

定跨度變截面梁的彎曲問題*

何 善 堉

(中國科學院數學研究所)

一. 引 言

在處理梁的彎曲問題時,人們經常利用函數級數來表示有關的各量,並從而得到各該量的近似值. 胡海昌^[1]曾經指出:在橫向載荷和軸向力同時作用下,適宜於用梁的屈曲的本徵函數展開式

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

來表示梁的撓度;其中 φ_n 是滿足所給的梁的支座情況的屈曲本徵函數, a_n 是常數係數. 他求得一個相當簡單的公式以已知的本徵函數和本徵值表示諸係數 a_n . 他的這個結論是對等截面梁作的,對於一般的變截面梁. 我們用相同的方法也可以得到類似的結果. 由於數學上的類似性,這個結果當然完全可以應用到長矩形薄板的柱狀撓曲的情形中去. 對於長矩形等厚度薄板的兩種支座情況(兩邊簡支和兩邊插入),張福範^[2,3]曾經用三角級數的方法算出,由於均佈荷重的作用而在板中產生的軸向拉力. 應用既經得到的撓度的屈曲本徵函數展開式,我們進一步討論定跨度變截面梁的彎曲問題,我們的方法可以用來處理張福範所討論的特殊情形. 下面我們首先敘述一般的方法,然後再應用這些方法處理幾個在實用上屬於重要類型的例題.

二. 用屈曲的本徵函數展開式表示梁的撓度

設梁 AB 是一個變截面的雙支梁,取坐標如圖 1. A, B 二點的坐標分別是

*1954 年 9 月 2 日收到.

$x = a$ 和 $x = b$. 梁的截面積 F 和截面對中性軸的慣性矩 I 都是 x 的函數:
 $F = F(x)$, $I = I(x)$. 梁上作用着強度為 $q = q(x)$ 的荷重, 二支座可以是簡支的, 也可以是插入的, 可以是可移動的, 也可以是定位的, 不加限制; 一般說來在支座上作用着軸向拉力 S .

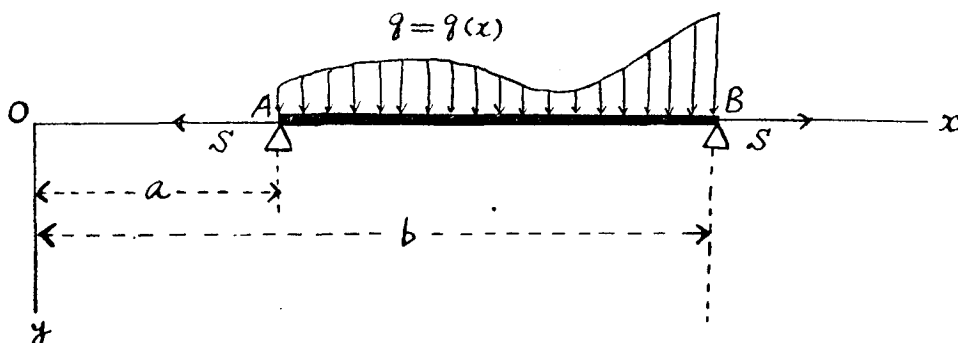


圖 1

在撓度不大的情形, 梁的撓度的微分方程是:

$$(EI y'')'' - Sy'' = q. \quad (1)$$

若 $\varphi_n = \varphi_n(x)$ 是同一個梁對於同樣支座情況在軸向壓力作用下的屈曲本徵函數(這裏所謂的“同樣支座情況”只是對於簡支或插入而言, 支座之是否可移動當然不必考慮). s_n 是在屈曲情況 $y = \varphi_n(x)$ 下的軸向壓力, 也就是與 φ_n 相當的本徵值.

$$(EI \varphi_n'')'' + s_n \varphi_n'' = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

將 (2) 式乘以 φ_m 並從 A 到 B 積分, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_m (EI \varphi_n'') dx + \int_a^b s_n \varphi_m \varphi_n'' dx &= \\ &= \varphi_m (EI \varphi_n'')' \Big|_a^b - \varphi_m' (EI \varphi_n'') \Big|_a^b + \int_a^b EI \varphi_m'' \varphi_n'' dx + s_n \varphi_m \varphi_n' \Big|_a^b - \\ &\quad - s_n \int_a^b \varphi_m' \varphi_n' dx = 0. \end{aligned}$$

再利用諸本徵函數 φ_k 所適合的邊界條件: $\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0$ 和 $\varphi_k'(a) \varphi_k'(b) = 0$, 上式即化簡為:

$$s_n \int_a^b \varphi'_m \varphi'_n dx = \int_a^b EI \varphi''_m \varphi''_n dx. \quad (3n)$$

同樣可得

$$s_m \int_a^b \varphi'_m \varphi'_n dx = \int_a^b EI \varphi''_m \varphi''_n dx. \quad (3m)$$

從 (3m) 減去 (3n) 得

$$(s_m - s_n) \int_a^b \varphi'_m \varphi'_n dx = 0.$$

由此,就得到函數系 $\{\varphi'_n\}$ 的正交性:

$$\text{若 } m \neq n \text{ 則 } \int_a^b \varphi'_m \varphi'_n dx = 0. \quad (4)$$

若截面的變化在某些點是不連續的,利用撓度斜度,彎矩和切力的連續性,我們仍然可以證明正交性 (4) 的成立.

