

貝塞爾函數的近似計算在 調頻制中的應用*

林 爲 幹

(華南工學院電訊工程系)

一. 引 言

在近代通訊所用的訊號中,一般應進行某一定方式的調制,即在發送的高頻電流瞬時值

$$i = I_m \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (1)$$

中,改變其中所包含的三個量(振幅 I_m , 相角 φ 或頻率 ω) 之一;即是說要使發送的電流的振幅、相角或頻率隨着調制電流(所需要傳送的低頻訊號)而變,此三種方式分別稱爲調幅、調相及調頻。

如所週知,爲了提高傳輸音質和消除天電或其他人工的干擾,在超高頻通訊中,每利用調頻或調相制。由於在調頻制中的頻帶利用率較高於調相制,故前者的應用尤爲普遍。

調頻制的計算和設計,涉及貝塞爾函數的應用,其計算往往甚爲複雜。本文的目的是企圖將貝塞爾函數的若干近似處理方法應用於調頻制的設計和計算中,使讀者對此制更易於了解、掌握和運用,同時也簡化了設計此系統中所需的頻帶及其他運行數據的計算。

二. 調 頻 制 的 特 性

在調頻過程中,頻率的週期性改變是按如下的規律進行:

$$\omega_1 = \omega_0(1 + m_f \cos \Omega t), \quad (2)$$

其中 $\Omega = 2\pi F$ 是調制訊號的角頻率, m_f 是調頻係數,決定於調制訊號振幅的大小。

*1955 年 5 月 30 日收到。

調頻電流為

$$i = I_{m_0} \sin(\omega_0 t + M_f \sin \Omega t), \quad (3)$$

(3) 式中的 M_f 代表調制時頻率的改變, 叫做調頻指數或頻率偏移係數. 利用貝塞爾函數, 式 (3) 可書為:

$$\begin{aligned} i = I_{m_0} \{ & J_0(M_f) \sin \omega t + J_1(M_f) [\sin(\omega_0 + \Omega)t - \sin(\omega_0 - \Omega)t] \\ & + J_2(M_f) [\sin(\omega_0 + 2\Omega)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega)t] \\ & + J_3(M_f) [\sin(\omega_0 + 3\Omega)t - \sin(\omega_0 - 3\Omega)t] + \dots \}. \end{aligned} \quad (4)$$

或者, 因 $\Delta\omega_0 = m_f \omega_0 = M_f \Omega$, $\Delta\omega_0 = 2\pi \Delta f_0$, 此處 Δf_0 代表頻率的偏移, 等於載頻 f_0 與調制係數 m_f 的乘積, 當調制訊號振幅不變時, Δf_0 亦是一恆定不變的量. 利用這一關係式, (4) 可以寫成下式:

$$\begin{aligned} i = I_{m_0} \left\{ & J_0\left(\frac{\Delta f_0}{F}\right) \sin \omega_0 t + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\Delta f_0}{F}\right) [\sin(\omega_0 + n\Omega)t + (-1)^n \sin(\omega_0 - n\Omega)t] \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

由 (5) 式可見調頻電流包含有無窮個旁頻, 第 n 個旁頻的振幅為 $J_n\left(\frac{\Delta f_0}{F}\right)$, 第一種第 n 階的貝塞爾函數; 但在實際通訊系統中只須保留有限個旁頻即可維持完滿的通訊. 為了說明這一點, 我們把 $J_n\left(\frac{\Delta f_0}{F}\right)$ 寫成下面的形式:

$$J_n\left(\frac{\Delta f_0}{F}\right) = J_n\left(n \frac{\Delta f_0}{nF}\right) = J_n(xn),$$

其中 $x = \frac{\Delta f_0}{nF}$;

當 $n > \frac{\Delta f_0}{F}$ 時, $x < 1$, 由貝塞爾函數理論^[1]已知 $J_v(vx)$ 在 $0 < x \leq 1$ 時是 v 的正的下降函數, 而在 $x > 1$ 時則 $J_v(vx)$ 將不復為 v 的單調函數, 故可知當

$$x = \frac{\Delta f_0}{n_0 F} = 1,$$

即有一 n_0 的值,

$$n_0 = \frac{\Delta f_0}{F}. \quad (6)$$

當 $n > n_0$ 時, $J_n\left(\frac{\Delta f_0}{F}\right)$ 即為正的下降函數, 而且其減少的速度甚大, 故在實際的發送系統中, 從 $n > n_0$ 以後的旁頻振幅 $J_n\left(\frac{\Delta f_0}{F}\right)$ 是下降的, 故發送系統

