

在經典電動力學中縱場的消除*

張 宗 燧

(北京師範大學)

在量子電動力學中消除電磁場的縱部分,是人所共知的;在那裏在消除縱部分的過程中,我們曾利用在波函數上洛倫茲條件受到了滿足的事實。因此我們可以想像在經典電動力學中,直接地援用一個尋常的“變數的切觸變換”去消除縱部分,是有困難的,事實上。當 Heitler^[1] 企圖在經典電動力學中用一個切觸變換去消除縱場時,這個變換顯得極“奇異”。在他的計算中,原來應該表出新舊變數的關係的式子,有些成為只含有舊變數的式子,有些成為只含有新變數的式子。這樣,討論便喪失了說服力。

顯然地,正確的證明方法應該是研究洛倫茲條件如何地簡化了原來的哈密頓-雅谷比方程。用這個方法,我們不難在電磁場的正則方程中消去了縱場(見 §3)。另一方面,Heitler 的方法並不是不能改進的。在 §2 中,我們改進了他的方法,獲得了在電磁場的正則方程中消除縱場的另一個證明。

最後在 §4 中我們討論應用多時理論 (многовременный формализм) 而設法消去縱波時的情形,指出了在這方面已有的理論結果是有問題的。為讀者參考方便起見,我們將已知關於電磁場而為我們所必須參考的理論及公式,列在 §1 中。

§1. 電磁場的縱場橫場所適合的微分方程及 電磁場的正則方程。

令 x_μ 為 (x, y, z, ict) , A_μ 為 $(A_1, A_2, A_3, i\varphi)$ ($A_1 A_2 A_3$ 代表矢量勢 $\mathbf{A}$, φ 代表標勢), 又令

$$H_{\mu\nu} = (\partial A_\nu / \partial x_\mu - \partial A_\mu / \partial x_\nu), \quad (1)$$

*1955 年 8 月 16 日收到。

又令磁場 $\mathbf{H}$ 的分量 H_x, H_y, H_z 為 $H_{\mu\nu}$ 的 23, 31, 12 分量, 電場 $\mathbf{E}$ 的分量 E_x, E_y, E_z 為 i 乘以 $H_{\mu\nu}$ 的 14, 24, 34 等分量, 便使麥克斯韋方程組中不含有電流電荷的式子獲得了滿足. 麥克斯韋方程組中另外的式子為

$$\partial H_{\mu\nu}/\partial x_\nu = (4\pi j_\mu/c); \quad (2)$$

式中 j_μ 代表電流向量 $(\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, ic\rho)$.

選擇矢量勢 $\mathbf{A}$, 使之滿足

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (3)$$

便自 (2) 中獲得

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z, t) = -4\pi\rho(x, y, z, t), \quad (4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - c^{-2}(\partial^2 \mathbf{A}/\partial t^2) = -(4\pi/c) \mathbf{j}', \quad (5)$$

式中 $\mathbf{j}'$ 代表 $\mathbf{j}$ 的橫部分, 等於

$$\mathbf{j} - (4\pi)^{-1}(\partial \nabla \varphi / \partial t),$$

也等於

$$(1 - \nabla^{-2} \nabla \nabla \cdot) \mathbf{j}.$$

以 $\mathbf{A}, \varphi$ 代入

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - c^{-1}(\partial \mathbf{A} / \partial t), \quad (6)$$

便知道了 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ 如何分解為縱場及橫場.

在這樣的討論中, 我們將 $\varphi(x, y, z, t)$ 認為是

$$\int \rho(x', y', z', t) dx' dy' dz' / r, \quad (r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)$$

而將 (5) 認為是運動方程. 這個運動方程可以寫為正則方程的形式. 為方便起見, 引入 $\mathbf{A}, \mathbf{j}'$ 的傅里葉展開:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \int (a_{1\mathbf{k}} \mathbf{e}_{1\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{k}} \mathbf{e}_{2\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}, \\ \mathbf{j}'(\mathbf{x}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \int (h_{1\mathbf{k}} \mathbf{e}_{1\mathbf{k}} + h_{2\mathbf{k}} \mathbf{e}_{2\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