我們可以把梁的撓度展開為 φ_n 的級數如下:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k. \quad (5)$$

將 (5) 代入 (1),再用關係 (2),就有

$$-\sum_{k=1}^{\infty} a_k (s_n + S) \varphi''_k = q.$$

將這個式子左右兩端同時乘以 φ_n , 並從 A 到 B 積分. 由正交性 (4) 及邊界條件 $\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$, 就得

$$a_n (s_n + S) \int_a^b \varphi_n'^2 dx = \int_a^b q \varphi_n dx.$$

由此就得出表示係數 a_n 的重要公式:

$$a_n = \int_a^b q \varphi_n dx / (s_n + S) \int_a^b \varphi_n'^2 dx. \quad (6)$$

因此,只要知道了 q , φ_n , s_n 和 S , 就可以算出 a_n 來了. 而我們知道對

於一些常見的梁的形式,其屈曲的本徵函數和本徵值可以從討論它們的屈曲的文獻中找到^[4,5] 而 S 則是已知的或是可以算出來的. 若梁上的載荷除了連續或分段連續的載荷 $q_1=q_1(x)$ 外,還在 $x=\xi_i$ 點作用着集中載荷 $P_i(i=1, 2, 3, \dots, N)$. 基於物理地考慮, (6) 式的分子上的積分之值為:

$$\int_a^b q \varphi_n dx = \sum_{i=1}^N P_i \varphi_n(\xi_i) + \int_a^b q_1 \varphi_n dx. \quad (7)$$

從 (6) 式可以看出: 若端點拉力 S 與載荷情況無關,那麼, 梁在各種不同形式載荷作用的撓度可以同樣一系本徵函數展開,而且其係數 a_n 的分母也都是相同的.

三. 跨度不變時軸向拉力 S 的求法

若梁的兩個支座都是定位的,那麼在橫向載荷作用下,由於梁的伸長,隨之即在支座上產生了軸向拉力 S , 這時 S 就不再與橫向載荷無關了. 而我們用下列方法算出 S 的數值. 因此也就可以完全確定諸係數 a_n .

在負荷狀態下梁的長度 L 可以有兩種表示方法: 由幾何觀點來看

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \approx \int_a^b \left(1 + \frac{1}{2} y'^2\right) dx,$$

而由虎克定律則有

$$L = \int_a^b \left(1 + \frac{S}{EF}\right) dx,$$

將這二式等置,就有

$$\frac{S}{E} \int_a^b \frac{dx}{F} = \frac{1}{2} \int_a^b y'^2 dx. \quad (8)$$

將 (5), (6) 代入 (8), 並利用正交性 (4) 我們就得到 S 的方程:

$$\frac{2S}{E} \int_a^b \frac{dx}{F} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_a^b \varphi_n'^2 dx, \quad (9)'$$

或

$$\frac{2S}{E} \int_a^b \frac{dx}{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_a^b q \varphi_n dx \right)^2 / (s_n + S)^2 \int_a^b \varphi_n'^2 dx \right], \quad (9)$$

可以由此定出 S .

在很多情況下，(9) 式右端的級數的收斂速度不比 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ 為慢，因此只要保留前幾項就足夠精確了。我們也可以從 (9) 用逐次逼近法算出 S 。我們看到 (9) 式右端是一個正項級數而左端也是正數。我們可以先令 (9) 式右端各項的未知數 $S=0$ 而左端不變，從而得到一個大於 S 的近似值 S_1 ：

$$S_1 = E \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_a^b q \varphi_n dx \right)^2 / 2 s_n^2 \left(\int_a^b \varphi_n'^2 dx \right) \left(\int_a^b \frac{dx}{F} \right) \right] > S,$$

再將 (9) 右端的 S 代以 S_1 而左端不變，便得到一個較 S 為小的 S 的近似值 S_2 ：

$$S_2 = E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b q \varphi_n dx \right)^2 / 2 (s_n + S_1)^2 \left(\int_a^b \varphi_n'^2 dx \right) \left(\int_a^b \frac{dx}{F} \right) < S,$$

這樣我們就肯定了 S 必在 S_1 與 S_2 之間： $S_2 < S < S_1$ 。假如 S_1 與 S_2 相差很小，我們就可以取 $S^{(1)} = \frac{1}{2} (S_1 + S_2)$ ，或者甚至就以 S_1 或 S_2 作為 S 的第一近似值。如果 S_1 和 S_2 相差不夠小，我們就再以 $S^{(1)}$ 代 (9) 右端之 S 。左端不變而得 S 之近似值 S_3 ，若 $S_3 > S^{(1)}$ 則 $S_2 < S^{(1)} < S$ ；若 $S_3 < S^{(1)}$ 則 $S < S^{(1)} < S_1$ ，這樣一來，我們就斷定 S 只在 $S^{(1)}$ 與 S_1 之間或者 $S^{(1)}$ 與 S_2 之間了。若 $S^{(1)}$ 與 S_1 之差或 $S^{(1)}$ 與 S_2 之差足夠小，我們就可以取 $S^{(2)} = \frac{1}{2} (S^{(1)} + S_1)$ 或 $S^{(2)} = \frac{1}{2} (S^{(1)} + S_2)$ 作為 S 的第二近似值，如果還不夠的話，我們可以依照同樣方法繼續作下去，直到足夠精確為止。很容易看出來，對於第 n 近似值 $S^{(n)}$ ，其絕對誤差

$$|S^{(n)} - S| < \frac{1}{2^n} (S_1 - S_2).$$

這個計算法是簡而易行的，而且很快就可以得到 S 的任意精確的近似值。

四. 積分 $\int_a^b \varphi_n'^2 dx$ 的一個計算法

在兩個重要公式 (6) 和 (9) 中，都有積分 $\int_a^b \varphi_n'^2 dx$ 出現；當 $\varphi_n'^2$ 的形狀比較簡單時，求積可能很容易，但是當 $\varphi_n'^2$ 比較複雜時 $\varphi_n'^2$ 的不定，積分往往很難求出或者根本求不出來。我們提出一個方法可能在很多情況下，把求這個積分的