的頻帶寬度只須是 $2n_1 F$, $n_1 > n_0$, 即可得到滿意的通訊; 此 n_1 究竟取什麼值, 以下我們再談。

在 $x = 1$ 時, $J_v(v) = J_n(n)$ 一值是一個臨界值, 比值 $J_v(vx)/J_v(v)$, ($0 < x \leq 1$), 具有特別意義, 此一比值代表自 $n = n_0$ 以後所有的旁頻振幅對臨界旁頻振幅 $J_n(n)$ 之比, 我們又知道此一比值在 $0 < x \leq 1$ 時是 v 的不增函數^[1]。

現在讓我們看看一個調頻的訊號的例子^[2]。設最大頻率偏移規定為 $\Delta f_0 = 75$ 千赫, (a) 如 $\mathcal{Q}_1 = 2\pi F_1$, $F_1 = 15$ 千赫, 則 $M_f = \frac{75}{15} = 5$, 此時旁頻的分佈如圖 1 (a) 所示; (b) 如 $\mathcal{Q}_2 = 2\pi F_2$, $F_2 = 7.5$ 千赫, 則 $M_f = \frac{\Delta f_0}{\mathcal{Q}_2} = 10$, 旁頻的分

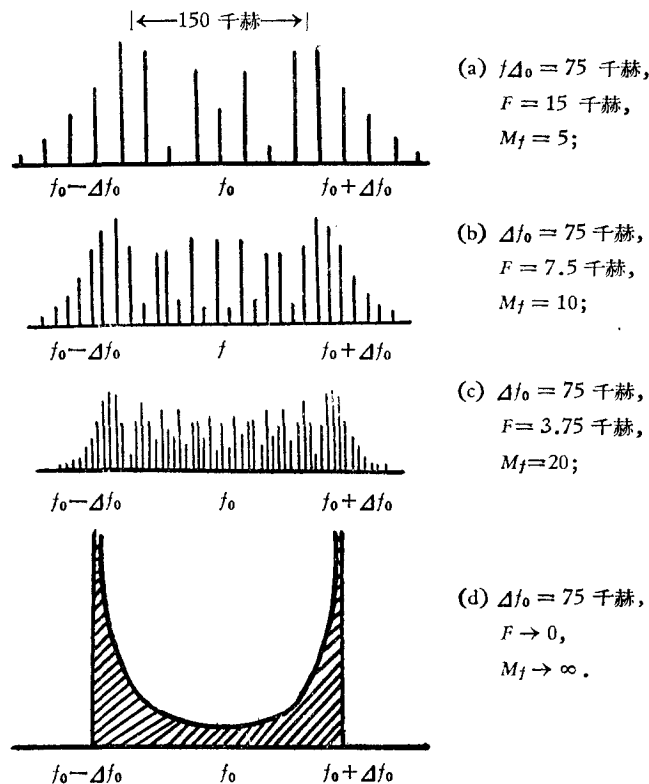


圖 1. 在同一頻率偏移 Δf_0 , 不同調制頻率時調頻電流的頻譜分佈圖

佈如圖 1 (b) 所示; (c) 如 $\mathcal{Q}_3 = 2\pi F_3$, $F_3 = 3.75$ 千赫, 則 $M_f = \frac{\Delta f_0}{F_3} = 20$, 旁頻的分佈則是如圖 1 (c) 所示。在這三種調制頻率中, 爲了要傳送所有不太小的旁頻, 發送系統所需的頻帶寬度決定於需要保留的旁頻數目及旁頻間的間隔,

由圖 1 (a), (b), (c) 可見當調制頻率 F 減低時則旁頻間的間隔減少, 但所需的旁頻數 $n_1 > n_0 = \frac{\Delta f_0}{F}$ 則增加, 故在調頻制中, 當 Δf_0 維持不變時, 調制頻率 F 的變動對於所需的頻帶寬度不致有太大的影響. 如 F 減少以至趨於零, 則 $M_f = \frac{\Delta f_0}{F} \rightarrow \infty$, 故所需的旁頻數目無限增加, 但旁頻間的間隔則無限減少. 我們現在問, 所需的頻帶寬度是不是一個有限值? 試以 A_n 代表第 n 個旁頻的振幅, A_0 代表載頻的振幅, 則

$$\frac{A_n}{A_0} = \frac{J_n\left(\frac{\Delta f_0}{F}\right)}{J_0\left(\frac{\Delta f_0}{F}\right)} = \frac{J_n(\rho)}{J_0(\rho)};$$