式中 $\mathbf{e}_{1\mathbf{k}}, \mathbf{e}_{2\mathbf{k}}$ 代表二個單位向量, 與 $\mathbf{k}$ 垂直, 滿足

$$\mathbf{e}_{1\mathbf{k}} = \mathbf{e}_{1, -\mathbf{k}}, \quad \mathbf{e}_{2\mathbf{k}} = \mathbf{e}_{2, -\mathbf{k}} \quad (8)$$

$\mathbf{k}$ 代表三維空間中向量, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ 代表 $k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$, $d^3\mathbf{k}$ 代表 $dk_1 dk_2 dk_3$, 而 $a_{1\mathbf{k}}, a_{2\mathbf{k}}, h_{1\mathbf{k}}, h_{2\mathbf{k}}$ 為 t 的函數. (5) 即成為

$$-\hbar^2 a_{\alpha k} - c^{-2} \ddot{a}_{\alpha k} = -(4\pi/c) h_{\alpha k} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (9)$$

($\dot{a}, \ddot{a}$ 代表 $da/dt, d^2a/dt^2, \dots$ 等等). 讓我們引入一個質點, 坐標為 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , 速度為 $\mathbf{v}$, 那末, j_μ 等於

$$(e \mathbf{v} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), ic \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})),$$

$$(\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \delta(x_3 - \xi_3)).$$

因此

$$h_{\alpha k} = (2\pi)^{-3/2} \int \mathbf{j}^t \cdot e_{\alpha k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} = (2\pi)^{-3/2} \int \mathbf{j} \cdot e_{\alpha k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}$$

$$= (2\pi)^{-3/2} e(\mathbf{v} \cdot e_{\alpha k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}}.$$

許多質點所產生的 $\mathbf{j}, h$ 乃是上式對不同質點的取和. 不難證明, 如果令哈密頓 H 為

$$\sum_i c \{ m^{(i)2} c^2 + (\mathbf{p}^{(i)} - e^{(i)} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})/c)^2 \}^{1/2} + U_{cs} + H_{rad}, \quad (10)$$

$$U_{cs} = \frac{1}{2} \int \rho \varphi d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int (\rho \rho'/r) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}'$$

$$= \frac{1}{2} \sum \sum e^{(i)} e^{(j)} / r_{ij} = \sum_{i>j} \sum e^{(i)} e^{(j)} / r_{ij}, \quad (11)$$

$$H_{rad} = \int \sum_{\mathbf{k}} \{ (2\pi c^2) (p_{\alpha k} p_{\alpha, -k}) + (8\pi)^{-1} \hbar^2 a_{\alpha k} a_{\alpha, -k} \} d^3\mathbf{k},$$

式中 $\mathbf{p}^{(i)}$ 代表 i 質點的動量, $p_{\alpha k}$ 代表 $a_{\alpha k}$ 的動量, 又如果令 $H = \int d^3\mathbf{k} H_{\mathbf{k}}$, 那末以下的正則方程

$$d\boldsymbol{\xi}^{(i)}/dt = \partial H / \partial \mathbf{p}^{(i)}, \quad d\mathbf{p}^{(i)}/dt = -\partial H / \partial \boldsymbol{\xi}^{(i)}, \quad (12)$$

$$da_{\alpha k}/dt = \delta H / \delta p_{\alpha k} = \partial H_{\mathbf{k}} / \partial p_{\alpha k},$$

$$dp_{\alpha k}/dt = -\partial H / \delta a_{\alpha k}$$

$$= -\left\{ \frac{\partial H_{\mathbf{k}}}{\partial a_{\alpha k}} - \frac{\partial}{\partial k_i} \frac{\partial H_{\mathbf{k}}}{\partial (\partial a_{\alpha k} / \partial k_i)} \right\} \quad (13)$$

與 (9) 式及各個質點的運動方程

$$m d^2 \xi_\mu / ds^2 = (e/c) H_{\mu\nu} (d\xi_\nu / ds) \quad (14)$$

完全等效. (ξ_μ 為質點的時空坐標, s 為原時.) 理論的缺點是我們曾在 (11) 式右方取去了電子的本身庫倫能, 免得 U_{cs} 成為無窮大.