問題化為求微分與求函數極限的問題。

首先,找一個函數 $(\varphi x; P)$ (P 是一個參變數), 在區間 $a \leq x \leq \beta \leq b$ 內滿足微分方程

$$(EI \varphi'')'' + P \varphi'' = 0, \quad (10)$$

而且對於一個確定的本徵函數 φ_n 及其相當的本徵值 s_n , φ 滿足下列條件: 當 P 趨近於 s_n 時, 函數 $\varphi'(x, P)$ $\varphi_n'(x)$ 一致趨於 $\varphi_n'^2$:

$$\lim_{P \rightarrow s_n} \varphi'(x, P) \varphi_n'(x) = [\varphi_n'(x)]^2.$$

在普通的情形中, 本徵函數 φ_n 常常可以寫成 $\varphi_n = \varphi_n(x; s_n)$ 的形狀 (這裏本徵值 s_n 處於一個參變數的地位), 我們只要把這個函數表達式 $\varphi_n = \varphi_n(x; s_n)$ 中的某幾處 (或所有) 的 s_n 換成 P 就常常滿足 φ 所必要滿足的條件, 因而也就可以用作 φ , 因此函數 φ 並不難找到。若函數 φ 在區間 $a \leq x \leq b$ 內是分段表示的, 爲了計算的方便, 在選取它的時候, 可以使它在 $a \leq x \leq b$ 內多滿足一些連續條件, 或者使它滿足某些和 φ_n 相同的邊界條件。

將 (10) 乘以 φ_n 將 (2) 乘以 φ , 再相減, 即得

$$\varphi(EI \varphi_n'')'' - \varphi_n(EI \varphi'')'' = P \varphi'' \varphi_n - s_n \varphi_n'' \varphi, \quad (11)$$

從 α 到 β 積分:

$$\begin{aligned} \int_a^\beta [\varphi(EI \varphi_n'')'' - \varphi_n(EI \varphi'')''] dx &= [\varphi(EI \varphi_n'')' - \\ &\quad - \varphi_n(EI \varphi'')' + EI \varphi_n' \varphi'' - EI \varphi' \varphi_n'']_a^\beta, \\ \int_a^\beta (P \varphi'' \varphi_n - s_n \varphi_n'' \varphi) dx &= \left(P \varphi_n \varphi' - s_n \varphi \varphi_n' \right) \Big|_a^\beta + (s_n - P) \int_a^\beta \varphi' \varphi_n' dx. \end{aligned}$$

由 (11) 式, 有

$$\begin{aligned} (s_n - P) \int_a^\beta \varphi' \varphi_n' dx &= [\varphi(EI \varphi_n'')' - \varphi_n(EI \varphi'')' + EI \varphi_n' \varphi'' - \\ &\quad - EI \varphi' \varphi_n'' + s_n \varphi \varphi_n' - P \varphi_n \varphi'] \Big|_a^\beta, \end{aligned}$$

由此得出公式

$$\int_a^\beta \varphi_n'^2 dx = \lim_{P \rightarrow s_n} \int_a^\beta \varphi' \varphi_n' dx = \lim_{P \rightarrow s_n} \left\{ \left[\varphi (EI \varphi_n'')' - \varphi_n (EI \varphi'')' + EI \varphi_n' \varphi'' - EI \varphi' \varphi_n'' + s_n \varphi \varphi_n' - P \varphi_n \varphi' \right] \right|_a^\beta / (s_n - P) \right\}. \quad (12)$$

一般地說，我們可以利用 (12) 式分段計算積分 $\int_a^b \varphi_n'^2 dx$ ，若是我們選取 φ 時使它多滿足一些連續條件，分的段數就可以少一些。在具體進行計算積分 $\int_a^b \varphi_n'^2 dx$ 時，由於 φ 常在整個區間 $a \leq x \leq b$ 上連續因而不必分段計算（這時 $a=a, \beta=b$ ）。這時，由於 $\varphi_n(a)=\varphi_n(b)=0$ 而 $\varphi_n'(a), \varphi_n'(b), \varphi_n''(a), \varphi_n''(b)$ 四數中一定有兩個等於 0，我們在選取 φ 時又可以有意識地多使它滿足簡支或插入的邊界條件，這樣就可以使 (12) 式右端分子上的 12 項中有很多項等於零，在不少情況下，只剩下一兩項不是零的。我們再利用洛畢達 (l'Hospital) 法則或其他方法求出 (12) 中的極限值，就可以完全算出這個積分。總之，利用公式 (12) 計算積分 $\int_a^b \varphi_n'^2 dx$ 在大多數情況下是很簡便的（這可以從以下的例題中看出來）。

爲了說明以上幾節中的一般方法的應用，我們下面來演算幾個重要類型的定跨度梁的實例。

五. 幾個例題

I. 跨度爲 l 的定跨度等截面梁，兩個支座， $x=0$ 和 $x=l$ 都是插入的，在 $x = \frac{l}{4}, x = \frac{l}{2}, x = \frac{3l}{4}$ 三點都作用着大小均爲 R 的集中載荷；求這個梁的撓度。

