

雙力程核子力的討論*

周 光 召

(北京大學物理系)

在本文中我們採用雙力程位能,計算了 ^2H , ^3H , ^3He , ^4He 諸原子核的結合能,以及中子對低能質子的散射. §1 和 §2 討論只有中心力的情況, §3 和 §4 中則考慮了張量力的作用. 主要的結果分別在各節中加以討論.

§1. 中心力——氦核結合能及中子對質子散射的問題

張繼恆和彭桓武曾提出了雙力程位能的假設^[1], 用來計算 ^2H , ^3H , ^3He 及 ^4He 諸核的結合能. 其結果表明在核心附近有排斥力出現. 但這一工作沒有考慮核子間散射的現象.

在本節中我們採用這一假定. 此時 j 與 k 兩核子間的位能可以表成如下的形式:

$$V_{jk} = G_1 \frac{e^{-\lambda_1 r_{jk}}}{r_{jk}} + G_2 \frac{e^{-\lambda_2 r_{jk}}}{r_{jk}}, \quad r_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|; \quad (1)$$

其作用力程 λ 與介子靜止質量 μ 具有關係:

$$\hbar\lambda_1 = \mu_1 c, \quad \hbar\lambda_2 = \mu_2 c, \quad \xi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (2)$$

我們取 $\mu_1 = m_\pi = 270 m_e$, $\xi = 2$ 或 4 (位能的這一部分可能是由於 ζ 介子 ($\xi = 2$) 或 κ 介子 ($\xi = 4$) 的作用, 也可能是由於 π 介子位能的高級近似項^[2]). G_1 和 G_2 標誌着位能的強度. 它們在自旋三重態和獨態上具有不同的數值, 必要時我們將分別在 G 的左上角加字母 3 或 1 以示區別.

根據有效力程的理論, 低能核子散射及氦核結合能的實驗數據, 完全由自旋三重態及獨態上的散射長度 a 和有效力程 r_e 反映出來. 這四個參數的實驗值是:

*北京大學研究生畢業論文. 本報於 1954 年 12 月 1 日收到.

$$^3a = -53.8 \pm 0.04 \times 10^{-13} \text{ 厘米},$$

$$^3r_e = 1.71 \pm 0.04 \times 10^{-13} \text{ 厘米},$$

$$^1a = 23.68 \pm 0.06 \times 10^{-13} \text{ 厘米},$$

$$^1r_e = 2.65 \pm 0.07 \times 10^{-13} \text{ 厘米}.$$

這四個參數只同在能量 $E = 0$ 時的 S 態波函數有關；它們可以用來確定位能強度參數 G 。

在二核子運動的質心坐標系中， S 態波函數可以表成：

$$\psi_s = \frac{1}{r} u(r) \chi; \quad (3)$$

其中 r 為相對坐標， χ 為自旋及同位旋波函數，選擇得適合反對稱的要求。當 $E = 0$ 時， $u(r)$ 適合邊界條件：

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= 0, \\ u(r) &= 1 - \frac{r}{a} \quad \text{當 } r \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 a 是散射長度。 $u(r)$ 並且和有效力程 r_e 具有關係

$$r_e = 2 \int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{r}{a} \right)^2 - u^2(r) \right] dr. \quad (5)$$

我們運用 Hulthén 變分法^[3] 來確定位能強度參數。考慮汎函

$$\left. \begin{aligned} I[u] &= \int_0^\infty u \left[\frac{d^2 u}{dr^2} - v(r) u \right] dr, \\ \delta I &= 2 \int_0^\infty \delta u \left[\frac{d^2 u}{dr^2} - v(r) u \right] dr + \left(\delta u \frac{du}{dr} - u \frac{d\delta u}{dr} \right) \Big|_0^\infty, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

可以看到，如果變分波函數具有和 (4) 式相同的邊界條件，則汎函 I 穩定的條件和 u 適合波動方程

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - v(r) u = 0 \quad (7)$$

的條件相當。我們選擇了下列的變分波函數：

$$u(r) = 1 - \frac{r}{a} - e^{-\beta r},$$

其中 β 為變分參數；如已知位能強度參數 G_1 及 G_2 之值，則上述變分法可以用來確定 a 和 r_e 。現在我們的問題恰好相反，要從實驗值 a 和 r_e 中定出 G_1 和

G_2 來。此時我們只需將這一步驟倒過來，取 a 等於實驗值，解式 (5) 得到 β 的值，再代入方程組 $I = 0$ 及 $\frac{\partial I}{\partial \beta} = 0$ 中便可以求出 G_1 和 G_2 來了。

採用 $1/\lambda_1 = 1.429 \times 10^{-13}$ 厘米作為長度單位， $\frac{\hbar^2 \lambda_1^2}{M} = 20.275$ 兆電子伏作為能量單位，得到表 1 的結果。

表 1. 中心力的位能強度參數

	自旋三重態		自旋獨態	
	$\xi = 2$	$\xi = 4$	$\xi = 2$	$\xi = 4$
G_1	-2.3167	-2.3574	-1.2485	-1.4000
G_2	-0.1704	-0.1878	-0.6792	-0.8981
ϵ_1	1.006	1.007	1.033	1.064
ϵ_2	0.979	0.977	1.027	1.036
β	2.0714	2.0714	1.6961	1.6961

表 1 中 ϵ_1 和 ϵ_2 分別代表 Hulthén 第一及第二恆等式左右兩端的比值。在絕對正確的解答中它們應等於 1。它們離開 1 的程度可用來判斷所取變分波函數的近似程度，在我們的計算中，由 ϵ_1 和 ϵ_2 的值判斷所得位能強度參數的誤差不超過 5%。

由 G_1 和 G_2 的符號表現出來，核子力中並無排斥力出現。進一步計算表明，加入排斥力後，外面吸引力的力程需要縮短很多（加入一個 0.5×10^{-13} 厘米半徑的排斥心將使外面吸引力力程縮短幾近一半）。因此如果將核子力限制為中心力，並以 π 介子作為核子力的主要參與者時，核心附近並無排斥力出現。

採用位能

$$V(r) = G_1 \frac{e^{-\lambda_1 r}}{1 - e^{-\lambda_1 r}} + G_2 \left(\frac{e^{-\lambda_1 r}}{1 - e^{-\lambda_1 r}} \right)^2,$$