其中 $\rho = n \frac{\Delta f_0}{nF} = n \frac{\Delta f_0}{\Delta f}$; $\Delta f = nF$, 即當 F 無限減少而 n 無限增加時, $\Delta f = nF$ 代表第 n 個旁頻離開載頻 f_0 的距離, 亦即是說, $f_0 + \Delta f = f_0 + nF$ 是第 n 個旁頻在頻譜上的位置. 又因 Δf_0 是最大頻率偏移, 故

$$\frac{\Delta f}{\Delta f_0} \leq 1,$$

因而可令^[3]

$$n = \rho \cos \alpha,$$

則由貝塞爾函數的漸近值理論^[3]可以得到下列的關係式:

$$A_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \rho \sin \alpha}} \text{ 及 } A_0 \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}},$$

故
$$\frac{A_n}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} = \frac{1}{(1 - \cos^2 \alpha)^{1/4}} = \left[1 - \frac{\Delta f}{\Delta f_0}\right]^{-1/4}.$$

此即當 $F \rightarrow 0$ 時無限個旁頻所構成的連續頻譜的包絡線的方程, 繪成如圖 1 (d). 由此圖可見, 如 F 趨於零, 而最大頻率偏移 Δf_0 保持不變, 則我們的發送系統所需的頻帶寬度就是 $2\Delta f_0$; 當 F 不太小時, 我們所需的頻帶寬度要比 $2\Delta f_0$ 稍為大一點才能把所有不太小的旁頻包括在內 (見圖 1, a, b, c). 但究竟要比 $2\Delta f_0$ 大多少呢? 這一個問題我們可以從 $J_n(x)$ 表列數據中找到解答^[4,6], 但以下我們將提出應用貝塞爾函數的近似處理法來解決這一個問題.

三. 貝塞爾函數的近似計算法

以上我們談及 $J_n(n)$ 在調頻系統中是一臨界值, 我們又談到當 $n_1 > n_0 = \frac{\Delta f_0}{F}$ 時則 $J_{n_1}\left(\frac{\Delta f_0}{F}\right)$ 以後的旁頻振幅即變為不重要, 現在讓我們看看如何近似地求

得 $J_n(n)$ 的值和求得此 n_1 的值.

試取貝塞爾方程

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (7)$$

其中 v 爲任意數, 當 v 取整數值時, 我們記作 $v = n$, 如果 $x = v$, 則在貝塞爾方程 (7) 中, 末一項變爲零, 故 (7) 變爲

$$y'' + \frac{1}{x} y' = 0,$$

其通解爲

$$y = A + B \log x.$$

因此我們可以認爲

$$J_v(v) = A + B \log v. \quad (8)$$

在半對數圖紙上, 此方程應是一直線, 如將 A, B 常數求出, 即得:

