

某些傅里葉級數的求和法

林 爲 幹

(華南工學院電訊系)

一. 引 言

在許多工程問題中,如整流,接焊,電視等等,週期性的非正弦函數如電流或電壓時時出現,如果這些電壓和電流是由傅里葉級數的形式表出,則因為這類問題中的電壓或電流中的諧波豐富而各諧波的遞減又相當慢,所以如果要對這些級數進行計算,則須要取級數的許多項方能得到適當的準確度,如果必須把傅里葉級數形式的電壓或電流的解繪成曲線,則計算尤其麻煩. 所以,把無窮項的傅里葉級數變為閉合形式的表示式,即無窮項傅里葉級數的求和法實在有其重大的實用意義,這一個問題最近還有人討論過^[1],本文的目的是將這問題的範圍推廣,即將能够處理的傅里葉級數的類型推廣.

二. 基 本 原 理

本文所用的方法是將某些類型的傅里葉級數看作線性、集總電路的反應函數,亦即是說,我們將原來的傅里葉級數看成另一個週期性非正弦外力加諸某一線性集總電路所引起的反應函數(電流或電壓),如果代表這一外力的傅里葉級數可以變成閉合形式的表示式,則原來的傅里葉級數即可藉電路技術寫成閉合形式的表示式. 更詳細的說,讓我們取下列的傅里葉級數:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t] \quad (1)$$

或
$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega t - \varphi_n); \quad (2)$$

其中 A_n , B_n , C_n 及 φ_n 是 n 和 ω 的函數. 如果 C_n 和 φ_n 間有如下的關係:

$$\varphi_n = \psi_n + \theta_n, \quad (3)$$

$$C_n e^{-i\theta_n} = \frac{dn}{Z(jn\omega)}, \quad (4)$$

$$\text{或者} \quad C_n e^{-i\theta_n} = dn \frac{Z_1(jn\omega)}{Z(jn\omega)}, \quad (5)$$

而且我們得到下列的傅里葉級數：

$$e(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} dn \sin(n\omega t - \psi_n), \quad (6)$$

則級數 (6) 可認為是作用的外加週期性的非正弦外力；如 (2) 式的係數及相角滿足 (3) 和 (4) 兩式，則 (2) 式代表具有阻抗函數為 $Z(jn\omega)$ 的網絡在 (6) 作用下所產生的反應函數(電流)；如 (2) 式的係數和相角滿足 (3) 和 (5) 兩式，則 (2) 代表具有阻抗函數 $Z(jn\omega)$ 的網絡的某一元件阻抗 $Z_1(jn\omega)$ 在 (6) 作用下所具有的電壓。不論 (2) 的係數和相角滿足 (3) 和 (4) 抑或 (3) 和 (5)，只要我們能用綜合網絡的方法或由直接觀察把這一網絡函數 $Z(jn\omega)$ 實現出來，則可把具有這一阻抗函數的電路求出來。又如作用外力的傅里葉級數可以寫成閉合形式的週期性函數，則應用下面的電路技術，便可把 (2) 式(亦即 (1) 式) 變為閉合的形式。作用外力傅里葉級數 (6) 較原式 (2) 簡單，故有時可以由直接觀察看出它是代表什麼圖形的週期性函數，或者可用參考文獻 [1] 的方法把它所代表的週期函數求出。

三. 兩邊的拉普拉斯變換

運算微積或拉普拉斯變換在電路理論中有着廣泛的應用；兩邊的拉普拉斯變換在近代電路問題中更起着重大的作用，這種變換可以表如下面的積分方程^[2]：

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi j} \left[\int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} \bar{\varphi}_+(p) e^{pt} dp + \int_{\sigma_2 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty} \bar{\varphi}_-(p) e^{pt} dp \right]; \quad (7)$$

$$\text{其中} \quad \bar{\varphi}_+(p) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt, \quad (8)$$

$$\bar{\varphi}_-(p) = \int_{-\infty}^0 \varphi(t) e^{-pt} dt. \quad (9)$$

在 (8) 式中 $p = \sigma_1 + j\omega$ ($\sigma_1 > 0$)，而在 (9) 式中 $p = \sigma_2 + j\omega$ ($\sigma_2 < 0$)， σ_1 和 σ_2 的選擇是要分別比 σ_1^0 和 σ_2^0 大 (在絕對值方面來說)， σ_1^0 和 σ_2^0 是 σ_1 和 σ_2 中的最小(絕對值)的、仍令 (8) 和 (9) 式中絕對可積條件成立的值。