我們可以用解析方法求出完全正確的解答。用來適合低能核子散射及氘核結合能數據時，也得到了核子力中無排斥力的結果。

可以看到，由於排斥力不出現，得到的雙力程位能在性質上與一般採用的單力程位能相近。它們之間只有形狀上的細微差別。

我們運用這一位能，討論了中子對高能質子散射的 S 態相角移動。採用方法為 Hulthén 的第二變分法^[4]。計算結果見表 2：

表 2. 中子對高能質子散射的 S 態相角移動

E (兆電子伏)	自旋三重態		自旋獨態		$\frac{3}{4} \sin^2 \delta + \frac{1}{4} \sin^2 \delta$	
	$\cot \delta$	$\sin^2 \delta$	$\cot \delta$	$\sin^2 \delta$	理論值	實驗值
40	0.209	0.958	0.873	0.567	0.860	0.76 ± 0.11 0.67 ± 0.11
90	0.423	0.848	1.041	0.480	0.756	0.68 ± 0.08

可以看到,理論值在實驗值邊緣上. 這和克利斯琴和哈特^[5]用單力程介子型位能所得結果相似. 表明由於採用雙力程位能而引起的位能形狀的細微改變對高能散射影響不大.

§2. 中心力—— ^3H , ^3He 及 ^4He 核的結合能

我們運用上節得到的位能來計算 ^3H , ^3He 及 ^4He 核的結合能, 以繼續探討位能形狀的細微改變所引起的影響.

計算中採用變分法, 其近似的程度取決於波函數選擇的好壞. 因而我們有必要先對波函數的普遍形式加以討論.

根據羣的表示理論, ^3H 核的波函數可以表成為三元排列羣表示基矢的疊加. 這種基矢分為下列三類:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^s(123) &= \sum_P P\varphi(123), \\ \varphi^a(123) &= \sum_P (-1)^P P\varphi(123), \\ \left\{ \begin{aligned} \bar{\varphi}(123) &= \frac{1}{\sqrt{6}} [2\varphi(\overline{12}3) - \varphi(2\overline{3}1) - \varphi(3\overline{1}2)], \\ \bar{\varphi}(123) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi(\overline{23}1) - \varphi(\overline{31}2)]; \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中的求和是對所有六個排列算符 P 求的. $\varphi(\overline{12}3) = \varphi(123) + \varphi(213)$ 為對坐標 1 及 2 對稱的函數. 這三類基矢分別為三元排列羣的全對稱表示、全反對稱表示及二度表示的基矢.

在 ^3H 核的基態上, 我們有下列的運動常數:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{角動量} & L^2 = 0, \\ \text{自旋} & S^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2, \\ \text{同位旋} & \tau^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right), \quad \tau_z = -\frac{1}{2}; \end{array} \right\} \quad (9)$$

此時共有兩個相互獨立的自旋波函數及兩個相互獨立的同位旋波函數。它們都是三元排列羣二度表示的基矢，將 (8) 式中之 $\varphi(\overline{12} 3)$ 分別代以 $\alpha(1)\alpha(2)\beta(3)$ 及 $N(1)N(2)P(3)$ 即可得到，分別用符號 $\bar{S}$, $\tilde{S}$, $\bar{\tau}$ 及 $\tilde{\tau}$ 表之。在自旋同位旋的直乘積空間中，可以用表示理論中的約化手續得到以下四個 ${}^3\text{H}$ 核基態上的自旋同位旋波函數：

$$\left. \begin{array}{l} \chi^a = \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{S}\tilde{\tau} - \tilde{S}\bar{\tau}], \\ \chi^s = \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{S}\tilde{\tau} + \tilde{S}\bar{\tau}], \\ \bar{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{S}\bar{\tau} - \tilde{S}\tilde{\tau}], \\ \tilde{\chi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{S}\bar{\tau} + \bar{S}\tilde{\tau}]. \end{array} \right\} \quad (10)$$

利用同樣約化的手續，可以得到 ${}^3\text{H}$ 核基態上全反對稱波函數的普遍形式：

$$\psi = \varphi' \chi^a + \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{\varphi} \tilde{\chi} - \tilde{\varphi} \bar{\chi}] + \varphi^a \chi^s, \quad (11)$$

其中 φ 僅是空間坐標的函數。

如暫時不計庫倫力這一小的改正， ${}^3\text{He}$ 核基態上的波函數亦具有 (11) 式的形式。

如不計庫倫力， ${}^4\text{He}$ 核基態上的運動常數 L^2 , S^2 , τ^2 及 τ_z 均為零。全反對稱波函數亦具有 (11) 的形式。但需將 φ' 及 φ^a 了解為對四個核子坐標全對稱及全反對稱。並把 (8) 式中 $\varphi(\overline{12} 3)$ 換成 $\varphi(\overline{12} \overline{34})$ ，即對核子 1 2 及 3 4 為對稱，又對同時交換一對核子 1 2 及 3 4 為對稱的函數。 $\bar{S}$, $\tilde{S}$, $\bar{\tau}$, $\tilde{\tau}$ 以及由它們組成的 χ^s , χ^a , $\bar{\chi}$ 及 $\tilde{\chi}$ 亦有了相應的變化。

作為第一步近似，我們只取 (11) 式中的第一項 $\varphi' \chi^a$ 。對 ${}^3\text{H}$ 及 ${}^3\text{He}$ 核，我們取以下的兩種 φ' 作為變分波函數：

$$\varphi'_1 = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} a \rho\right), \quad \rho^a = \frac{1}{6} \sum_{i \neq j=1}^3 |r_i - r_j|^2. \quad (12a)$$

$$\varphi'_2 = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(r_{12} + r_{23} + r_{31})\right). \quad (12b)$$

這兩種不同的形式為不同的工作者所採用^[6]，我們同時計算了這兩種情況以比較其好壞。對 ${}^4\text{He}$ 核則取下列之 φ' ：

$$\varphi' = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}a\rho\right), \quad \rho^2 = \frac{1}{8} \sum_{i \neq j=1}^4 |x_i - x_j|^2. \quad (13)$$

變分法可以表為

$$E = \frac{\int \psi^* H \psi dV}{\int \psi^* \psi dV}, \quad \delta E = 0; \quad (14)$$

其中

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 + \sum_{i < j} V_{ij}.$$

採用 $1/\lambda_1$ 作為長度單位， $\frac{\hbar^2 \lambda_1^2}{M}$ 為能量單位，並假定核子力具有對稱的性質*，即可得到：

