

具微孔柱體扭轉問題的一個近似解*

李 毓 昌

(南 昌 第 一 中 學)

一. 問 題

自從聖維那 (Saint-Venant) 對扭轉問題進行研究後, 扭轉問題已化為求一函數 (亦即扭轉函數) ϕ , 並使適合下列條件:

1. ϕ 必須是泊松方程的解, 即:

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = -2G\theta. \quad (1)$$

這裏 ∇^2 為拉普拉斯算子, G 為該柱體的剛性模數, θ 為單位長度的扭轉角, 並有:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (2)$$

2. 該截面的邊界為 ΣR , 那麼還需要

$$\phi|_{\Sigma R} = \text{const.} \quad (3)$$

在單通域的情形下, 常定此常數為零.

3. 另外, 扭轉函數中所包含的常係數應由

$$\iint \phi \, dx \, dy = M\iota \quad (4)$$

來決定. 這裏積分遍及於截面的全部面積.

單通域問題的解答是比較容易得到, 複通域問題就比較複雜. 但目前已經有一部分有價值的解答, 如由 Prandtl 的臆喻法等是. 我們在這裏試圖用疊加法來處理內邊界較小的雙通域問題. 這方法是近似的, 它的內容是把應力函數分為兩部分, 第一部分對應對截面的無孔狀態. 第二部分是一調和函數. 而且把

*1955 年 2 月 2 日 收到.

它與第一部分疊加的結果，須使沿內周界剪力法線支量為零。這顯然是一個調和函數理論當中為大家所熟知的 Von-Neumann 問題。

二. 解 法

我們這個方法所適合的範圍是一定的。僅有當下面條件得到滿足的柱體其扭轉問題才可以用我們的方法來處理，那就是：

該柱體截面的內外周界分別為 R_0 及 R_1 ，由 R_0 及 R_1 所包面積為 S_0 及 S_1 則：

$$S_0 \gg S_1. \quad (5)$$

不僅這樣， S_0 的線維 (linear dimension) 還應比 S_1 的大許多。另外，如果 R_1 如表為 $F_1(x, y)$ ，那麼我們要求其一階導數存在，並且在 R_1 上處處有確定的值。

下面讓我們來看 ϕ_1 的一些性質。

1. 如果 ϕ_1 是泊松方程的解，又 ϕ_2 為調和函數，亦即。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_1 &= K \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

那麼 ϕ_1 及 ϕ_2 的和 ϕ 亦為泊松方程的解，由此得到 ϕ_2 的第一個性質： ϕ_2 必須是調和函數。

2. 讓我們考慮在扭轉狀態的某圓柱體於其偏心處掘一小圓孔的情形(如圖 1, 2 所示)。不難看出對應於 ϕ_1 的剪力，在內周界 R_1 的法線支量的合成相當於一

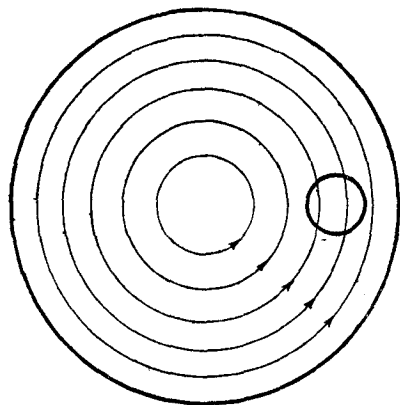


圖 1. R_1 不存在時之等剪力線

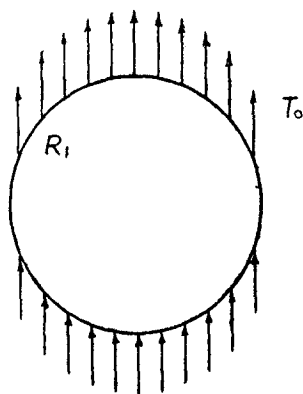


圖 2. 分佈在 R_1 上之 T_0

力矩, 如果 R_1 是這樣的小, 以致沿 R_1 對應於 ϕ_0 的剪力的變化我們可以把它略去.