如 $\varphi(t)$ 是週期函數，其週期為 T ，則

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_+(p) &= \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \\
 \bar{\varphi}_+(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} \varphi(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \varphi(\tau + kT) e^{-p(\tau + kT)} d\tau \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT} \int_0^T \varphi(t) e^{-pt} dt = \frac{\bar{\varphi}_T(p)}{1 - e^{-pT}}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

在上式中，因為 $\operatorname{Re}(p) > 0$ ，故所得到的是一個絕對收斂的幾何級數，可以寫成 (10) 式，其中

$$\bar{\varphi}_T(p) = \int_0^T \varphi(t) e^{-pt} dt. \tag{11}$$

同樣地，我們有

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_-(p) &= \int_{-\infty}^0 \varphi(t) e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re}(p) < 0, \\
 \bar{\varphi}_-(p) &= -\frac{\bar{\varphi}_T(p)}{1 - e^{-pT}}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

由 (10) 及 (12) 可見，

$$\bar{\varphi}(p) = \bar{\varphi}_+(p) = -\bar{\varphi}_-(p) = \frac{\bar{\varphi}_T(p)}{1 - e^{-pT}}. \tag{13}$$

故對於週期性函數 $\varphi(t)$ ，(7) 式可寫成

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_L \bar{\varphi}(p) e^{pt} dp, \tag{14}$$

其中積分途徑 L 包含 L_1 及 L_2 兩直線，平行於 p 面的虛軸，分別距虛軸 σ_1 及 σ_2 的距離。(14) 式型的反變換與一邊的拉普拉斯反變換不同的地方是在於其積分途徑包含 L_1 及 L_2 兩直線，因而在求 (14) 式型的積分值時我們可以更大的隨意性來完成閉合的積分

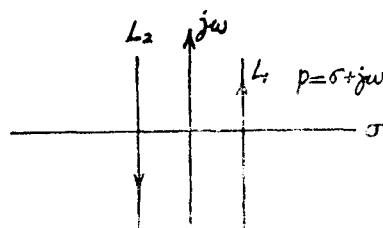


圖 1

環路。譬如，讓我們將這種變換式應用於在週期性的外力作用下的電路的問題中去。試取如下的電路的微分方程

$$a_n \frac{d^n \varphi}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} \varphi}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d\varphi}{dt} + a_0 \varphi = e(t), \tag{15}$$

其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 是代表電路參數的常數， $e(t)$ 是週期性的外力，週期為 T ，即

$$e(t) = e(t + T). \quad (16)$$

由於線性電路的因果關係，我們也可以預見 $\varphi(t)$ 是一週期性函數，且其週期亦是 T ，即

$$\varphi(t) = \varphi(t + T). \quad (17)$$

故如取 (15) 式左右兩邊的拉普拉斯的 (8) 式型的變更，並應用 (10) 式、(12) 式和 (13) 式，即可得出 $\varphi(t)$ 的兩邊拉普拉斯變換如下：

$$\bar{\varphi}(p) = \left\{ \frac{\bar{e}_T(p)}{1 - e^{-pT}} + F(i^{(n-1)}(0), i^{(n-2)}(0), \dots, i(0), a_n, a_{n-1} \dots) \right\} \div \left\{ a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0 \right\}; \quad (18)$$

其中

$$\bar{e}_T(p) = \int_0^T e(t) e^{-pt} dt,$$

而 $F = F(p)$ 代表 $\varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}}$ 在 $t = 0$ 時所構成的“初具條件”函數。如果我們只要求得到穩態的解，則可不考慮此一函數，故其準確的形式也不需要知道。因為，如取 $\bar{\varphi}(p)$ 的反變換

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_L \left\{ \frac{\bar{e}_T(p)}{Z(p)(1 - e^{-pT})} + \frac{F(p)}{Z(p)} \right\} e^{pt} dp, \quad (18')$$

其中 $Z(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$ ；由無源電路對自由振蕩的穩定性可知， $Z(p) = 0$ 的根是在虛軸上或左半面上，我們可以把積分途徑 L_2 變形以使所有 $Z(p) = 0$ 諸點均在 $L = L_1 + L_2$ 之外，因而 (18') 式中的被積函數的第二項在 L 內無異點；根據勾犀定理，其積分值為零。故 $i(t)$ 的穩態的解可寫成