I. ${}^3\text{H}$ 核

1) φ_1 的情形

$$E = \frac{1}{4}a^2 - pF_3(a) - \xi q F_3(a/\xi), \quad (15a)$$

其中
$$p = -\frac{1}{2}({}^3G_1 + {}^1G_1), \quad q = -\frac{1}{2}({}^3G_2 + {}^1G_2), \quad (16)$$

$$F_3(a) = \frac{2}{5\pi} \frac{a^3}{(a^2-1)^3} \left[8a^4 + 9a^2 - 2 - 30 \frac{a^4}{\sqrt{a^2-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \right]; \quad (17a)$$

2) φ_2 的情形

$$E = \frac{15}{14}a^2 - p H_3(a) - \xi q H_3(a/\xi), \quad (15b)$$

其中
$$H_3(a) = \frac{3}{14} \frac{(2a)^5}{(2a+1)^2} \left[\frac{2}{(2a)^2} + \frac{2}{(2a)(2a+1)} + \frac{1}{(2a+1)^2} \right]. \quad (17b)$$

II. ${}^3\text{He}$ 核 和 ${}^3\text{H}$ 核一樣，但要加上庫倫能的改正項 E_c 。

1) φ_1' 的情形

$$E_c = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{M}{\mu} \frac{16}{15\pi} a;$$

2) φ_2' 的情形

$$E_c = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{M}{\mu} \frac{5}{7} a.$$

III. ${}^4\text{He}$ 核

* V_{ik} 的普遍形式見 (26) 式中的中心力部分。

$$E = \frac{1}{4} a^2 - p F_4(a) - \xi q F_4(a/\xi) + E_c, \quad (15c)$$

$$\text{其中} \quad F_4(a) = \frac{105}{64} \frac{a^3}{(1+a)^5} \left(a^3 + \frac{47}{35} a^2 + \frac{5}{7} a + \frac{1}{7} \right), \quad (17c)$$

$$E_c = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{M}{\mu} \frac{35}{128} a.$$

計算結果見表 3.

表 3. ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ 及 ${}^4\text{He}$ 諸核之結合能 (單位:兆電子伏)

原子核	波函數	$\xi=2$ 的情形			實驗值	$\xi=4$ 的情形		
		a 或 α	$-E$	結合能		a 或 α	$-E$	結合能
${}^3\text{H}$	φ_1'	3.27	0.433	8.78	8.492	3.25	0.415	8.41
	φ_2'	1.60	0.568	11.52	8.492	1.62	0.557	11.29
${}^3\text{He}$	φ_1'	3.20	0.378	7.66	7.728	3.20	0.360	7.30
	φ_2'	1.60	0.511	10.36	7.728	1.62	0.500	10.14
${}^4\text{He}$	φ	5.97	2.54	51.5	28.298	5.97	2.50	50.7

從表 3 結果中可以看到,計算的結合能較實驗值為大. 且不論 $\xi=2$ 及 $\xi=4$ 的情形都得到差不多大的結果. 這個事實表明,位能形狀的這種改變,對 ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ 及 ${}^4\text{He}$ 核的結合能不發生很大的影響,而我們又回到用單力程位能所遇到的困難.

其次可以看到, φ_2' 所給出的 ${}^3\text{H}$ 核結合能低於 φ_1' 所給出的值,兩者相差達 20—30% 之多,說明波函數選擇的好壞對於計算結果有着甚大的影響. 在 ${}^4\text{He}$ 核結合能的計算中,由於積分的困難,尚且無法採用類似 φ_2' 之波函數;可以設想,波函數的這種修改對 ${}^4\text{He}$ 核的結合能也可能有很大的影響.

為了繼續探尋波函數的好壞,我們在 ${}^3\text{H}$ 核問題上考慮了下列變分波函數:

$$\psi = \varphi' \chi^a + \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{\varphi} \tilde{\chi} - \tilde{\varphi} \bar{\chi}];$$

$$\text{其中} \quad \varphi' = \exp \left[-\frac{\alpha}{2} (r_{12} + r_{23} + r_{31}) \right],$$

$$\varphi(123) = C r_{12} \exp \left[-\frac{\beta}{2} (r_{12} + r_{23} + r_{31}) \right],$$

α , β 及 C 均為變分參數. 計算結果表明,在 $\xi=2$ 的情形,結合能的改正 $\Delta E=$

-0.36 兆電子伏,約為單取 $\varphi'\chi^a$ 作為變分波函數時所得的結合能值的 3%。因此可以認為波函數的這種修改確實不太重要。

§3. 張量力——氦核的結構及中子對低能質子的散射

前二節的計算表明,僅有中心力的雙力程位能不足以解釋核子散射及結合能的現象。我們必須修改所用位能來消除這一困難。在本節及下節中我們在核子力中加入張量力,此時 i 與 k 核子間的位能具有下面的形式:

$$V_{jk} = G_1 \frac{e^{-\lambda_1 r_{jk}}}{r_{jk}} + G_2 \frac{e^{-\lambda_2 r_{jk}}}{r_{jk}} + G_T S_{jk} [F_{jk}(\lambda_1) - \xi^2 F_{jk}(\lambda_2)]; \quad (18)$$

$$\text{其中} \quad S_{jk} = 3 \frac{(\sigma_j \cdot r_{jk})(\sigma_k \cdot r_{jk})}{r_{jk}^2} - \sigma_j \cdot \sigma_k, \quad (18a)$$

$$F_{jk}(\lambda) = \left(\frac{1}{r_{jk}} + \frac{3}{\lambda r_{jk}^2} + \frac{3}{\lambda^2 r_{jk}^3} \right) e^{-\lambda r_{jk}}, \quad (18b)$$

$$\xi = \lambda_2/\lambda_1,$$

σ_j 及 σ_k 代表第 j 核子與第 k 核子的自旋算符。

容易看到,張量力對自旋獨態沒有作用,因此 1S 態上的位能在加入張量力後沒有改變,我們無需重複計算。

我們知道,根據有效力程理論氦核的結構及中子對低能質子的散射都只與氦核基態有關,要利用上述實驗數據來確定偶三重態上的位能強度參數,只需考慮氦核基態的波函數。

當加入張量力後,角動量不再是運動常數,氦核基態波函數為 S 波和 D 波的疊加。在質心坐標系中,它可以表成如下的形式:

$$\psi = \frac{1}{r} [u(r) + 8^{-1} \omega(r) S_{12}] {}^3\chi, \quad (19)$$

其中 ${}^3\chi$ 代表選擇得適合全反對稱要求的自旋同位旋波函數, r 為相對距離。 $u(r)$ 和 $\omega(r)$ 分別代表波函數在 S 態及在 D 態上的部分,它們和氦核的四極矩 Q , 磁矩 μ_D 及有效力程 r_c 具有以下的關係:

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{10} \int_0^\infty r^2 (u\omega - 8^{-1} \omega^2) dr / \int_0^\infty (u^2 + \omega^2) dr, \quad (20a)$$

$$\mu_D = \mu_n + \mu_p - \frac{3}{2} (\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \mu_0) P_D, \quad P_D = \frac{\int_0^\infty \omega^2 dr}{\int_0^\infty (u^2 + \omega^2) dr}, \quad (20b)$$

$$r_c = 2 \int_0^\infty [e^{-2ar} - (u^2 + \omega^2)] dr, \text{ 此時需要 } u^2 + \omega^2 \rightarrow e^{-2ar} \text{ 當 } r \rightarrow \infty; \quad (20c)$$

其中 μ_n , μ_p 及 μ_0 分別代表中子、質子及標準核子的磁矩; $\alpha^2 = \frac{M}{\hbar^2} |E_d|$, E_d 為氘核結合能; P_D 是 D 波所佔有的百分比。

和 §1 中情形相似, 我們現在需要從實驗的 $Q = 2.738 \pm 0.016 \times 10^{-27}$ 厘米², $P_D = 0.04 \pm 0.016$, r_c 及氘核結合能 E_d 的數值中定出位能強度參數。在計算中採用變分法, 考慮汎函

$$I = \int_0^\infty \left\{ u \left[\frac{d^2 u}{dr^2} - (\alpha^2 + V_c(r)) u \right] + \omega \left[\frac{d^2 \omega}{dr^2} - \frac{6}{r^2} \omega - (\alpha^2 + V_c(r) - 2V_t(r)) \omega \right] - 4\sqrt{2} V_t(r) u \omega \right\} dr. \quad (21)$$

如所選變分波函數 $u(r)$ 及 $\omega(r)$ 在 $r \rightarrow 0$ 及 $r \rightarrow \infty$ 時均趨於零, 則汎函 I 穩定的條件和 $u(r)$ 及 $\omega(r)$ 適合以 $V_c(r) + S_{12} V_t(r)$ 為位能的波動方程的條件相當。實際計算中, 我們採用了下列試探函數:

$$\left. \begin{aligned} u(r) &= e^{-ar} - e^{-\beta r}, \\ \omega(r) &= \zeta(1 - e^{-\gamma r})^5 e^{-ar} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{(ar)^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

將 γ 固定在一些值上, 取 β 及 ζ 為變分參數, 我們可以採用類似 §1 中之計算步驟求得表 4 的結果¹⁾。表 4 中列有好幾組 G_1 , G_2 和 G_t 之值, 它們是由於對 γ 作不同的選擇而引起的。嚴格講來, 應把 γ 取作變分參數而求得唯一的一組數值。但由於恆等式 ϵ_1 和 ϵ_2 都很接近於 1, 我們選的波函數在

表 4. 加入張量力後偶三重態上位能強度參數之值 (單位為 $\frac{\hbar^2 \lambda_1^2}{M}$)

(甲) $\xi = 2$ 的情形

G_1	G_2	G_t	$P_D \%$	ϵ_1	ϵ_2
-1.6303	-0.8934	-0.5170	2.57	1.020	1.019
-1.3730	-1.1184	-0.6117	3.09	1.016	1.014
-1.0306	-1.3976	-0.7287	3.68	1.009	1.005
-0.5730	-1.7405	-0.8755	4.36	0.995	0.991

1) 計算的公式見附錄 1.

(乙) $\xi = 4$ 的情形

G_1	G_2	G_t	$P_D \%$	ϵ_1	ϵ_2
-1.8404	-0.6399	-0.2216	3.09	1.010	1.010
-1.6378	-0.7109	-0.2578	3.68	0.997	0.997
-1.3623	-0.7573	-0.3031	4.36	0.974	0.977

$r \rightarrow 0$ 及 $r \rightarrow \infty$ 時又都具有正確的漸近行為,並且在計算中沒有考慮各個實驗數據的誤差所引起的位能強度參數的改正,因此我們認為它們都是近似的解答.這幾組值所對應的 P_D 的數值不相同,當實驗的 P_D 值更準確時(主要是對交換磁矩的影響更清楚時),可資選擇的位能強度參數的範圍亦將相應的縮小.

可以看到,當 G_t 增加時, G_2 增加而 G_1 減小,表示張量力增加時,中心力的力程減短.

當核子運動速度很小時,從介子場論可以計算由各種類型介子所傳遞的“靜位能”.如以 π 介子為膺標量介子,(18)式的位能可以看作是由膺標量介子與另一重介子所產生的混合場的位能.經過簡單數量上的分析即發現,我們得到的位能還不能和介子混合場的“靜位能”湊合.

§4. 張量力—— ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ 及 ${}^4\text{He}$ 諸核的結合能

在本節中我們運用上節得到的位能,用變分法計算 ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ 和 ${}^4\text{He}$ 諸核的結合能.當加入張量力後,波函數便採取了十分複雜的形式.此時需要把具有不同角動量和自旋的波函數疊加起來,方能正確地描述原子核的狀態.根據吉爾哥埃及施文格爾的方法^[7],可以求得 ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ 及 ${}^4\text{He}$ 諸核基態上出現的波函數的各種可能的自旋和空間角度的部分.其中最主要的是 S 波及 D 波,下面是在波函數的第一次近似中出現的 S 波與 D 波的形式.