縱橫場不明顯地分開時的情形如下. 拉格朗日函數 $\mathbf{S}$ 可以寫為 $\int L dt$, 而

$$L = - \sum_i m^{(i)} c^2 \{ 1 - \mathbf{v}^{(i)2}/c^2 \}^{1/2} + \sum_i (e^{(i)}/c) A_\mu(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, t) (d\xi_\mu^{(i)}/dt) +$$

$$+ \int d^3\mathbf{x} \{ - (8\pi)^{-1} (\partial A_\rho / \partial x_\theta) (\partial A_\rho / \partial x_\theta) \}. \quad (15)$$

引入

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (a_{1k} \mathbf{e}_{1k} + a_{2k} \mathbf{e}_{2k} + i a_{3k} \mathbf{e}_{3k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}, \\ A_4(\mathbf{x}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \int i a_{0k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k} \end{aligned} \quad (16)$$

($\mathbf{e}_{3k} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$), 使 (15) 式中後二項成爲

$$\int d^3\mathbf{k} L_k$$

的形式。(注意 (16) 式中的 “ i ” 字樣。由於 $\mathbf{e}_{\alpha k}$ 與 $\mathbf{e}_{\alpha, -k}$ 中的關係及 (16) 式中的 i 字樣的引入, 我們得 $a_{\alpha, k}$ 與 $a_{\alpha, -k}$ 對於任何 $\alpha, \mathbf{k}$ 都互爲複輓數的結果。) 引入 $\mathbf{p}^i, p_{\alpha k}, H$,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^i &= \partial L / \partial \mathbf{v}^{(i)}, \quad p_{\alpha k} = \partial L_k / \partial \dot{a}_{\alpha k}, \\ H &= \sum_i \mathbf{p}^i \mathbf{v}^{(i)} + \int d^3\mathbf{k} p_{\alpha k} \dot{a}_{\alpha k} - L, \end{aligned} \quad (17)$$

便獲得了質點與電磁場的總哈密頓

$$\begin{aligned} H &= \sum_{(i)} c \{ m^{(i)2} c^2 + [\mathbf{p}^{(i)} - e^{(i)} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})/c]^2 \}^{1/2} \\ &+ \sum_i \int d^3\mathbf{k} (2\pi)^{-3/2} e^{(i)} a_{0k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}^{(i)}) \\ &+ \sum_{\alpha} \operatorname{sgn} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} \{ 2\pi c^2 p_{\alpha k} p_{\alpha, -k} + (8\pi)^{-1} k^2 a_{\alpha k} a_{\alpha, -k} \}; \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\operatorname{sgn} \alpha$ 代表 1 (當 $\alpha = 1, 2, 3$), 代表 -1 (當 $\alpha = 0$)。不難證明正則方程

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\xi}^{(i)} / dt &= \partial H / \partial \mathbf{p}^{(i)}, \dots \\ da_{\alpha k} / dt &= \partial H / \partial p_{\alpha k}, \quad dp_{\alpha k} / dt = -\partial H / \partial a_{\alpha k}, \dots \\ &(\alpha = 1, 2, 3, 0) \end{aligned} \quad (19)$$

與 (14) 式及

$$\{ \nabla^2 - c^{-2}(\partial^2 / \partial t^2) \} A_\mu = - (4\pi/c) j_\mu \quad (20)$$

完全等效。爲使得 (20) 與 (2) 相等起見, 我們必須引入起始條件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + c^{-1}(\partial \varphi / \partial t) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \varphi - 4\pi \rho = 0. \quad (22)$$

由 (6), 知 (22) 即是 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. 在 $t = 0$ 的 (21), (22) 使 (21) 在任何時刻都滿足, 因而使 (20) 與 (2) 相等. 它們也使 (22) 在任何時刻都滿足. 用 $a_{\mathbf{k}}, p_{\mathbf{k}}$ 來表出, 它們成爲

$$\hbar a_{3\mathbf{k}} + 4\pi c p_{0,-\mathbf{k}} = 0, \quad (\hbar = |\mathbf{k}|) \quad (23)$$

$$4\pi c \hbar p_{3,-\mathbf{k}} + \hbar^2 a_{0\mathbf{k}} - 4\pi (2\pi)^{-3/2} \sum e^{(i)} \exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)}) = 0. \quad (24)$$

我們的問題即在如何將 (18) 變爲 (10) 式, 而同時將 (19) 式變爲 (12), (13) 式.

