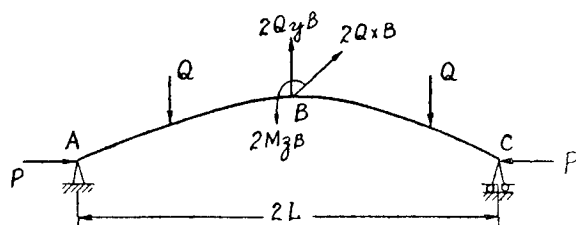


圖 6b.

$2Q_{yB}$ 和集中的扭載荷 $2M_{zB}$, 其中 Q_{xB} , Q_{yB} , M_{zB} 便是原有桿件在 B 端的反力. 由於在 ABC 上的載荷組成自相平衡的力系, 因而在 A , C 兩端都沒有反力, 實際上它們是懸空的. 同時由於對稱關係易知在截面 B 上 $w = 0$. 由此可知, 圖 6a 中的桿件 AB 與圖 6b 中桿件 ABC 的一部分 AB 除了相差一個常數的撓度與扭轉角外, 其他完全相同.

2. 一端簡支一端固定的桿件 利用與上面相同的對稱化法, 這類桿件亦可化為相當的簡支桿件, 如圖 7 所示. 不過在這個問題中, 在 B 端的反力 Q_{xB} , Q_{yB} , M_{zB} 不是預先知道的, 而是從在 B 點的三個條件 $\xi = \eta = \theta = 0$ 來決定.

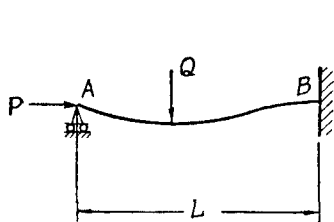


圖 7a.

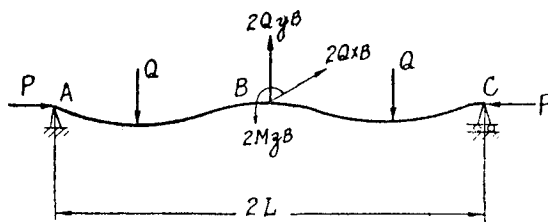


圖 7b.

參 考 文 獻

- [1] Wagner, H., Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Festschrift 25-Jahre Technische Hochschule, 1929.
- [2] Власов, В. З., Тонкостенные упругие стержни. Гостройиздат, 1940.
- [3] В. З. 符拉索夫, 材料力學、結構力學與彈性力學中的若干問題. 科學譯叢, 理論及應用力學第 4 種. 中國科學院出版, 1954 年.
- [4] Джанелидзе, Г. Ю. и Пановко, Я. Г., Статика упругих тонкостенных стержней. Гостехиздат, 1948.
- Г. Ю. 詹涅里傑和 Я. Г. 巴諾夫柯, 彈性薄壁桿件的靜力學. 理論及應用力學譯叢, 科學出版社出版, 1955 年.
- [5] Уманский, А. А., Изгиб и кручение тонкостенных авиаконструкций. Оборонгиз, 1939.
- [6] —————, О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета. *Техника воздушного флота*, No. 12, 1940.
- [7] v. Kármán, Th. and Chien Wei-zang (錢偉長), Torsion with variable twist. *J. Aero. Sci.*, **15** (1946), 503-511.
- [8] Ададуров, Р. А., Напряжения и деформации в цилиндрической оболочке с жесткими поперечным сечениями. *ДАН СССР*, **62** (1948), 183-186.

ON THE EQUILIBRIUM AND STABILITY OF ELASTIC THIN-WALLED CYLINDERS

HU HAI-CHANG and SHI PO-MING

(Institute of Mathematics, Academia Sinica) (Tsinghua University)

ABSTRACT

In this paper a theory of equilibrium and stability of elastic thin-walled cylinders is proposed. The theory is based on the following assumptions: 1) The cross section of the cylinder is undeformable, 2) The cylinder is under a system of initial stresses

$$\sigma_z^0 = -\frac{P^0}{F} - \frac{M_y^0}{I_{xx}}x + \frac{M_x^0}{I_{yy}}y.$$

This theory may be regarded as a generalization of V. Z. Vlasoff's theory of stability of thin-walled rods^[2], and includes the theory of Karman-Chien^[7] and Adaduroff^[8] as a special case. For cases of simply supported cylinders and cantilever cylinders, a method of solution using trigonometric series is proposed which is much simpler than the methods used by Karman-Chien and Adaduroff.