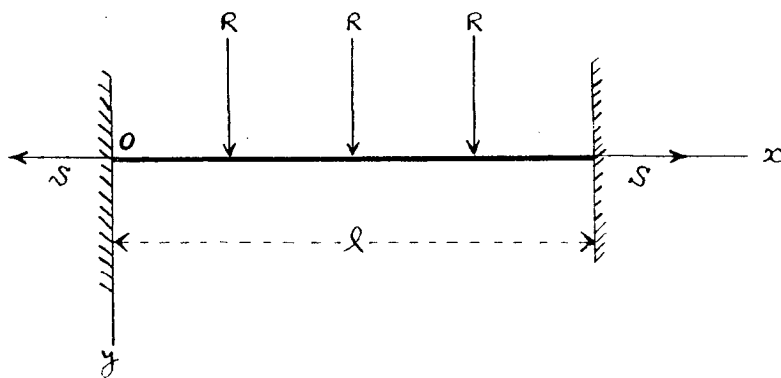


圖 2

設以 $k_n = \sqrt{\frac{s_n^2 l}{EI}}$ 表這個問題中的本徵值, 則諸本徵值和諸本徵函數是:

$$\begin{cases} k_n = (n+1)\pi, & \varphi_n = 1 - \cos k_n \frac{x}{l}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ \tan \frac{k_n}{2} = \frac{k_n}{2}, & \varphi_n = k_n \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin k_n \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right)}{\cos k_n}, & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases} \quad (13)$$

對於偶數的 n , 由於載荷對 $x = \frac{l}{2}$ 的對稱性, 本徵函數 φ_n 對 $x = \frac{l}{2}$ 的反對稱性, 知道 $\int_0^l q \varphi_n dx = 0$ ($n = 2, 4, 6, \dots$), 因此撓度展開式中

$$a_n = 0, \quad n = 2, 4, 6, \dots. \quad (14)$$

對於奇數的 n , 我們用 (12) 式來求積分 $\int_0^l \varphi_n'^2 dx$ [事實上, 在這個問題中 $\varphi_n'^2$ 的不定積分是很容易求出的, 我們所以用 (12) 的方法計算只是為了說明這個方法而已]:

這樣選取 φ :

$$\varphi = 1 - \cos k \frac{x}{l}, \quad \text{其中 } k = \sqrt{\frac{P l^2}{EI}}. \quad (15)$$

因為 φ 在 $0 \leq x \leq l$ 上是連續的, 所以 (12) 式中可以取 $\alpha = 0, \beta = l$. 而 $\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = \varphi_n'(0) = \varphi_n'(l) = \varphi_n''(0) = \varphi_n''(l) = \varphi_n'''(0) = \varphi_n'''(l) = \varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ 所以 (12) 式右端分子上只剩下一項不為零的:

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi_n'^2 dx &= \lim_{P \rightarrow s_n} \frac{-EI \varphi'(l) \varphi_n''(l)}{s_n - P} = \frac{k_n^2}{l} \lim_{k \rightarrow k_n} \frac{-k \sin k}{k_n^2 - k^2} = \\ &= \frac{k_n^2}{l^2} \lim_{k \rightarrow k_n} \frac{\frac{d}{dk} (-k \sin k)}{\frac{d}{dk} (k_n^2 - k^2)} = \frac{k_n^2}{l} \lim_{k \rightarrow k_n} \frac{\sin k + k \cos k}{2k} = \frac{k_n^2}{2l} = \frac{(n+1)^2 \pi^2}{2l}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_0^l q \varphi_n dx &= R \left(1 - \cos \frac{k_n}{4} \right) + R \left(1 - \cos \frac{k_n}{2} \right) + R \left(1 - \cos \frac{3k_n}{4} \right) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{若 } n+1 \text{ 是 } 8 \text{ 的倍數} & 8 \mid n+1. \\ 4R & \text{若 } n+1 \text{ 不是 } 8 \text{ 的倍數} & 8 \nmid n+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

計算軸向拉力 S 時，將 (14)，(16)，(17) 三式代入 (9)，並將未知數 S 以新未知數 $\eta = \frac{S l^2}{\pi^2 EI}$ 代替，就得 η 的方程。

$$\eta = \lambda \sum_{\substack{n=1,3,5,9,\dots \\ 8 \nmid n+1}} \frac{1}{[(n+1)^2 + \eta]^2 (n+1)^4}, \quad \text{其中 } \lambda = \frac{32 l^7 F^2 R^2}{\pi^{10} E^2 I^3}. \quad (18)$$

令 (18) 右端 $\eta=0$ 得 η 的第一近似值

$$\eta_1 = \lambda \sum_{\substack{n=1,3,5,9,\dots \\ 8 \nmid n+1}} \frac{1}{(n+1)^8} \approx 0.0039 \lambda > \eta,$$

再將 η_1 代入 (18) 右端，並利用 λ 在普通情況都是很小的事實，就得 η 的第二近似值

$$\eta_2 = \lambda \sum_{\substack{n=1,3,5,9,\dots \\ 8 \nmid n+1}} \frac{1}{[(n+1)^2 + \eta_1]^2 (n+1)^2} \approx \eta_1 - 0.000006 \lambda^2 < \eta.$$

η 必在 η_1 和 η_2 之間，而 η_1 和 η_2 之差不到 $10^{-5} \lambda^2$ ，因此取 $\eta = \eta_1$ 就足夠精確了。這時軸向拉力

$$S = \frac{\eta EI \pi^2}{l^2} = 0.1248 \frac{l^5 F^2 R^2}{\pi^8 EI^2}. \quad (19)$$