本節包含了許多人所共知的材料, 但爲了解以下的理論起見, 幾乎是必須的.

§2. 第一個證明

讓我們討論依照 (19) 式而進行的, 而又滿足起始條件 (23), (24) 的運動. 令 $\Omega_{\mathbf{k}}$ 定義爲

$$\Omega_{\mathbf{k}} = \{ \hbar a_{0\mathbf{k}} - 4\pi \hbar^{-1} (2\pi)^{-3/2} \sum e^{(i)} \exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)}) \} a_{3,-\mathbf{k}}.$$

顯然地,

$$\begin{aligned} d\Omega_{\mathbf{k}} &= \{ \hbar a_{0\mathbf{k}} \} da_{3,-\mathbf{k}} + a_{3,-\mathbf{k}} \hbar da_{0\mathbf{k}} \\ &\quad - a_{3,-\mathbf{k}} 4\pi \hbar^{-1} (2\pi)^{-3/2} \sum e^{(i)} \exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)}) (-i) \mathbf{k} \cdot d\boldsymbol{\xi}^{(i)} \\ &= -4\pi c p_{3,-\mathbf{k}} da_{3,-\mathbf{k}} - 4\pi c p_{0\mathbf{k}} da_{0\mathbf{k}} \\ &\quad - 4\pi i (2\pi)^{-3/2} \sum e^{(i)} a_{3,-\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}^{(i)}) (-\mathbf{k}/\hbar) \cdot d\boldsymbol{\xi}^{(i)}. \end{aligned} \quad (25)$$

因此令

$$\Omega = \int d^3\mathbf{k} \Omega_{\mathbf{k}} (4\pi c)^{-1}, \quad (26)$$

得

$$\begin{aligned} d\Omega &= - \int d^3\mathbf{k} \{ p_{3\mathbf{k}} da_{3\mathbf{k}} + p_{0\mathbf{k}} da_{0\mathbf{k}} \} \\ &\quad - \sum (e^{(i)}/c) \mathbf{A}^{\text{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) \cdot d\boldsymbol{\xi}^{(i)}. \end{aligned} \quad (27)$$

$d\Omega$ 可以由起始條件的變化而來, 也可以由時間的變化而得來. 對於前一種變化, 得

$$\delta\Omega = - \int d^3\mathbf{k} \{ p_{3\mathbf{k}} \delta a_{3\mathbf{k}} + p_{0\mathbf{k}} \delta a_{0\mathbf{k}} \} - \sum (e^{(i)}/c) \mathbf{A}^{\text{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) \cdot \delta\boldsymbol{\xi}^{(i)}. \quad (28)$$

(注意起始條件不論如何變化, 我們限制它必須滿足 (23), (24).) 對於後一種變化, 得

$$\dot{Q} = - \int d^3\mathbf{k} \{ p_{3k} \dot{a}_{3k} + p_{0k} \dot{a}_{0k} \} - \sum (e^{(i)}/c) \mathbf{A}^{\text{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) \cdot (d\boldsymbol{\xi}^{(i)}/dt). \quad (29)$$

在 (28) 上取對時間的變化, 在 (29) 上取對於起始條件的變化, 相減, 得

$$- \int d^3\mathbf{k} \{ p_{3k} \delta a_{3k} - \delta p_{3k} \dot{a}_{3k} + p_{0k} \delta a_{0k} - \delta p_{0k} \dot{a}_{0k} \} \\ - \sum_i \frac{d}{dt} \left\{ \frac{e^{(i)}}{c} \mathbf{A}^{\text{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) \right\} \delta \boldsymbol{\xi}^{(i)} + \sum_i \delta \left\{ \frac{e^{(i)}}{c} \mathbf{A}^{\text{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}) \right\} \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}^{(i)}}{dt} = 0. \quad (30)$$