甲) ${}^3\text{H}$ 及 ${}^3\text{He}$ 核的情形

$${}^2\tilde{S}: \quad \tilde{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)] \alpha(3),$$

$${}^2\tilde{S}: \quad -\frac{1}{2\sqrt{3}} (\sigma_{12} \cdot \sigma_3) \tilde{\chi},$$

$$\left. \begin{aligned} {}^4\bar{D}(rr): & \quad \left[(\sigma_3 \cdot r) (\sigma_{12} \cdot r) - \frac{1}{3} (\sigma_{12} \cdot \sigma_3) r^2 \right] \tilde{\chi}, \\ {}^4\bar{D}(\rho \rho): & \quad \left[(\sigma_3 \cdot \rho) (\sigma_{12} \cdot \rho) - \frac{1}{3} (\sigma_{12} \cdot \sigma_3) \rho^2 \right] \tilde{\chi}, \\ {}^4\tilde{D}(r\rho): & \quad \left[(\sigma_3 \cdot \rho) (\sigma_{12} \cdot r) + (\sigma_3 \cdot r) (\sigma_{12} \cdot \rho) - \frac{2}{3} (\sigma_{12} \cdot \sigma_3) (r \cdot \rho) \right] \tilde{\chi}; \end{aligned} \right\} (23)$$

其中 α 和 β 代表 $S_z = \frac{1}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}$ 的自旋波函數； $\sigma_{12} = \sigma_1 - \sigma_2$ ， σ_i 代表第 i 個核子的自旋算符； $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 - r_2)$ ， $\rho = \frac{1}{\sqrt{6}}(2r_3 - r_1 - r_2)$ 。左邊的符號和一般在光譜學上用的相同，上面加一橫線代表波函數對 1 2 為對稱，而加一弧線 $\sim$ 則表示其對 1 2 為反對稱。

乙) ${}^4\text{He}$ 核的情形

$$\left. \begin{aligned} {}^1\tilde{S}: & \quad \tilde{\chi} = \frac{1}{2} \left[\alpha(1) \alpha(3) \beta(2) \beta(4) + \alpha(2) \alpha(4) \beta(1) \beta(3) - \right. \\ & \quad \left. - \alpha(2) \alpha(3) \beta(1) \beta(4) - \alpha(1) \alpha(4) \beta(2) \beta(3) \right], \\ {}^1\bar{S}: & \quad -\frac{1}{4\sqrt{3}} (\sigma_{12} \cdot \sigma_{34}) \tilde{\chi}, \\ {}^5\bar{D}(rr): & \quad \left[(\sigma_{12} \cdot r) (\sigma_{34} \cdot r) - \frac{1}{3} (\sigma_{12} \cdot \sigma_{34}) r^2 \right] \tilde{\chi}, \\ {}^5\bar{D}(\rho_1 \rho_2): & \quad \left[(\sigma_{12} \cdot \rho_1) (\sigma_{34} \cdot \rho_1) + (\sigma_{12} \cdot \rho_2) (\sigma_{34} \cdot \rho_2) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{3} (\sigma_{12} \cdot \sigma_{34}) (\rho_1^2 + \rho_2^2) \right] \tilde{\chi}, \\ {}^5\tilde{D}(\rho_1 \rho_2): & \quad \left[(\sigma_{12} \cdot \rho_1) (\sigma_{34} \cdot \rho_2) + (\sigma_{12} \cdot \rho_2) (\sigma_{34} \cdot \rho_1) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{3} (\sigma_{12} \cdot \sigma_{34}) (\rho_1 \cdot \rho_2) \right] \tilde{\chi}; \end{aligned} \right\} (24)$$

其中

$$\sigma_{12} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \sigma_{34} = \sigma_3 - \sigma_4,$$

$$r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2 + r_3 + r_4),$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (r_1 - r_2), \quad \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (r_3 - r_4).$$

和 §2 中採用的方法相同，我們可以自同位旋波函數及自旋和空間坐標波函數中組成全反對稱的波函數，此時

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{\varphi}\tilde{\tau} - \tilde{\varphi}\bar{\tau}]; \quad (25)$$

其中 $\bar{\tau}$ 和 $\tilde{\tau}$ 與 §2 中所用的相同，而 $\bar{\varphi}$ 及 $\tilde{\varphi}$ 則為由自旋及空間坐標波函數組成的三元排列羣或四元排列羣二度表示的基矢，他們分別由函數 $\varphi(12\ 3)$ 及 $\overline{\varphi(12\ 34)}$ 來確定（參見(8)）。

變分法可以表成如下的形狀：

$$E = \frac{\int \psi^* H \psi dV}{\int \psi^* \psi dV}, \quad \delta E = 0,$$

其中

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 + \sum_{i < j}^A V_{ij} + V_c;$$

A 為核子數目， V_c 為庫倫能。由於 ${}^3\text{H}$ ， ${}^3\text{He}$ 及 ${}^4\text{He}$ 核的結合能不僅由偶態上作用力決定（這一作用力在上一節中已經求得），而且與奇態上的作用力有關。為了討論的方便，我們需要將位能的普遍形式表示出來。假設核子力具有對稱的性質，這一普遍形式是：

$$V_{ij} = \sum_{a=1}^2 \left[\omega_a + b_a P_o(ij) + h_a P_\tau(ij) + m_a P_{\sigma\tau}(ij) \right] \frac{e^{-\lambda_a r_{ij}}}{r_{ij}} + S_{ij}(\omega_t + h_t P_\tau(ij)) [F_{ij}(\lambda_1) - \xi^2 F_{ij}(\lambda_2)], \quad (26)$$

其中 $P_o(ij)$ ， $P_\tau(ij)$ 分別為交換第 i 和第 j 核子的自旋及同位旋算符， $P_{\sigma\tau}(ij) = P_o(ij) P_\tau(ij)$ 。 S_{ij} 和 F_{ij} 見 §3 的 (18) 式。

在計算 E 時，我們採用下列的試探波函數 $\varphi(12\ 3)$ 及 $\overline{\varphi(12\ 34)}$ ：

$$\begin{aligned} \varphi(12\ 3) &= N_s \exp \left[-\frac{\alpha}{2} (r_{12} + r_{23} + r_{31}) \right]^2 \bar{S} + \\ &\quad + N_D c \exp \left[-\frac{\beta}{2} (r_{12} + r_{23} + r_{31}) \right] {}^4\bar{D}(\mathbf{r}\mathbf{r}), \\ \overline{\varphi(12\ 34)} &= N_s \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} a \rho \right] {}^1\bar{S} + N_D c \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} b \rho \right] {}^5\bar{D}(\mathbf{r}\mathbf{r}); \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\rho^2 = \frac{1}{8} \sum_{i \neq j=1}^4 r_{ij}^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + r^2$ ， N_s 和 N_D 為規格化常數，選擇使得 $\int \psi^* \psi dV = 1 + c^2$ 。 α ， β ， a ， b 及 c 等均為變分參數。

如果將 $\varphi(12\ 3)$ 中 ${}^4\bar{D}(\mathbf{r}\mathbf{r})$ 換以 ${}^4\bar{D}(\rho_1 \rho_2)$ ，而不改變 β 的值，或者將 $\overline{\varphi(12\ 34)}$ 中的 ${}^5\bar{D}(\mathbf{r}\mathbf{r})$ 換以 ${}^5\bar{D}(\rho_1 \rho_2)$ ，而不改變 b 的值，則我們發現，代入 (8) 式後將