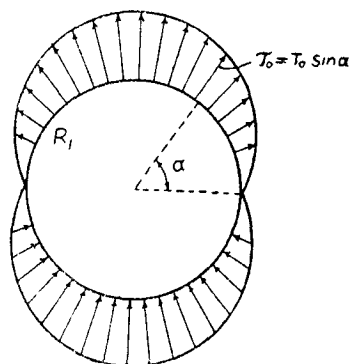


圖 3. 分佈在 R_1 的 τ_0 的法線分量

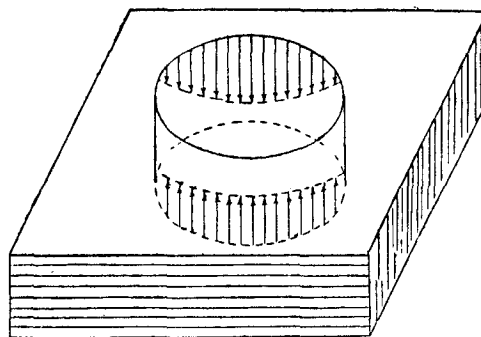


圖 4. ϕ_0 在 R_1 上所生之轉矩

如果我們從該柱體切割下高為單位長的一部分 (如圖 4 所示). 由於該部分處於平衡狀態使我們可以斷定: 對應於 ϕ_2 剪力的合成必等於一力矩, 其大小與前述相等而方向相反, 於是:

$$M = \int_0^\pi 2\tau_1 a d\theta \cdot a \sin \theta = \int_0^\pi 2\tau_2 r^2 \sin \theta d\theta, \quad (7)$$

並由此而得到

$$\bar{\tau}_2 \sim \frac{a^2}{r^2} \bar{\tau}_1. \quad (8)$$

由此可見對應於 ϕ_2 的剪力其影響依 $\frac{1}{r^2}$ 而減弱.

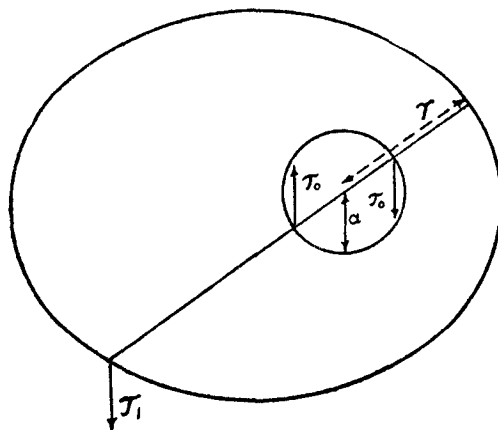
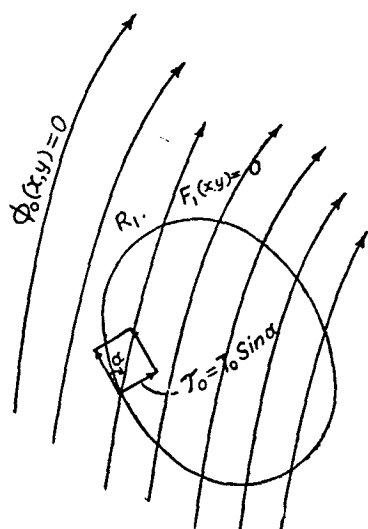


圖 5. 一對力矩之平衡

圖 6. τ_0 與 R_1 之夾角

不難把這樣的一個結論，推廣到具形狀為任意的微孔問題當中去：因此我們得到 ϕ_2 的第二個性質：對應於 ϕ_2 的剪力其影響是局部的而且限制在微孔附近。

3. ϕ_2 與 ϕ_1 疊加的結果還要使內周界的邊界條件得到滿足。換言之剪力在 R_1 的法線支量為零。

4. 從圖 6 我們可以看到剪力 τ_0 與 R_1 之交角之正切為：

$$\tan \alpha_1 = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}, \quad (9)$$

$$\tau_1 \sin \alpha_1 = \sqrt{\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2} \sin \alpha_1 = \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial F_1}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2}}; \quad (10)$$