由 (6)，(13)，(14)，(16)，(17)，和 (19)，我們就得到撓度的表示式

$$y = \frac{8 R l^3}{\pi^4 EI} \sum_{\substack{n=1,3,5,9,\dots \\ 8 \nmid n+1}} \frac{1 - \cos \frac{(n+1) \pi x}{l}}{(n+1)^2 [(n+1)^2 + \eta]}, \quad \text{其中 } \eta = 0.1248 \frac{l^5 F^2 R^2}{\pi^{10} E^2 I^3}. \quad (20)$$

II. 跨度為 l 的等截面梁，定位簡支於 $x=0$ ，定位插入於 $x=l$ 。其上作用着均佈載荷 $q = \text{const.}$ ，求其撓度。

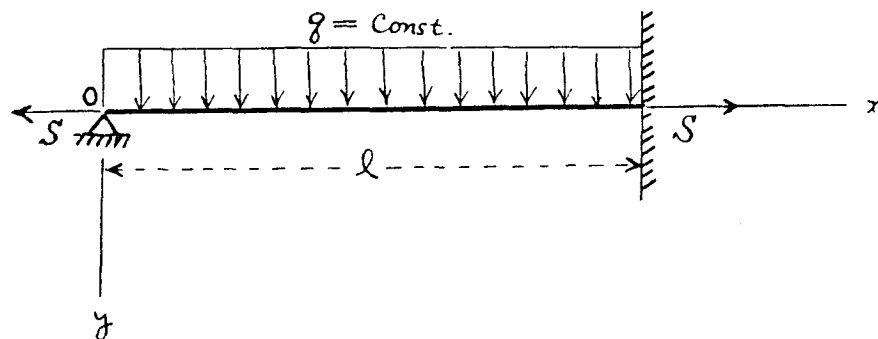


圖 3

在這個例題中我們仍設 $k_n = \sqrt{\frac{s_n l^2}{EI}}$; 本徵值和本徵函數是:

$$\begin{cases} \tan k_n = k_n, \text{ 即 } k_1 = 4.4934, k_2 = 7.7253, k_3 = 10.9041, k_4 = 14.0662, \dots \\ \varphi_n = k_n \frac{x}{l} - \frac{\sin k_n \frac{x}{l}}{\cos k_n}. \end{cases} \quad (21)$$

取 $\varphi = k \frac{x}{l} - \frac{\sin k \frac{x}{l}}{\cos k}$, $k = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}$ 以使用 (12) 計算積分 $\int_0^l \varphi_n'^2 dx$, 我們知道 $\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = \varphi_n''(0) = \varphi_n''(l) = \varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi'(l) = 0$ 所以 (12) 式右端分子上也只剩下一項了:

$$\int_0^l \varphi_n'^2 dx = \lim_{P \rightarrow s_n} \frac{EI \varphi(l) \varphi_n'''(l)}{s_n - P} = \lim_{k \rightarrow k_n} \frac{k_n^3}{l} \frac{k - \tan k}{k_n^2 - k^2} = \frac{k_n^4}{2l}, \quad (22)$$

而

$$\int_0^l q \varphi_n dx = \frac{ql}{2k_n} (2 + k_n^2 - 2\sqrt{1+k_n^2}). \quad (23)$$

以新未知數 η 代替 S : $\eta = \frac{Sl^2}{EI}$.

由 (9) 即得 η 的方程:

$$\eta = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 + k_n^2 - 2\sqrt{1+k_n^2}}{k_n^3(k_n^2 + \eta)} \right]^2 \quad \text{其中 } \lambda = \frac{F q^2 l^8}{2 E^2 I^3}. \quad (24)$$

用逐次逼近法, 得

$$\eta = 0.00127 \lambda.$$

因而作用在支座上的軸向拉力

$$S = \frac{\eta EI}{l^2} = 0.00068 \frac{F q^2 l^6}{EI^2}. \quad (25)$$

由 (5), (6), (22), (23), 和 (25), 就得到撓度的表示式:

$$y = \frac{q l^4}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + k_n^2 - 2\sqrt{1+k_n^2}}{k_n^5(k_n^2 + \eta)} \left(k_n \frac{x}{l} - \frac{\sin k_n \frac{x}{l}}{\cos k_n} \right), \quad (26)$$

其中 $\eta = 0.00068 \frac{F q^2 l^8}{E^2 I^3}$.

III. 一個跨度為 $2l$ 的變截面梁定位簡支於 $x=a$ ($a>0$), $x=a+2l$ 兩點, 其截面狀態對其中點 $x=a+l$ 是對稱的:

$$\begin{cases} EI(x) = ECx^2, & F(x) = hx, & a \leq x \leq a+l \\ EI(x) = EC(2a+2l-x)^2, & F(x) = h(2a+2l-x), & a+l \leq x \leq a+2l \end{cases}$$

其中 C 和 h 都是正常數. 有一個集中載荷 R 作用在中點 $x=a+l$ 處; 求其撓度.