得到相同的 $\bar{\varphi}$ 及 $\tilde{\varphi}$ ，表明這種波函數的改變並不給出新的結果。

經過冗長的計算，可以求得：

甲) ^3H 核

$$\begin{aligned} E(1 + c^2) = & \frac{15}{14} \alpha^2 + p H_3(\alpha) + \xi q H_3(\alpha/\xi) + 2c\eta A_3(\alpha, \beta) + \\ & + c^2 \left[\frac{15}{14} \beta^2 + S B_3(\beta) + \xi \iota B_3(\beta/\xi) + u D_3(\beta) + \xi \nu D_3(\beta/\xi) + \right. \\ & \left. + \eta E_3(\beta) + \zeta K_3(\beta) \right]; \end{aligned} \quad (28)$$

乙) ^3He 核：和 ^3H 核基本上相同，只需加上庫倫能 E_c 。

$$E_c(1 + c^2) = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{M}{\mu_1} \left[\frac{5}{7} \alpha^2 + c^2 \frac{2}{7} \beta \right]; \quad (29)$$

丙) ^4He 核

$$\begin{aligned} E(1 + c^2) = & \frac{1}{4} a^2 + p F_4(a) + \xi q F_4(a/\xi) + 2c\eta A_4(a, b) + \\ & + c^2 \left[\frac{1}{4} b^2 + S B_4(b) + \xi \iota B_4(b/\xi) + u D_4(b) + \xi \nu D_4(b/\xi) + \right. \\ & \left. + \eta E_4(b) + \zeta K_4(b) \right] + \frac{e^2}{\hbar c} \frac{M}{\mu_1} \left[\frac{35}{128} a + \frac{77}{512} b c^2 \right]; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad \frac{\hbar^2 \lambda_1}{M} p = \omega_1 - m_1, \quad \frac{\hbar^2 \lambda_1}{M} q = \omega_2 - m_2, \\ \frac{\hbar^2 \lambda_1}{M} S = \omega_1 + b_1 - h_1 - m_1, \quad \frac{\hbar^2 \lambda_1}{M} \iota = \omega_2 + b_2 - h_2 - m_2, \\ \frac{\hbar^2 \lambda_1}{M} u = \omega_1 + b_1 + h_1 + m_1, \quad \frac{\hbar^2 \lambda_1}{M} \nu = \omega_2 + b_2 + h_2 + m_2, \\ \frac{\hbar^2 \lambda_1}{M} \eta = \omega_\iota + h_\iota, \quad \frac{\hbar^2 \lambda_1}{M} \zeta = \omega_\iota - h_\iota; \end{aligned}$$

H, F, A, B, D, E 及 K 等函數均在附錄 2 中給出。

計算表明，奇態上作用力對結合能影響很小，假定奇態上無作用力與假定奇態上作用力和偶態上作用力相等來計算結合能，兩者相差約在 0.5 兆電子伏左右，它對我們結果的討論沒有什麼影響。

假定奇態上無作用力，則 $u = \nu = \zeta = 0$ ，我們可以運用 §3 中求得的偶態上的作用力來確定 E 的極小值。計算結果見表 5。在計算中發現 E 曲面在其極小處甚為平坦，因此我們可以先固定 α, β 及 a 和 b ，再來對 c 求極小。

其中 α 和 a 的值選擇得使中心力產生的結合能在其極小附近。進一步計算表明這種作法的誤差約為 5%。

表 5. ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ 及 ${}^4\text{He}$ 核的結合能 (單位:兆電子伏)

(甲) $\xi = 2$ 的情形

G_t	$E({}^3\text{H})$	α	β	$E({}^3\text{He})$	$E({}^4\text{He})$	a	b
-0.5170	-9.08	1.6	3	-7.93	-41.2	5.4	7.2
-0.6117	-7.70	1.6	3	-6.55	-37.5	5.4	7.2
-0.7287	-5.66	1.4	3	-4.66	-31.2	5.2	7.2
-0.8755	-1.96	1.2	3	-1.10	-22.2	4.8	7.2

(乙) $\xi = 4$ 的情形

G_t	$E({}^3\text{H})$	α	β	$E({}^3\text{He})$	$E({}^4\text{He})$	a	b
-0.2216	-7.32	1.4	3	-6.32	-35.9	5.2	7.2
-0.2578	-5.45	1.4	3	-4.45	-29.3	4.8	7.2
-0.3031	-2.68	1.2	3	-1.82	-19.8	4.4	7.2

在上表中 α , β , a 和 b 都是以 λ_1 作為單位給出的數值。由表中可以看到,當張量力強度增加時,理論的結合能值逐步減小。表明加入張量力能緩和在 §2 中所遇到的理論結合能值過大的困難,但從表 5 中尚找不到能同時適合 ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ 及 ${}^4\text{He}$ 諸核結合能的位能強度參數。

胡濟民和徐躬耦二教授曾在他們計算 ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ 核結合能的工作中指出,其他幾個 D 態波函數對結合能的貢獻可能很大,在他們所用位能條件下,這種貢獻可以高達 5—6 兆電子伏。最近克拉克在計算 ${}^4\text{He}$ 核結合能的工作中^[8]也指出,增加一 D 波可使 ${}^4\text{He}$ 核結合能改進約 9 兆電子伏。這樣,從我們這一初步的計算中,尚且不能肯定表 5 中理論值與實驗值的差別是由於波函數的近似程度不夠,還是所選位能不足以反映核子力的真實情況。如果其他 D 波的改正很大,表 5 中位能朝增大張量力方向外抽出去,仍有可能獲得符合實驗之結果。但由表 5 中的一般趨勢看來, ${}^4\text{He}$ 核結合能仍有過大的可能。這種過大的情況亦可能由於多體力的存在而被消除。最近高能核子散射及重核飽和