同理可得

$$\tau_2 \sin \alpha_2 = \frac{\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial F_1}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2}}. \quad (11)$$

由

$$\tau_1 \sin \alpha_1 + \tau_2 \sin \alpha_2|_{R_1} = 0 \quad (12)$$

我們可以得到：

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{R_1} = - \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \Big|_{R_1}. \quad (13)$$

注意到：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} r \cos \theta - \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} r \sin \theta + \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \cos \theta \right) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_1}{\partial r} r \cos \theta - \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_1}{\partial r} r \sin \theta + \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \cos \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r} r \cos \theta - \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r} r \sin \theta + \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \cos \theta \right) \end{aligned} \right\}$$

代入 (13) 式我們可以得到：

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \frac{\partial F_1}{\partial r} \Big|_{R_1} = - \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \frac{\partial F_1}{\partial r} \right) \Big|_{R_1}. \quad (15)$$

由 (15) 式並結合

$$\nabla^2 \phi_2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi_2 = 0 \quad (16)$$

以及

$$\phi_2|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (17)$$

我們可以解出 ϕ_2 .

設在 R_1 上我們有

$$r = \psi(\theta), \quad (18)$$

又假定

$$\phi_2 = \frac{1}{r} \omega(\theta). \quad (19)$$

只要 $\omega(\theta)$ 有這樣的性質：

$$\omega(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta], \quad (20)$$

那麼 ϕ_2 顯然同時滿足 (16) 及 (17).

把 (18) 及 (19) 代入 (15)，我們可以得到一個常微分方程其通式為：

$$\varphi \left[\psi(\theta) \omega(\theta) \frac{d\omega}{d\theta}, \theta \right] = 0, \quad (21)$$

解 (21) 我們可以得到 $\omega(\theta)$.

5. 疊加 ϕ_1 及 ϕ_2 我們得到了所要求的 ϕ ：

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \phi_1 + \frac{1}{r} \omega(\theta). \quad (22)$$

常係數可由下式所決定：

$$\iint_{s_0-s_1} \phi \, dx \, dy = M t. \quad (23)$$

有時也近似地表為

$$\iint_{s_0} \phi \, dx \, dy = M t.$$

三. 例 子

作為近似的疊加法應用的一個例子, 設

有:

$$R_0: (x + a_0)^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad (24)$$

$$R_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (25)$$

這裏 $a_0 \gg a$, $b > a$, $a_0 \gg b$.

$$\text{於是: } \phi_0 = m [(x + a_0)^2 + y^2 - R_0^2], \quad (26)$$

$$T = 2 m a_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(2 \frac{r}{a} \cos \theta + \frac{r^2}{a_0^2} \right) + \dots \right] \Big|_{R_1} \approx 2 m a_0. \quad (27)$$

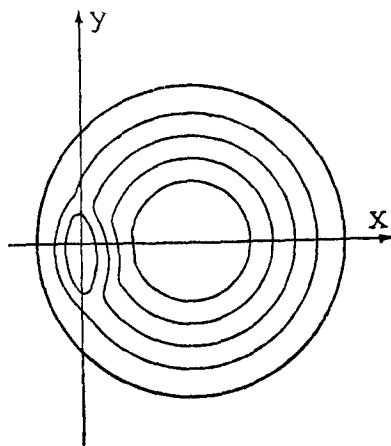


圖 7. 等剪力線之分佈

由於

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}, \quad (28)$$

代入 (15) 式我們得到:

$$\int d \left[\omega(\theta) \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \right] = \int \frac{2 m a_0 a^4 b^2 \sin \theta d\theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}, \quad (29)$$