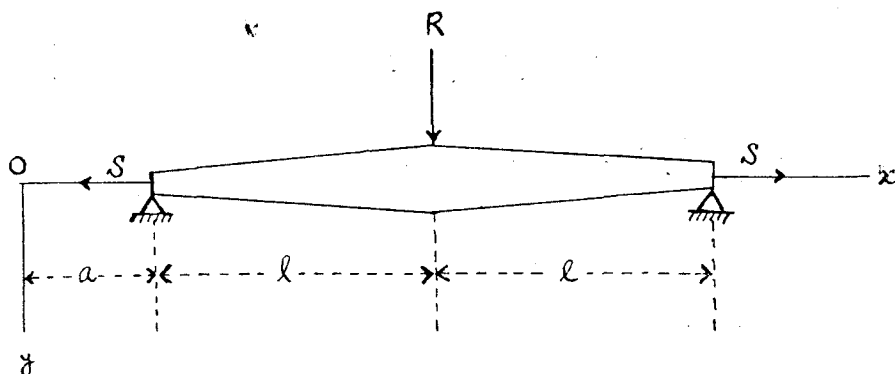


圖 4

這個問題中的本徵值 k_n 和本徵函數 φ_n 是:

$$\begin{cases} \tan(2k_n \log u) - 2k_n = 0, & \text{其中 } k_n = \sqrt{\frac{s_n}{CE} - \frac{1}{4}}, \quad u = \sqrt{\frac{a}{a+l}} \\ \varphi_n = \begin{cases} \sqrt{x} \sin\left(k_n \log \frac{x}{a}\right) & a \leq x \leq a+l \\ \sqrt{2a+2l-x} \sin\left(k_n \log \frac{2a+2l-x}{a}\right) & a+l \leq x \leq a+2l \end{cases} \end{cases} \quad (26)$$

首先, 我們用公式 (12) 的方法計算積分 $\int_a^{a+2l} \varphi_n'^2 dx$, 由於 φ_n 對中點 $x=a+l$ 的對稱性, 我們知道

$$\int_a^{a+2l} \varphi_n'^2 dx = 2 \int_a^{a+l} \varphi_n'^2 dx.$$

我們這樣選取函數 φ :

$$\varphi = \sqrt{x} \sin\left(k \log \frac{x}{a}\right), \quad \text{其中 } k = \sqrt{\frac{P}{CE} - \frac{1}{4}}, \quad a \leq x \leq a+l.$$

由於在本問題中

$$\begin{cases} EI \varphi_n'' + s_n \varphi_n = 0, \\ EI \varphi'' + P \varphi = 0. \end{cases} \quad a \leq x \leq a+l$$

所以 (12) 式右端的分子上括號中之函數很容易就可以化簡成：

$$[s_n \varphi_n \varphi' - P \varphi \varphi_n']$$

我們又知道：

$$\varphi(a) = \varphi_n(a) = \varphi_n'(a+l) = 0$$

所以在計算積分 $\int_a^{a+l} \varphi_n'^2 dx$ 時，(12) 式右端分子上只剩下一項：

$$\begin{aligned} \int_a^{a+l} \varphi_n'^2 dx &= 2 \int_a^{a+l} \varphi_n'^2 dx = 2 \lim_{P \rightarrow s_n} \frac{[s_n \varphi_n \varphi' - P \varphi \varphi_n']|_a^{a+l}}{s_n - P} = \\ &= 2 \lim_{P \rightarrow s_n} \frac{s_n \varphi_n(a+l) \varphi'(a+l)}{s_n - P} \\ &= \frac{2 s_n}{CE} \lim_{k \rightarrow k_n} \frac{1}{k_n^2 - k^2} \left[\sqrt{a+l} \sin \left(k_n \log \frac{a+l}{a} \right) \right] \left[\frac{k}{\sqrt{a+l}} \cos \left(k \log \frac{a+l}{a} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2 \sqrt{a+l}} \sin \left(k \log \frac{a+l}{a} \right) \right] \\ &= \frac{2 s_n}{CE} \sin \left(k_n \log \frac{a+l}{a} \right) \lim_{k \rightarrow k_n} \frac{1}{2k} \left[k \log \frac{a+l}{a} \sin \left(k \log \frac{a+l}{a} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \left(k \log \frac{a+l}{a} \right) - \frac{1}{2} \log \frac{a+l}{a} \cos \left(k \log \frac{a+l}{a} \right) \right] \\ &= \frac{4 k_n^2 + 1}{8 k_n} \sin \left(k_n \log \frac{a+l}{a} \right) \left[2 k_n \log \frac{a+l}{a} \sin \left(k_n \log \frac{a+l}{a} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \left(k_n \log \frac{a+l}{a} \right) - \log \frac{a+l}{a} \cos \left(k_n \log \frac{a+l}{a} \right) \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

(從這個積分的計算過程就可以看出，我們這個積分方法的優點：它在 $\varphi_n'^2$ 形狀比較繁複時往往也能比較簡便地得出結果)。

另外：

$$\int_a^{a+2l} q \varphi_n dx = R \sqrt{a+l} \sin \left(k_n \log \frac{a+l}{a} \right). \quad (28)$$

爲了具體確定 k_n ，我們只來計算 $l=6.389a$ 的特殊情形。這時

$$\log u \approx -1, \quad \log \frac{a+l}{a} \approx 2$$

$$\tan 2k_n + 2k_n = 0^* \quad \text{即 } k_1 = 1.1042, \quad k_2 = 2.4568, \quad k_3 = 3.9893, \\ k_4 = 5.5928, \quad k_5 = 7.1087, \dots \quad (26)'$$

$$\int_a^{a+2l} \varphi_n'^2 dx = 2k_n^2 + 1, \quad (27)'$$

$$\int_a^{a+2l} q \varphi_n dx = 2R \sqrt{a+l} \frac{k_n}{\sqrt{1+4k_n^2}}, \quad (28)'$$

$$\int_a^{a+2l} \frac{dx}{F} = 2 \int_a^{a+l} \frac{dx}{hx} = \frac{4}{h}. \quad (29)$$

將 (27)', (28)', (29) 代入 (9)，就得 S 的方程

$$S = \frac{ER^2(a+l)h}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2}{(1+4k_n^2)(1+2k_n^2)} \frac{1}{(s_n+S)^2}. \quad (30)$$