現象的實驗亦建議多體力的存在。因此對多體力的研究將為這一問題的解決提供一種可能性。

最後作者願對彭桓武教授的指導表示衷心的感謝, 他建議了這一題目, 並在工作過程中給予了有益的幫助和啓發的討論。

附錄 1: $I, \frac{\partial I}{\partial \beta}, Q, r_e$ 的公式

在 §3 中取 (22) 式的波函數 u 及 ω , 代入到 (20), (21) 式中去, 即可計算出 $I, \frac{\partial I}{\partial \beta}, Q$ 及 r_e 來, 計算的結果為:

$$\begin{aligned}
 I = & \alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha^2}{2\beta} - 25 \zeta^2 A_0(\gamma, 8, 2\alpha + 2\gamma) - G_1 \ln \frac{(\alpha + \beta + 1)^2}{(2\alpha + 1)(2\beta + 1)} - \\
 & - G_2 \ln \frac{(\alpha + \beta + \xi)^2}{(2\alpha + \xi)(2\beta + \xi)} - G_1 \zeta^2 A_1(\gamma, 10, 2\alpha + 1) - G_2 \zeta^2 A_1(\gamma, 10, 2\alpha + \xi) + \\
 & + 2G_1 \zeta^2 [A_1(\gamma, 10, 2\alpha + 1) + 3A_2(\gamma, 10, 2\alpha + 1) + 3A_3(\gamma, 10, 2\alpha + 1) - \\
 & - \xi^2 A_1(\gamma, 10, 2\alpha + \xi) - 3\xi A_2(\gamma, 10, 2\alpha + \xi) - 3A_3(\gamma, 10, 2\alpha + \xi)] - \\
 & - 4\sqrt{2} G_1 \zeta [B_1(\gamma, 5, 2\alpha + 1) + 3B_2(\gamma, 5, 2\alpha + 1) + 3B_3(\gamma, 5, 2\alpha + 1) - \\
 & - \xi^2 B_1(\gamma, 5, 2\alpha + \xi) - 3\xi B_2(\gamma, 5, 2\alpha + \xi) - 3B_3(\gamma, 5, 2\alpha + \xi) - \\
 & - B_1(\gamma, 5, \alpha + \beta + 1) - 3B_2(\gamma, 5, \alpha + \beta + 1) - 3B_3(\gamma, 5, \alpha + \beta + 1) + \\
 & + \xi^2 B_1(\gamma, 5, \alpha + \beta + \xi) + 3\xi B_2(\gamma, 5, \alpha + \beta + \xi) + 3B_3(\gamma, 5, \alpha + \beta + \xi)], \\
 \frac{\partial I}{\partial \beta} = & -\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 2G_1 \left(\frac{1}{\alpha + \beta + 1} - \frac{1}{2\beta + 1} \right) - 2G_2 \left(\frac{1}{\alpha + \beta + \xi} - \frac{1}{2\beta + \xi} \right) - \\
 & - 4\sqrt{2} G_1 \zeta [B_0(\gamma, 5, \alpha + \beta + 1) + 3B_1(\gamma, 5, \alpha + \beta + 1) + 3B_2(\gamma, 5, \alpha + \beta + 1) - \\
 & - \xi^2 B_0(\gamma, 5, \alpha + \beta + \xi) - 3\xi B_1(\gamma, 5, \alpha + \beta + \xi) - 3B_2(\gamma, 5, \alpha + \beta + \xi)], \\
 r_e = & \frac{2}{1 + \frac{1}{9} \zeta^2} \left[\frac{2}{\alpha + \beta} - \frac{1}{2\beta} - \zeta^2 A_0(\gamma, 10, 2\alpha) + \frac{1}{9} \zeta^2 \frac{1}{2\alpha} \right], \\
 Q = & \frac{\sqrt{2} \zeta}{10 \left(1 + \frac{1}{9} \zeta^2 \right) \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} r_e \right)} \left\{ B_{-2}(\gamma, 5, 2\alpha) - B_{-2}(\gamma, 5, \alpha + \beta) - \right. \\
 & \left. - 8^{-\frac{1}{2}} \zeta A_{-2}(\gamma, 10, 2\alpha) \right\};
 \end{aligned}$$

其中 $A_l(p, q, t) = \frac{1}{9} I_l(p, q, t) + \frac{2}{3\alpha} I_{l+1}(p, q, t) + \frac{5}{3\alpha^2} I_{l+2}(p, q, t) +$

$$+ \frac{2}{\alpha^3} I_{l+3}(p, q, t) + \frac{1}{\alpha^4} I_{l+4}(p, q, t),$$

$$B_l(p, q, t) = \frac{1}{3} I_l(p, q, t) + \frac{1}{2} I_{l+1}(p, q, t) + \frac{1}{\alpha^2} I_{l+2}(p, q, t),$$

$$I_l(p, q, t) = \int_0^\infty (1 - e^{-pr})^q e^{-tr} r^{-l} dr$$

$$= \frac{1}{l-1} [pq I_{l-1}(p, q-1, p+t) - t I_{l-1}(p, q, t)],$$

$$I_l(p, q, t) = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{k-1} \ln(t+kp);$$

先計算出 I_l 來,便可以計算 A_l 及 B_l , 然後可以求得 I , $\frac{\partial I}{\partial \beta}$, r_e , Q 等值.

附錄 2: H , F , A , B , D , E 及 K 等函數的形式

$$H_3(\alpha) = \frac{3}{14} \frac{(2\alpha)^5}{(2\alpha+1)^2} \left[\frac{2}{(2\alpha)^2} + \frac{2}{(2\alpha)(2\alpha+1)} + \frac{1}{(2\alpha+1)^2} \right],$$

$$A_3(\alpha, \beta) = \frac{64}{5\sqrt{55}} \frac{\alpha^3 \beta^5}{\alpha+\beta} \left[\frac{2}{(\alpha+\beta)^2} I_4\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{1}{\alpha+\beta} I_5\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{1}{6} I_6\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right],$$

$$B_3(\beta) = \frac{16}{385} \frac{\beta^9}{(2\beta+1)^2} \left[\frac{960}{(2\beta)^6} + \frac{960}{(2\beta)^5(2\beta+1)} + \frac{640}{(2\beta)^4(2\beta+1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{320}{(2\beta)^3(2\beta+1)^3} + \frac{272}{(2\beta)^2(2\beta+1)^4} + \frac{496}{(2\beta)(2\beta+1)^5} + \frac{552}{(2\beta+1)^6} \right],$$

$$D_3(\beta) = \frac{48}{385} \frac{\beta^9}{(2\beta+1)^4} \left[\frac{160}{(2\beta)^4} + \frac{320}{(2\beta)^3(2\beta+1)} + \frac{336}{(2\beta)^2(2\beta+1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{208}{(2\beta)(2\beta+1)^3} + \frac{56}{(2\beta+1)^4} \right],$$