$$J_v(v) = 0.3354 - 0.0576 \log v. \quad (8')$$

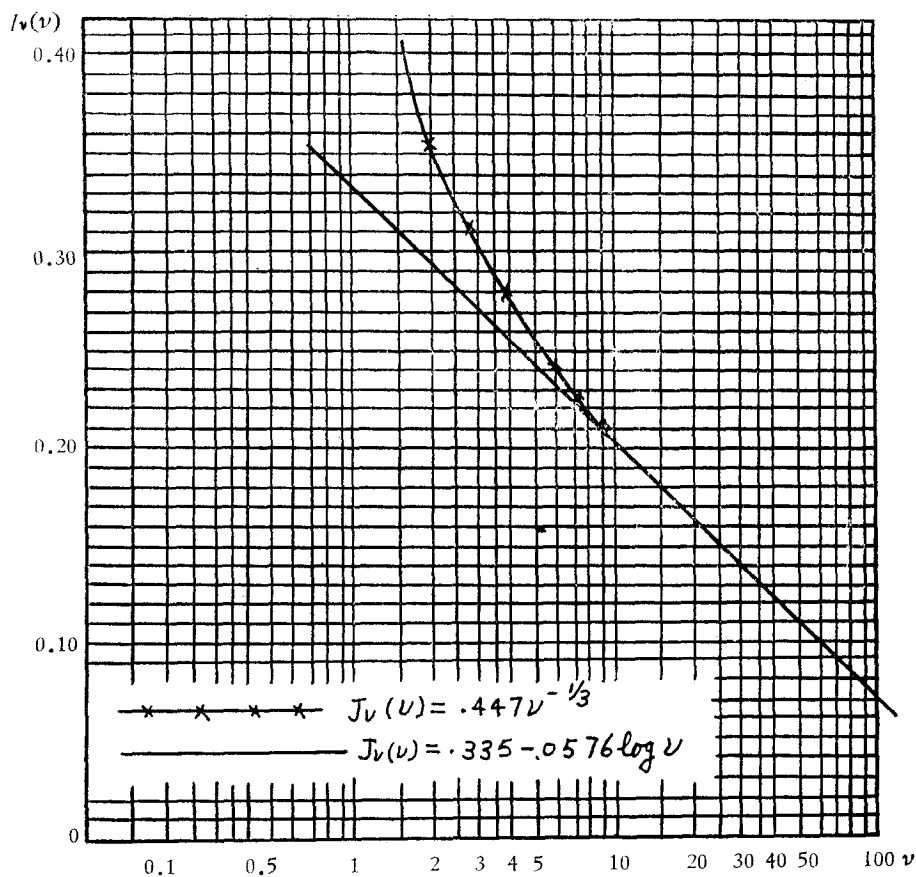


圖 2. $J_v(v)$ 的近似曲線.

實際上當 $\nu \geq 8$ 時式 (8) 才相當準確; 這也是很顯然的, 只有當 ν 和 x 都相當大時, 我們才能保證當 x 稍為變動時我們仍有 $\frac{n}{x} \cong 1$ 的關係, 然後才能略去式 (7) 中最後一項; 如與勾犀 (Cauchy) 的近似式^[1]

$$J_\nu(\nu) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{2/3} 3^{1/6} \pi \nu^{1/3}} = 0.447 \nu^{-1/3}$$

相比較, 則當 $n > 8$ 時, 由此式所得到的點亦落在此半對數圖紙的直線上, 如圖 2 所示. 實用上, 如圖 1 的例所示, 在整個調制頻段 0—15 千赫中, 主要的訊號能量所集中的地方 M_f 都相當大, 一般是在 10 以上, 故用式 (8') 或圖 2 可以估計臨界旁頻的振幅 $J_n(n)$ 值, 即估計頻率為 $f_0 \pm \Delta f_0$ 的旁頻的振幅.

爲了要估計臨界旁頻以外的旁頻振幅的變化情況, 我們再取 (7), 如 $\nu \gg x$, 則 (7) 可以寫成

$$x^2 y'' + xy' - \nu^2 y = 0.$$

此式是著名的尤拉方程, 如以 $z = \log x$ 代替自變數 x , 即得到一常係數線性微分方程

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - \nu^2 y = 0,$$

其解是

$$y = A e^{-\nu z} + B e^{\nu z}.$$

如代入 $z = \log x$, 即得到

$$y = A x^{-\nu} + B x^\nu.$$

亦即是說, 當 $\nu \gg x$ 時, 我們得到

$$J_\nu(x) = A x^{-\nu} + B x^\nu; \quad (9)$$

此處 A 及 B 可能是 ν 的函數, 如果將此式與貝塞爾第一類第 ν 階函數的展開式

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m}}{m! (\nu+m)!}$$

相比較, 當 $\nu \rightarrow \infty$ 時, 如上式的分母中的 $\nu!$, $(\nu+m)!$ 以史斗林 (Stirling) 公式代入, 則在 $J_\nu(x)$ 的展開式中我們可以只取第一項, 即

$$J_\nu(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\nu!}, \quad (\nu \gg x). \quad (10)$$

故在 (9) 式中, 我們可以取

$$A = 0, \quad B = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \frac{1}{\nu!},$$