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_L \frac{\bar{e}_T(p)}{Z(p)(1 - e^{-pT})} e^{pt} dp. \quad (19)$$

為便於計算，如將 (19) 中

$$\bar{e}_T(p) = \int_0^T e(t) e^{-pt} dt$$

寫成

$$\bar{e}_T(p) = \bar{E}_0(p) + \bar{E}_1(p) e^{-pb_1 T} + \bar{E}_2(p) e^{-pb_2 T} + \dots + \bar{E}_k(p) e^{-pb_k T}, \quad (20)$$

$$0 < b_1 < b_2 < b_3 < \dots,$$

則代入 (19) 後，我們將得到如下形式的解^[3]（只適用於 $0 < t < b_1 T$ 中）：

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{L_1} \frac{E_0(p)}{Z(p)} e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{L_2} \frac{\bar{e}_T(p)}{Z(p)(1-e^{-pT})} e^{pt} dp, \quad (21)$$

其中第一個積分是常見的拉普拉斯反變換；第二個積分是沿圖 1 的 L_2 進行，只須計及 $Z(p) = 0$ 的留數，不必計及 $(1 - e^{-pT}) = 0$ 諸點的留數。（ $\bar{e}_T(p)$ 一式也可能帶來一些極點，當然這些極點的留數是要計及的。）

四．舉 例

在本節中，我們將舉例說明上節所錄的兩邊拉普拉斯變換在電路問題中的應用，然後再舉例闡明我們所提出的傅里葉級數的求和法。

例 1. 一如圖 2 所示的非正弦電動勢作用於一 R, C 串聯迴路，試求電流 $i(t)$ 。

由 (19) 式可知，

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_L \frac{\bar{f}_T(p)}{(R + \frac{1}{Cp})(1 - e^{-pT})} e^{pt} dp.$$

如果我們計算 $1 - e^{-pT} = 0$ 諸零點 $P_k = \frac{2k\pi}{T}j$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的留數，則將得到一如普通交流理論中所得到的傅里葉級數形式的解：

$$i(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \frac{\sin[k\omega t + \varphi_k]}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}};$$

其中 $\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \varphi_k = \tan^{-1} \frac{1}{Rk\omega C}.$

如果我們變動 L_1 或 L_2 以避免 $P_k = \frac{2k\pi}{T}j$ 的留數的計算，則我們得到閉合形式的解。試利用 (20) 及 (21) 式，

$$f(t) = E \frac{t}{T}, \quad 0 < t < T;$$

故
$$\bar{f}_T(p) = \frac{E}{T} \int_0^T t e^{-pt} dt = E \left[\frac{1 - e^{-pT}}{Tp^2} - \frac{e^{-pT}}{p} \right],$$

即
$$\bar{f}_T(p) = \frac{E}{T} \frac{1}{p^2} - \frac{E}{p} \left(1 + \frac{1}{Tp} \right) e^{-pT}.$$

即是說

$$\bar{E}_0(p) = \frac{E}{T} \frac{1}{p^2}, \quad \bar{E}_1(p) = -\frac{E}{p} \left(1 + \frac{1}{Tp} \right), \quad b_1 = 1.$$

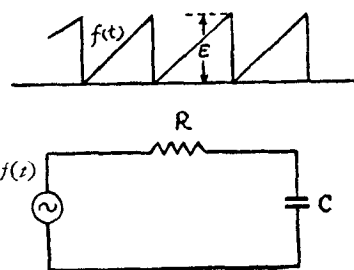


圖 2

故由 (21) 得到:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{L_1} \frac{E}{T} \frac{1}{p^2} \left(r + \frac{1}{Cp} \right) \frac{e^{pt}}{p} dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{L_2} \left[\frac{1}{Tp^2} - \frac{e^{-pT}}{p(1-e^{-pT})} \right] \frac{e^{pt}}{r+1/Cp} dp, \\ 0 < t < T;$$