用前述的逐次逼近法，即得

$$S = 0.0101 \frac{R^2(a+l)h}{c^2 E}.$$

由 (6)，(26)，(27)', (28)' 和 (31)，就得撓度的表示式：

$$\begin{cases} y = 8R \sqrt{a+l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{[CE(1+4k_n^2)+S](1+2k_n^2)} \sqrt{x} \sin \left(k_n \log \frac{x}{a} \right), \\ \quad \text{若 } a \leq x \leq a+l; \\ y = 8R \sqrt{a+l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{[CE(1+4k_n^2)+S](1+2k_n^2)} \sqrt{2a+2l-x} \sin \left(k_n \log \frac{2a+2l-x}{a} \right), \\ \quad \text{若 } a+l \leq x \leq a+2l; \end{cases} \quad (32)$$

* 方程式 $\tan x + x = 0$ 的第 n 個正根 $x_n = a + \frac{1}{a} - \frac{4}{3a^3} + \frac{53}{15a^5} - \frac{3668}{315a^7} + \frac{1673}{5a^9} - \dots$,

其中 $a = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$.

其中

$$S_1' = 0.0101 \frac{R^2(a+l)h}{C^2E}.$$

IV. 一個跨度為 $8a$ 的變截面梁 $ABCD$ ，定位簡支於 $A(x=-4a)$ ， $D(x=4a)$ 兩端， AB ， BC ， CD 各段本身都是等截面的， AB 和 CD 兩段都是長為 a 寬為 b 高為 h 的矩形截面梁而中段 BC 則是長為 $6a$ 寬為 b 高為 $h\sqrt[3]{9}$ 的矩形截面梁。全梁上作用着均佈載荷 $q=\text{const.}$ ，求其撓度。

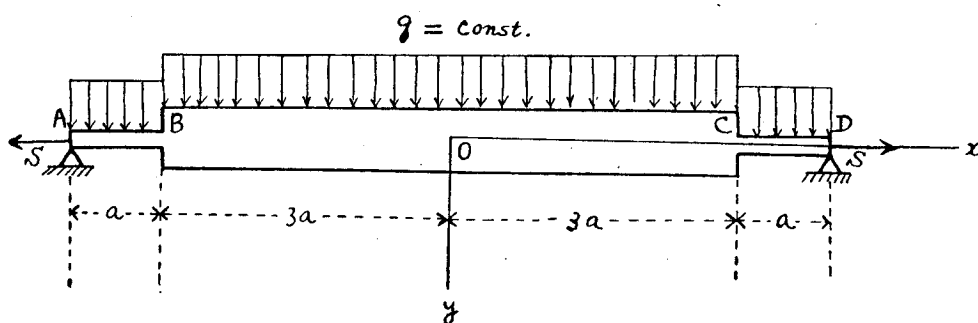


圖 5

為計算的方便起見，取坐標如圖 5 所示。AB 和 CD 兩段的截面積都是 $F_1=bh$ ，慣性矩都是 $I_1=\frac{1}{12}bh^3$ 而中段 BC 的截面積是 $F_2=bh\sqrt[3]{9}$ ，慣性矩是 $I_2=\frac{3}{4}bh^3$ 。

設本徵值 $k_n = \sqrt{\frac{s_n a^2}{EI_1}}$ ，則本問題的本徵值 k_n 和本徵函數 φ_n 為：

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan^2 k = 3, \text{ 亦即 } k_n = \begin{cases} \frac{1}{6}(3n-1)\pi, & n=1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{6}(3n-2)\pi, & n=2, 4, 6, 8 \end{cases} \\ \varphi_n = \begin{cases} \cot k_n \sin 4k_n \cos k_n \frac{x}{a} + \cot k_n \cos 4k_n \sin k_n \frac{x}{a}, & -4a \leq x \leq -3a \quad (33) \\ \cos \frac{k_n}{3} \frac{x}{a}, & -3a \leq x \leq 3a \\ \cot k_n \sin 4k_n \cos k_n \frac{x}{a} - \cot k_n \cos 4k_n \sin k_n \frac{x}{a}, & 3a \leq x \leq 4a \end{cases} \end{array} \right.$$

由此有

$$\int_{-4a}^{4a} \varphi_n'^2 dx = \begin{cases} \frac{\pi}{108a} (3n-1) [2(3n-1) + 3\sqrt{3}], & n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{\pi}{108a} (3n-2) [2(3n-2) - 3\sqrt{3}], & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (34)$$

$$\int_{-4a}^{4a} q \varphi_n dx = \begin{cases} \frac{20 a q \sqrt{3}}{\pi (3n-1)}, & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ \frac{6 a q \sqrt{3}}{\pi (3n-2)}, & n = 2, 6, 10, 14, \dots \\ \frac{-12 a q \sqrt{3}}{\pi (3n-1)}, & n = 3, 7, 11, 15, \dots \\ \frac{-20 a q \sqrt{3}}{\pi (3n-2)}, & n = 4, 8, 12, 16, \dots \end{cases} \quad (35)$$

$$\int_{-4a}^{4a} \frac{dx}{F} = \frac{2a}{9bh} (9 + \sqrt[3]{81}). \quad (36)$$

將 (34), (35), (36) 代入 (9), 並以新未知數 η 代替 S :