現在討論哈密頓 (18) 對於起始條件的變化:

$$\delta H = \sum_{(i)} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\xi}^{(i)}} \delta \boldsymbol{\xi}^{(i)} + \sum_{(i)} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^{(i)}} \delta \mathbf{p}^{(i)} + \sum_{\alpha=1,2,3,0} \int d^3\mathbf{k} \left\{ \frac{\partial H}{\partial a_{\alpha k}} \delta a_{\alpha k} + \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha k}} \delta p_{\alpha k} \right\} \\ = - \sum_i \frac{d\mathbf{p}^{(i)}}{dt} \delta \boldsymbol{\xi}^{(i)} + \sum_{(i)} \frac{d\boldsymbol{\xi}^{(i)}}{dt} \delta \mathbf{p}^{(i)} + \sum_{\alpha} \int d^3\mathbf{k} \left\{ - \frac{dp_{\alpha k}}{dt} \delta a_{\alpha k} + \frac{da_{\alpha k}}{dt} \delta p_{\alpha k} \right\}. \quad (31)$$

由此減去 (30), 得

$$\delta H = \sum_i \left\{ - \frac{d}{dt} [\mathbf{p}^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{c} \mathbf{A}^{\text{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})] \delta \boldsymbol{\xi}^{(i)} \right\} \\ + \sum \frac{d\boldsymbol{\xi}^{(i)}}{dt} \delta [\mathbf{p}^{(i)} - \frac{e^{(i)}}{c} \mathbf{A}^{\text{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})] \\ + \sum_{\alpha=1,2} \int d^3\mathbf{k} \left[- \frac{dp_{\alpha k}}{dt} \delta a_{\alpha k} + \frac{da_{\alpha k}}{dt} \delta p_{\alpha k} \right]. \quad (32)$$

注意在 (31) 右方末一項對 α 取和時, $\alpha = 1, 2, 3, 0$, 而在 (32) 末一項對 α 取和時, $\alpha = 1, 2$. 引入 $\mathbf{p}^*$, 定義為

$$\mathbf{p}^{(i)*} = \mathbf{p}^{(i)} - (e^{(i)}/c) \mathbf{A}^{\text{long}}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}), \quad (33)$$

便證明了 H 只是

$$\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \mathbf{p}^{(i)*}, a_{\alpha k}, p_{\alpha k} \quad (\alpha = 1, 2)$$

的函數. 因為在條件 (23), (24) 下, 它們依然可以認為是獨立的, 因此 (32) 右方 $\delta \boldsymbol{\xi}^{(i)}$ 的係數必須是 $\partial H / \partial \boldsymbol{\xi}^{(i)}$, 等等. 由此得

$$d\boldsymbol{\xi}^{(i)}/dt = \partial H / \partial \mathbf{p}^{(i)*}, \quad d\mathbf{p}^{(i)*}/dt = - \partial H / \partial \boldsymbol{\xi}^{(i)}, \\ da_{\alpha k}/dt = \partial H / \partial p_{\alpha k}, \quad dp_{\alpha k}/dt = - \partial H / \partial a_{\alpha k}, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (34)$$

而 H 為一個 $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{p}^*, a_{\alpha k}, p_{\alpha k}$ ($\alpha = 1, 2$) 的函數, 由利用 (23), (24) 去簡化 (18) 而獲得. 在 (23), (24) 中求出 p_{0k}, p_{3k} 如何為 a 等的函數, 代入 (18), 再利用

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{k^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}), \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\sum_{i>j} \frac{e^{(i)} e^{(j)}}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i \neq j} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{k^2} e^{(i)} e^{(j)} \exp i\mathbf{k}(\boldsymbol{\xi}^{(i)} - \boldsymbol{\xi}^{(j)}), \quad (35)$$

二式，便證明了 (34) 中的 $\mathbf{H}$ 等於 (10)，唯一的不同即是在此處的 $\mathbf{H}$ 中有 $\mathbf{p}^*$ 字樣，而在 (10) 式中我們用 $\mathbf{p}$ 字樣。這種不同當然是可以不必追究的。

§3. 第二個證明

上面的證明成功在乎 $\mathcal{Q}_k$ 的挑選；但在 $\mathcal{Q}_k$ 的選擇時，我們沒有任何原則作為依靠。因此以上的方法在一般理論中是不太有力的。

一個更好的方法是：(i) 引入一個與哈密頓 (18) 相應的雅谷比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\boldsymbol{\xi}, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \dots) = 0, \quad (36)$$