$$E_3(\beta) = -\frac{4\beta^9}{1155} \left[\frac{32}{(2\beta)^4} I_4(\beta) + \frac{16}{(2\beta)^3} I_5(\beta) + \frac{664}{35} \frac{1}{(2\beta)^2} I_6(\beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{856}{105} \frac{1}{2\beta} I_7(\beta) + \frac{46}{35} I_8(\beta) \right],$$

$$K_3(\beta) = -\frac{4\beta^9}{385} \left[\frac{224}{(2\beta)^4} I_4(\beta) + \frac{112}{(2\beta)^3} I_5(\beta) + \frac{24}{(2\beta)^2} I_6(\beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{3} \frac{1}{2\beta} I_7(\beta) + \frac{2}{15} I_8(\beta) \right],$$

$$I_l(\beta) = \frac{2\Gamma(l)}{(2\beta+1)^l} + \frac{3\Gamma(l-1)}{(2\beta+1)^{l-1}} + \frac{6\Gamma(l-2)}{(2\beta+1)^{l-2}} - \frac{2\xi^2 \Gamma(l)}{(2\beta+\xi)^l} -$$

$$-\frac{3\xi\Gamma(l-1)}{(2\beta+\xi)^{l-1}} - \frac{6\Gamma(l-2)}{(2\beta+\xi)^{l-2}},$$

$$F_4(a) = \frac{3}{64} \frac{a^3}{(1+a)^5} [35a^3 + 47a^2 + 25a + 5],$$

$$A_4(a, b) = \frac{21\sqrt{6}}{16} \left\{ a^{9/2} b^{13/2} \left[3A_1\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}A_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}A_3\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \right. \\ \left. - \xi\left(\frac{a}{\xi}\right)^{9/2} \left(\frac{b}{\xi}\right)^{13/2} \left[3\xi^2 A_1\left(\frac{a+b}{2\xi}\right) + \frac{1}{3}\xi A_2\left(\frac{a+b}{2\xi}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{24}A_3\left(\frac{a+b}{2\xi}\right) \right] \right\},$$

$$A_1(a) = \frac{21a^3 + 19a^2 + 7a + 1}{504a^6(1+a)^7},$$

$$A_2(a) = \frac{64a^3 + 69a^2 + 30a + 5}{840a^6(1+a)^6},$$

$$A_3(a) = \frac{35a^3 + 47a^2 + 25a + 5}{210a^6(1+a)^5},$$

$$B_4(a) = \frac{231a^{13}}{1024} \left\{ \frac{4[231a^3 + 159a^2 + 45a + 5]}{3465a^6(1+a)^9} + \right. \\ \left. + \frac{5(231a^5 + 593a^4 + 686a^3 + 434a^2 + 147a + 2)}{462a^{10}(1+a)^7} \right\},$$

$$D_4(a) = \frac{a^5[231a^4 + 312a^3 + 186a^2 + 56a + 7]}{2048(1+a)^8},$$

$$E(b) = \frac{21}{32} \left\{ b^{13} \left(11E_1(b) + E_2(b) + \frac{1}{10}E_3(b) \right) - \left(\frac{b}{\xi} \right)^{13} \xi [11\xi^2 E_1(b/\xi) + \right. \\ \left. + \xi E_2(b/\xi) + \frac{1}{10}E_3(b/\xi)] \right\},$$

$$E_1(b) = \frac{231b^3 + 159b^2 + 45b + 5}{13860b^6(1+b)^9},$$

$$E_2(b) = \frac{32b^3 + 25b^2 + 8b + 1}{1260b^6(1+b)^8},$$

$$E_3(b) = \frac{21b^3 + 19b^2 + 7b + 1}{504b^6(1+b)^7},$$

$$K_4(b) = \frac{147}{64} \left\{ b^{13} [11K_1(b) + K_2(b) + \frac{1}{10}K_3(b)] - \left(\frac{b}{\xi} \right)^{13} \xi [11\xi^2 K_1(b/\xi) + \right. \\ \left. + \xi K_2(b/\xi) + \frac{1}{10}K_3(b/\xi)] \right\},$$

$$K_1(b) = \frac{231 b^4 + 312 b^3 + 186 b^2 + 56 b + 7}{9240 b^8 (1+b)^8},$$

$$K_2(b) = \frac{128 b^4 + 203 b^3 + 141 b^2 + 49 b + 7}{2520 b^8 (1+b)^7},$$

$$K_3(b) = \frac{64 b^4 + 122 b^3 + 102 b^2 + 42 b + 7}{504 b^8 (1+b)^6}.$$

參 考 文 獻

- [1] 張繼恆、彭桓武, 中國物理學報 7 (1950), 339.
- [2] 嚴肅, 即將發表.
- [3] Hulthén, L., *Kungl. Fysio. Säll. I. Lund. Förhand.* Bd. 14, Nr. 8, Nr. 21 (1944). Bd. 15, Nr. 22 (1945).
- [4] Hulthén, L., *Arkiv. för. Math. Astro. Och. Fysik.* Bd. 35A, Nr. 25 (1948).
- [5] Christian, R. S., Hart, E. W., *Phys. Rev.* 77 (1950), 441.
- [6] 彭桓武、唐懋焚, 中國物理學報 7 (1950), 309.
徐躬耦、胡濟民, *Proc. Roy. Soc. A.* 204 (1951), 176.
- [7] Gerjuoy, E., Schwinger, J., *Phys. Rev.* 61 (1942), 138.
- [8] Clark, A. C., *Proc. Phys. Soc. A.* 67 (1954), 323.

A DISCUSSION ON TWO-RANGE NUCLEAR FORCE

CHOU KUANG-CHAO

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

The binding energies of nuclei H^3 , He^3 , He^4 , the low energy n-p scattering length and effective range are calculated by using the standard variational methods. A two-range central Yukawa potential is considered in the first two sections. The longer range corresponds to the π meson mass. The smaller range corresponds either to the heavier meson or to the higher order field interactions. No repulsive core appears, when the force parameters are chosen to fit the low energy scattering and deuteron data. The calculated binding energies of nuclei H^3 , He^3 and He^4 are too high. This result is in agreement with most of the previous calculations. Tensor force of the Schwinger mixed type is considered in the third and fourth sections. The force parameters are chosen to fit the low energy two body data. They are not uniquely determined and are given for a set of possible D -percentage values. The adding of the tensor force reduces considerably the calculated binding energies of nuclei H^3 , He^3 , He^4 . But still, the calculated values increase too fast with the mass number. It does not fit the triton and helium binding energies simultaneously. The possibility of adding many body forces is discussed at the end of the paper.