$$\eta = \frac{36 a^2 S}{\pi^2 E I_1}$$

即得 η 之方程

$$\begin{aligned} \eta = \lambda \Big\{ & 20^2 \sum_{n=1,5,9,\dots} \frac{1}{(3n-1)^3 [(3n-1)^2 + \eta]^2 [2(3n-1) + 3\sqrt{3}]} + \\ & + 6^2 \sum_{n=2,6,10,\dots} \frac{1}{(3n-2)^3 [(3n-2)^2 + \eta]^2 [2(3n-2) - 3\sqrt{3}]} + \\ & + (12)^2 \sum_{n=3,7,11,\dots} \frac{1}{(3n-1)^3 [(3n-1)^2 + \eta]^2 [2(3n-1) + 3\sqrt{3}]} + \\ & + (20)^2 \sum_{n=4,8,12,\dots} \frac{1}{(3n-2)^3 [(3n-2)^2 + \eta]^2 [2(3n-2) - 3\sqrt{3}]} \Big\}; \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\lambda = \frac{27 \cdot (36)^3 q^2 a^7 bh}{4\pi^8 E^2 I_1^3 (9 + 3\sqrt{81})}.$$

用逐次逼近法解 (37) 中之 η , 得

$$\eta = 30.75 \lambda,$$

故軸向拉力

$$S = \frac{\eta \pi^2 EI_1}{36 a^2} = 0.854 \frac{\pi^2 EI_1 \lambda}{a^2}. \quad (38)$$

由 (6), (33), (34), (35), 和 (38), 就可以得到撓度的級數表示式; 爲簡單起見不再寫出。

作者寫作本文時曾得到胡海昌同志很多重要的幫助, 林鴻蓀同志也提出了寶貴的意見。謹向他們致衷心的謝意。

參 考 文 獻

- [1] 胡海昌 (Hai-Chang Hu), Small deflections of plates and beams under tension or compression by eigenfunctions of buckling problem. *Science Record*, **5** (1952).
- [2] 張福範 (Fo-Van Chang), Trigonometric series applied to the bending of long rectangular plates to cylindrical surface. *Journal of Franklin Institute*, **249** (1950).
- [3] ———, Trigonometric series applied to the problem of bending long rectangular plate into cylindrical surface. *Science Record*, **3** (1950).
- [4] Timoshenko, S., Theory of elastic stability. pp. 129, 135.
- [5] Dinnik, A., Design of column of varying cross section. *Trans. A.S.M.E.*, **54** (1932), No. APM 54-16 p. 165.

ON THE DEFLECTION OF A BEAM OF VARIABLE CROSS SECTION WITH FIXED SPAN

HO SHAN-YUH

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The buckling problem of various beams of variable cross sections has been fully considered by many authors, and the eigenfunctions and eigenvalues of the buckling problem of those beams are available in books and papers on this subject. Firstly, this paper shows that the deflection of these beams under the combined action of lateral load and axial tensile force can be expanded in a series of buckling eigenfunctions and that the coefficients in such an expansion can be simply expressed in terms of the known eigenfunctions, eigenvalues, the axial tensile force and the lateral load. Furthermore making use of the eigenfunction expansion, an approximation method is given to determine the axial tensile force acted on the supports of a beam of fixed span.

A beam of variable cross section is supported (hinged or built-in) at ends $x=a$ and $x=b$ with cross-sectional area F and flexural rigidity EI as functions of coordinate x . Denote by S the axial tensile force and by $q=q(x)$ the intensity of lateral load. The deflection y of the beam is characterized by the differential equation

$$(EI y'')'' - Sy'' = q \quad (1)$$

and by certain end conditions depending on the state of support.

The buckling eigenfunction φ_n of the same beam satisfies the differential equation

$$(EI \varphi_n'')'' + s_n \varphi_n'' = 0 \quad (2)$$

and the same end condition as that of deflection y , where s_n is the corresponding eigenvalue (i.e., the corresponding axial compressive force in the buckling state.).

From the equation and the end conditions of φ_n the orthogonality of the function system $\{\varphi_n'\}$ is deduced, i.e.

$$\int_a^b \varphi_m' \varphi_n' dx = 0, \quad \text{for } m \neq n. \quad (4)$$

In general the deflection y can be expressed in a series of φ_n :

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n. \quad (5)$$

By the use of equations defining y and φ_n and the orthogonality of $\{\varphi_n'\}$ it is proved that

$$a_n = \int_a^b q \varphi_n dx / (s_n + S) \int_a^b \varphi_n'^2 dx. \quad (6)$$

Therefore, if q , S , φ_n , s_n are given, the coefficients a_n can be easily determined by this simple formula.

Furthermore, in the treatment of the beam with fixed span, the axial tensile force S is no longer independent of the lateral load but a functional of it. By the consideration of Hooke's law and the geometrical condition of the beam the equation of S is established as

$$\frac{2S}{E} \int_a^b \frac{dx}{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_a^b q \varphi_n dx \right)^2 / (s_n + S)^2 \int_a^b \varphi_n'^2 dx \right]. \quad (9)$$

In the usual cases the series on the right hand of the equation converges very fast. Owing to the fact that it is a series with positive terms, there is a quite convenient method for computing S to arbitrarily high degree of accuracy.

For evaluating the definite integral $\int_a^b \varphi_n'^2 dx$ occurring in (6) and (9), a formula is given. In calculating the integral by this formula only certain derivatives and a limit of certain functions need to be evaluated. When the form of the function $\varphi_n'^2$ is too complex to integrate directly, this formula may probably be useful.

On account of the mathematical analogy, these results can, of course, be extended to the treatment of the bending of long rectangular plates.

At the end of this paper four illustrative examples, which are of importance in practical applications, are given.