將 (19) 認為這個微分方程的特徵曲線；(ii) 證明在條件 (21), (22) 下，可以由函數 S 構成一個新函數 S' ，滿足一個新雅谷比方程

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + H'(\boldsymbol{\xi}, \frac{\partial S'}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \dots) = 0, \quad (37)$$

證明在條件 (21), (22) 下的一個 S 與一個 S' 相應；(iii) 最後，利用 S 上的一個特徵曲線與 S' 上的一個特徵曲線相應的事實，證明 (19) 式相應於 H' 的正則方程。當 (37) 中的 H' 不含有 A_4 及 $\mathbf{A}$ 的縱場時，我們便獲得了所需要的結果。

令 I 為

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, A_\mu, \dot{A}_\mu) dt \quad (38)$$

而積分項中的 $A_\mu, \boldsymbol{\xi}$ 適合歐厄勒 (Euler) 方程。該時不難證明 I 乃是 t_0, t_1 及在 t_0, t_1 時刻變數 $A_\mu, \boldsymbol{\xi}$ 的值的函數。用 $\boldsymbol{\xi}, a_{ak}$ 為變數，得

$$I = I(t_1, t_0, \boldsymbol{\xi}(t_1), \boldsymbol{\xi}(t_0), a_{ak}(t_1), a_{ak}(t_0)). \quad (39)$$

讓 $t_0, \boldsymbol{\xi}(t_0), a_{ak}(t_0)$ 固定下來， I 便成為 $t_1, a_{ak}(t_1), \boldsymbol{\xi}(t_1)$ 的函數，而這個函數滿足以 t_1 代替 t 的 (36)。

討論在條件 (21), (22) 下 I 對於 $t_1, a_{ak}(t_1), \boldsymbol{\xi}(t_1)$ 的變化，亦即尋常所稱的全變化 (Полный вариацион)。令積分 (38) 號下的 $a_{ak}(t), \boldsymbol{\xi}(t)$ 對於

一個固定的 t 而言有變化

$$\delta a_{\mathbf{ak}}(t), \delta \xi(t).$$

將積分 (38) 的上限 t_1 的變化寫為 Dt_1 , 將上限時刻 t_1 的 $a_{\mathbf{ak}}, \xi$ 的變化寫為 $Da_{\mathbf{ak}}, D\xi$, 那末由於 t_1 本身是變化的, 得

$$\begin{aligned} Da_{\mathbf{ak}} &= \delta a_{\mathbf{ak}}(t_1) + (da_{\mathbf{ak}}/dt)_{t_1} Dt_1, \\ D\xi &= \delta \xi(t_1) + (d\xi/dt)_{t_1} Dt_1. \end{aligned} \quad (40)$$

不難求出 I 的變化與 $Dt_1, Da_{\mathbf{ak}}, D\xi$ 的關係. 因為 (38) 積分號下的 A_μ, ξ 滿足歐厄勒方程, 我們得

$$\begin{aligned} \delta I &= \sum_{a=1,2,3,0} \int \frac{\delta L}{\delta \dot{a}_{\mathbf{ak}}} \delta a_{\mathbf{ak}} d^3\mathbf{k} + \sum \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \delta \xi^i + LDt_1 \\ &= \sum_a \int \frac{\delta L}{\delta \dot{a}_{\mathbf{ak}}} Da_{\mathbf{ak}} d^3\mathbf{k} + \sum \frac{\partial L}{\partial \xi^i} D\xi^i + Dt_1 (L - \sum \int \frac{\delta L}{\delta \dot{a}_{\mathbf{ak}}} \dot{a}_{\mathbf{ak}} d^3\mathbf{k} \\ &\quad - \sum \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \xi^i) \quad (\xi^i = d\xi^i/dt) \end{aligned} \quad (41)$$

如衆所共知, 上式稱為 I 的全部變化. 由此得

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta a_{\mathbf{ak}}} &= \frac{\delta L}{\delta \dot{a}_{\mathbf{ak}}} = p_{\mathbf{ak}}, \\ \frac{\partial I}{\partial \xi^i} &= \frac{\partial L}{\partial \xi^i} = p^i, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= -H\left(\xi, \frac{\partial I}{\partial \xi}, a_{\mathbf{ak}}, \frac{\delta I}{\delta a_{\mathbf{ak}}}\right). \end{aligned} \quad (42)$$