把左邊展開後,

$$\begin{aligned} & \omega(\theta) \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = \\ & = \int 2 m a_0 a^4 b^2 \left\{ \frac{1}{b^2} \left[1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 \theta \dots \right] \frac{1}{b} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \theta + \dots \right] \right\} \sin \theta d\theta; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{由於 } \frac{a^2 - b^2}{b^2} < 1, \quad \sin^2 \theta < 1, \quad \cos^2 \theta < 1.$$

作為第一次近似我們有:

$$\omega(\theta) \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = -2 m a_0 \frac{a^4}{b} \cos \theta, \quad (31)$$

最後我們得到:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ &= m \left[r^2 + 2 a_0 \left(r - \frac{a^4}{r b \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \right) \cos \theta + (a_0^2 - R^2) \right]; \end{aligned} \quad (32)$$

這裏

$$m \approx \frac{2 M t}{\pi r^3}. \quad (33)$$

於是我們得到:

$$\tau_{rz} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -2ma_0 \left[1 + \frac{1}{r^2} \frac{a^4 b}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)} \right] \sin \theta. \quad (34)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = m \left[r + 2a_0 \left(1 + \frac{1}{r} \frac{a^4}{b \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \cos \theta \right) \right], \quad (35)$$

極大剪力顯然發生在 $\theta = 0$ 及 $\theta = \pi$ 處,我們有

$$\tau_{\max} = m \left[a + 2a_0 \left(1 + \frac{a}{b} \right) \right], \quad \text{這裏 } r = a_0; \quad (36)$$

或可近似地寫成

$$\tau_{\max} = 2ma_0 \left(1 + \frac{a}{b} \right) = \tau_0 \left(1 + \frac{a}{b} \right). \quad (37)$$

τ_0 為對應於 ϕ_0 的剪力這個結果顯然與 Lamore 所得到的一致。

扭轉問題的薄壁情形,已由忽略沿管徑方向應力變化而大為簡化,而本文所處理的問題亦僅局限在其另一極端。還不是一般的,可是在實用上仍具有一定的價值。一系列的計算與實驗指出:扭轉時由於微孔而形成的高度應力集中,常是使材料發生屈服及破裂的原因。

這裏我們所用的方法,是一個調和函數的邊值問題的解法,亦即 Van-Neumann 的外部問題,與 G. Kersch 用來解決薄板具有圓形微孔受均勻外力作用的應力問題有某種類似。在另外一篇文章裏作者曾經推廣了他的結果,此處不擬細述。

在工作過程中,錢偉長教授給了作者許多具體的指導和幫助,作者願乘這個機會謹向錢偉長教授表示感激和謝意。

參 考 文 獻

- [1] Timoshenko, S., Theory of Elasticity, Chapt. IX.
- [2] Love, A. E. H., Theory of Elasticity.
- [3] 錢偉長, 聖維那扭轉問題之物理假定, 物理學報, 9 卷 4 期。
- [4] 林鴻蓀, 具複聯通截面柱體扭轉問題之變分解法, 物理學報 9 卷 4 期。
- [5] Фелоненко-Бородич, М. М., Теория упругости, Глава VIII.
- [6] Смирнов, Курс Высшей Математика, том II, часть IV; том IV, часть IV; том IV.

AN APPROXIMATE SOLUTION OF TORSION PROBLEM OF PRISM WITH SMALL HOLE

LI YU-CHANG

(Nanchang First Middle School)

ABSTRACT

In this paper, a method of superposition is given for the determination of approximate stress function of prism with small hole in torsion. The approximate stress function consists of two parts. The first part is the solution of torsion problem for a simply connected region bounded by the exterior boundary of the given prism. The second part is the solution of Von-Neumann problem in the exterior region of the small hole.

The boundary value of second part on the small hole is determined so that the superposition of these two solutions gives free boundary condition on the surface of hole. It can be shown that the effect of second solution is concentrated in the neighbourhood of the small hole.