其中第一項是通常的拉普拉斯反變換,其結果雖可以直接寫出,但第一個積分中 $P = -\frac{1}{rC}$ 所貢獻的值適與第二個積分的第一項在 $P = \frac{1}{rC}$ 所得的值相抵消,故在計算這一個 $i(t)$ 的值時,對第一個積分只須求 $P = 0$ 處的留數,而對第二個積分則只須計算被積函數第二項所能貢獻的值,此第二項

$$\frac{e^{(t-T)p}}{p(1-e^{-pT}) \left(r + \frac{1}{Cp} \right)}$$

在 $0 < t < T$ 間,當 $|p| \rightarrow \infty$ 而 $\text{Re}(p) < 0$ 時趨於零,故我們在 L_2 上作一個在左半面的半圓,沿 L_2 和這半圓所成的閉合環路的積分等於 $2\pi j$ 和 $p = -\frac{1}{rC}$ 的留數的乘積,故總的結果是

$$i(t) = \frac{E}{T} C \left[1 + \frac{T}{RC} \frac{e^{-t/rC}}{1-e^{-T/rC}} \right], \quad 0 < t < T.$$

例 2. 試求下式的非級數形式的表示式:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega t - \varphi_k)}{k\sqrt{1+(k\omega a)^2}}, \quad (22)$$

$$\varphi_k = \arctan k\omega a.$$

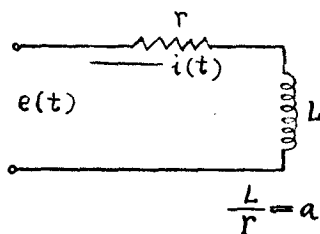


圖 3

觀察此式,可以把它當作圖 3 所示的電阻電感電路在下列外力作用下所產生的反應(電流與電阻的乘積,即 $f(t) = i(t)r$):

$$e(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega t)}{k} \quad (23)$$

現在我們取 (23) 式的變換: 逐項地取 (23) 式的拉普拉斯變換:

$$\bar{e}(p) = \frac{1}{2p} - \frac{\omega}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2\omega^2} \\ = \frac{1}{2p} - \frac{\omega}{\pi p^2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left\{ (2k-1) \frac{\omega}{p} \right\}^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left\{ \frac{k2\omega}{p} \right\}^2} \right]. \quad (24)$$

但我們已知^[1]：

$$\tanh \tau p = \frac{2}{\tau p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left\{ (2k-1) \frac{\pi}{2\tau p} \right\}^2}, \quad (25)$$

$$\coth \tau p = \frac{1}{\tau p} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{k\pi}{\tau p} \right)^2} \right\}. \quad (26)$$

又知，如令

$$A_k = e^{-k\tau p} = \exp(-k\tau p),$$

則

$$\tanh ap = 1 - 2A_2 + 2A_4 - 2A_6 + \dots, \quad (27)$$

$$\coth ap = 1 + 2A_2 + 2A_4 + 2A_6 + \dots. \quad (28)$$

如將 (24) 式中的兩個級數分別與 (25) 及 (26) 式比較，則 (24) 式可寫成下式：

$$\bar{e}(p) = \frac{1}{2p} + \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4p} \left[\tanh \frac{\pi}{2\omega} p + \coth \frac{\pi}{2\omega} p \right]$$

$$\text{或} \quad \bar{e}(p) = \frac{1}{T} \frac{1}{p^2} - \left[\frac{1}{p} e^{-pT} + \frac{1}{p} e^{-2pT} + \frac{1}{p} e^{-3pT} + \dots \right]; \quad (29)$$

其中

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

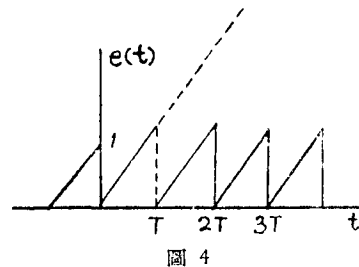
代表週期性函數 $e(t)$ 的週期。

現在讓我們取 (29) 式的反變換：第一項的反變換是 $\frac{1}{T} t$ ，而 $\frac{1}{p} e^{-pT}$ 的反變換是

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} e^{-pT} \right\} = \begin{cases} 0, & t < T; \\ 1 & t > T. \end{cases}$$

故 (23) 式的原函數可繪如圖 4 所示，或解析地如下式所示的週期性函數：

$$e(t) = \frac{1}{T} t, \quad 0 < t < T. \quad (30)$$



現在我們看出 (22) 式是週期性外力 (30) 加諸圖 3 所示的電路所生的反應，故由 (19) 可知，

$$f(t) = ri(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_L \frac{\bar{e}_T(p)}{(1+ap)(1-e^{-pT})} e^{pt} dp,$$