即當 $\nu \gg x$ 時, $J_\nu(x)$ 取 (10) 的形式. 圖 3 的曲線代表正確的 $J_n(\beta)$ [5],

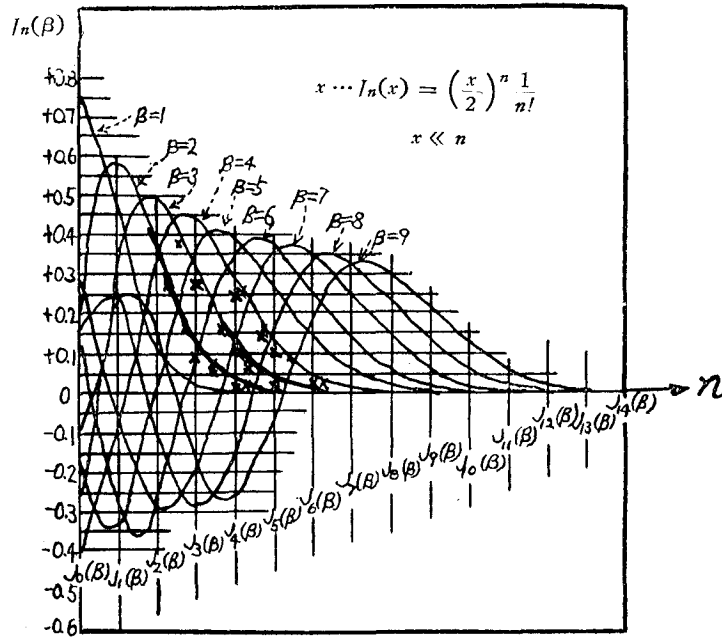


圖 3. $J_n(x)$ 作為 n 的函數的曲線

按照 (10) 式所計算出來的 $J_n(x)$ 值落在這些曲線之下, 但其變化的形狀則與原來的曲線的變化形狀相同, 故此 (10) 式可以用作估計 $n_1 > n_0$ 時 $J_{n_1}(n)$ 對臨界旁頻 $J_{n_0}(n_0)$ 振幅的比值. 設 $n_1 = n_0 + r$, 由 (10) 可見

$$\begin{aligned} \frac{J_{n_0}(n_0)}{J_{n_0+r}(n_0)} &= \left(\frac{n_0}{2}\right)^r \frac{n_0!}{(n_0+r)!} \\ &= \frac{1}{2^r} \frac{n_0}{n_0+1} \frac{n_0}{n_0+2} \frac{n_0}{n_0+3} \cdots \frac{n_0}{n_0+r} \leq \frac{1}{2^r}. \end{aligned} \quad (11)$$

可見臨界旁頻後第 r 個旁頻振幅對臨界旁頻振幅之比小於 $\frac{1}{2^r}$, 如規定此比值應小於 0.1, 則取 $r=4$ 已足够了, 即我們所需的頻帶寬度應等於 $n_0+4 = \frac{\Delta f_0}{F} + 4$

個旁頻所佔的頻段；如要求頻帶寬度要包括振幅為無調制時的振幅的某一百分數時，則須按 (8') 式或圖 2 及 (11) 式進行計算 r 的值。

四. 結 論

調頻制與調幅制不同，在調頻制中，調頻指數的改變不影響發射的瞬時或平均功率的改變，只影響發射功率在發射的頻譜內的分配；但此調頻指數的改變會影響發射的旁頻的數目和旁頻振幅的分佈形狀。在臨界旁頻以內，各旁頻的振幅值不是旁頻的次數 n 的單調函數，但在此臨界旁頻之外，各旁頻的振幅是 n 的迅速下降函數，故調頻制中所需的發送頻帶寬度只要比臨界旁頻所佔的頻帶稍為寬一點就足够了。此臨界旁頻的振幅可按式 (8') 或圖 2 求出，而臨界旁頻以外的旁頻振幅則可按 (9) 式算出，或按 (11) 式算出其對臨界旁頻振幅的比值，從而可以算出需要保留臨界旁頻以外若干個旁頻才能滿足一定的通訊要求。

本文經華南工學院馮秉銓教授校閱，他並提出了寶貴的意見，作者謹向馮秉銓教授表示感謝。

參 考 文 獻

- [1] Watson, G. N., Theory of Bessel Functions, §8.5, p. 152; §8.52, p. 257; §8.2, p. 231; §8.53, p. 258.
- [2] Goldman, Frequency Analysis, modulation and noise, §5.2, p. 146.
- [3] Sommerfeld, A., Partial differential Equations in Physics, §2.1, D, p. 116.
- [4] Новаковский, С. В. и Самойлов, Р. П., Техника частотной модуляции в радиовещании, §2.2, p. 31,
- [5] Hund, Frequency Modulation, §6, p. 19.
- [6] Зездный, А. М., О ширине спектра при частотной и фазовой модуляции, Радиотехника м. 9, № 3, p. 47, 1954.

APPLICATION OF THE APPROXIMATE EVALUATION OF BESSEL FUNCTIONS TO FREQUENCY MODULATION SYSTEM

LIN WEI-GUAN

(Department of Communication Engineering, South China Polytechnical Institute)

ABSTRACT

In frequency modulation system the change of the percentage modulation affects the bandwidth of the transmitted signal. Outside the critical sideband the amplitude of all the higher order sidebands is a positive decreasing function of the order of the sidebands. In this paper we give an approximate determination of amplitude of this critical sideband as given by equation (8) or fig. (2); given also are the approximate magnitude of any side band above the critical and the ratio of the amplitude of any sideband above the critical to that of the critical, equation (11). By means of these two equations we can design the bandwidth of the transmission system by retaining a certain number of significant sidebands above the critical.