其中 L 是如圖 1 所示的積分途徑， $\bar{e}_T(p)$ 如上例所示是

$$\bar{e}_T(p) = \frac{1}{T} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{Tp} \right) e^{-pT}, \quad b_1 = 1.$$

進行積分後，即得到

$$f(t) = \frac{t}{T} - \frac{1}{\alpha T} + \frac{e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}}, \quad 0 < t < T, \quad (31)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

其中 $\alpha = \frac{1}{a}$. (31) 式即 (22) 式在 $0 < t < T$ 區間中的和式，在此區間之外， $f(t)$ 週期地重複. (22) 式又可繪成圖 5，此圖 5 亦是 (22) 的和式.

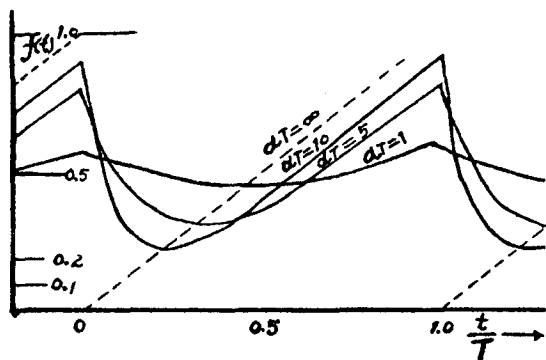


圖 5

例 3. 試求下式的非級數形式的表示式：

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \sin \{(2k-1) \omega t - \varphi_{2k-1}\}}{(2k-1) \sqrt{1 + \left\{ (2k-1) \omega a - \frac{1}{(2k-1) \omega b} \right\}^2}}, \quad (32)$$

其中

$$\varphi_k = \arctan \left\{ (2k-1) \omega a - \frac{1}{(2k-1) \omega b} \right\}.$$

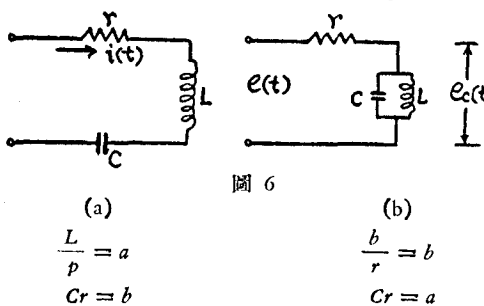


圖 6

觀察 (32) 式後，我們可以把它當作如圖 6a 或 6b 所示的電路在下列外力作用下所起的反應（在圖 6a 此反應函數代表 $ri(t)$ ，而在圖 6b 中此反應代表電容器兩端的電壓 $e_c(t)$ ）：

$$e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \sin (2k-1) \omega t}{(2k-1)},$$

由觀察或用例 2 所引用的方法^[1]，可知此外力 $e(t)$ 代表一方形波如圖 7 所示，或者解析地表示如下：

$$e(t) = \left. \begin{aligned} &= \pi, & 0 < t < \frac{T}{2}; \\ &= -\pi, & \frac{T}{2} < t < T. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

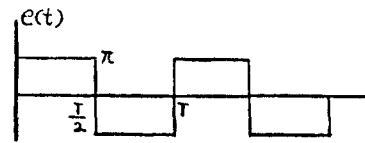


圖 7

讓我們將 (33) 式的外力加諸圖 6b 的電路中去，並寫出反應函數 $e_c(t)$ 的運算式子，

$$\bar{f}_T(p) = \bar{e}_{cT}(p) = \frac{\bar{e}_T(p)}{1 + ap + \frac{1}{bp}},$$

將此式代入 (19) 式，

$$f(t) = e_c(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_L \frac{\bar{e}_T(p) e^{pt}}{\left(1 + ap + \frac{1}{bp}\right) (1 - e^{-pT})} dp; \quad (34)$$

其中 L 是如圖 1 所示的積分途徑， $\bar{e}_T(p)$ 和 $\bar{e}(p)$ 可由 (33) 寫出：

$$\bar{e}_T(p) = \pi \int_0^{T/2} e^{-pt} dt + \pi \int_{T/2}^T (-e^{-pt}) dt = \frac{E}{p} (1 - e^{-p \frac{T}{2}})^2$$

$$\text{或} \quad \bar{e}_T(p) = \frac{\pi}{p} - \frac{2\pi}{p} e^{-p \frac{T}{2}} + \frac{\pi}{p} e^{-pT}, \quad E_0(p) = \frac{\pi}{p}, \quad b_1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{而且} \quad \bar{e}(p) = \frac{\bar{e}_T}{(1 - e^{-pT})} = \frac{\pi}{p} \tanh\left(\frac{pT}{4}\right).$$

將 (34) 式寫成 (21) 式的樣子，即得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{L_1} \frac{\pi e^{pt}}{\left(p + ap^2 + \frac{1}{b}\right)} dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{L_2} \frac{\pi \tanh\left(\frac{pT}{4}\right)}{\left(p + ap^2 + \frac{1}{b}\right)} e^{pt} dp, \quad 0 < t < \frac{T}{2}.$$

當 $0 < t < \frac{T}{2}$ 時，兩個積分的值可由 $p + ap^2 + \frac{1}{b} = 0$ 的根的留數的計算求出；令

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2a} \pm j \sqrt{\frac{1}{ab} - \frac{1}{4a^2}} = -m \pm jn,$$

則對上式 $f(t)$ 的兩個積分求 p_1 和 p_2 的留數，即得到

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\pi}{a} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{p_1 t}}{2p_1 + \frac{1}{a}} + \frac{\tanh \frac{p_1 T}{4}}{2p_1 + \frac{1}{a}} e^{p_1 t} \right] \\ &= \pi \frac{m}{n} e^{-mt} \left[\frac{\sin nt + e^{-mT/2} \sin n \left(t - \frac{\pi}{2} \right)}{1 + 2e^{-mT/2} \frac{nT}{2} + e^{-mT/2}} \right], \quad 0 < t < \frac{T}{2}; \end{aligned} \quad (35)$$

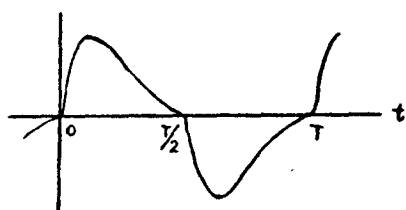


圖 8

其中 $\text{Re}[\]$ 表示取 $[\]$ 的實數部分。

由 (33) 式或由圖 7 可知

$$e(t) = -e\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

故我們可知

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right),$$

即在 $\frac{T}{2} < t < T$ 範圍內, $f(t)$ 變號。由 (35) 我們可以繪出 $f(t)$ 的圖形, 亦即級數 (32) 的和式。 $\omega^2 LC = 0.236$, $\omega CR = 1.0$, $\omega = 2\pi/T$ 時的圖形如圖 8 所示^[1]。

五. 結 論

本文所討論的方法,主要是將傅里葉級數 (1) 或 (2) 變為較簡單的級數 (6), 如級數 (6) 可以由觀察或應用對 $\tanh ap$, $\coth ap$, $\frac{1}{\sinh ap}$, $\frac{1}{\cosh ap}$ 的運算寫成閉合的形式(如例 2 所示), 則我們可以利用穩態的運算技術把 (1) 或 (2) 寫成閉合的,適宜於計算的形式。

參 考 文 獻

- [1] L. A. Pipes, The Summation of Fourier Series by Operational Methods *J. Appl. Phys.*, **21**, 4, 298-301, 1950.
- [2] М. И. Конторович, операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, 技術理論文獻出版社,莫斯科, 1953, 第十章.
- [3] И. С. Гоноровский, радиосигналы и переходные явления в радиоцепях, 通訊及無線電問題文獻出版社,莫斯科, 1954, p. 132
- [4] Waidehlich, Steady-state Operational calculus. *Proc. IRE*, **34**, p. 78, 1946.

THE SUMMATION OF CERTAIN FOURIER SERIES

LIN WEI-GUAN

(Department of Communication Engineering, South China Polytechnical Institute)

ABSTRACT

A method is presented here to sum certain type of Fourier series. The series is treated as a response function of a linear electric circuit with lumped constants. This electric circuit, subjected to the action of an external force expressed in the form of another Fourier series derived from the original series to be summed can be formed by inspection or by network synthesis. If this derived series can be put into a closed form, then by applying the steady-state operational technique to this electric circuit, the original series can be expressed in a closed form or in a graphical form.