現在在 (41) 左方含有 $\delta a_{3\mathbf{k}}, \delta a_{0\mathbf{k}}$ 的項上利用 (21) (22) 作以下的改變,

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{k} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{3\mathbf{k}}} \delta a_{3\mathbf{k}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{0\mathbf{k}}} \delta a_{0\mathbf{k}} \right\} &= \int d^3\mathbf{k} \left\{ \frac{1}{4\pi c^2} (\dot{a}_{3,-\mathbf{k}} \delta a_{3\mathbf{k}} - \dot{a}_{0,-\mathbf{k}} \delta a_{0\mathbf{k}}) \right\} \\ &= \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{4\pi c^2} \left\{ [-\hbar c a_{0,-\mathbf{k}} + 4\pi (2\pi)^{-3/2} c \hbar^{-1} \sum e^{(i)} \exp(+i\mathbf{k}\xi^{(i)})] \delta a_{3\mathbf{k}} \right. \\ &\quad \left. - \hbar c a_{3,-\mathbf{k}} \delta a_{0\mathbf{k}} \right\} \\ &= \int d^3\mathbf{k} \left\{ \frac{1}{4\pi c^2} \delta [-\hbar c a_{0\mathbf{k}} a_{3,-\mathbf{k}} + 4\pi (2\pi)^{-3/2} c \hbar^{-1} a_{3\mathbf{k}} \sum e^{(i)} \exp(+i\mathbf{k}\xi^{(i)})] \right. \\ &\quad \left. - i(2\pi)^{-3/2} (c\hbar)^{-1} a_{3\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \sum e^{(i)} \exp(i\mathbf{k}\xi^{(i)}) \delta \xi^{(i)} \right\}, \end{aligned} \quad (43)$$

與 (41) 左方其他項合併, 得

$$\begin{aligned}
& \sum_{a=1,2} \int \frac{\delta L}{\delta \dot{a}_{a\mathbf{k}}} \delta a_{a\mathbf{k}} d^3\mathbf{k} + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^{(i)}} - \frac{e^{(i)}}{c} \mathbf{A}^{\text{long}}(\xi^{(i)}) \right) \delta \xi^i \\
& + LDt + \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{4\pi c^2} \delta \{ -\hbar c a_{0\mathbf{k}} a_{3,-\mathbf{k}} + 4\pi(2\pi)^{-3/2} c \hbar^{-1} a_{3\mathbf{k}} \\
& \sum e^{(i)} \exp(+i\mathbf{k}\xi^{(i)}) \}. \quad (44)
\end{aligned}$$

將最末一項中的被積分項改爲

$$\begin{aligned}
& \delta \left[-\frac{1}{4\pi\hbar c} a_{3,-\mathbf{k}} \{ a_{0\mathbf{k}} \hbar^2 - 4\pi(2\pi)^{-3/2} \sum e^{(i)} \exp(-i\mathbf{k}\xi^{(i)}) \} \right] \\
& = \delta [+ (4\pi c^2)^{-1} a_{3,-\mathbf{k}} \dot{a}_{3\mathbf{k}}] \\
& = D [(4\pi c^2)^{-1} a_{3,-\mathbf{k}} \dot{a}_{3\mathbf{k}}] - (4\pi c^2)^{-1} \dot{a}_{3,-\mathbf{k}} \dot{a}_{3\mathbf{k}} Dt \\
& \quad - (4\pi c^2)^{-1} a_{3,-\mathbf{k}} \ddot{a}_{3\mathbf{k}} Dt \\
& = D [(4\pi c^2)^{-1} a_{3,-\mathbf{k}} \dot{a}_{3\mathbf{k}}] - (4\pi c^2)^{-1} \dot{a}_{3,-\mathbf{k}} \dot{a}_{3\mathbf{k}} Dt + (4\pi)^{-1} a_{3,-\mathbf{k}} [\hbar^2 a_{3\mathbf{k}} \\
& \quad + i4\pi(2\pi)^{-3/2} c^{-1} \sum e^{(i)} (\mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{k}/\hbar) \exp(-i\mathbf{k}\xi^{(i)})] Dt. \quad (45)
\end{aligned}$$

(將第一行變爲第二行，我們用了(22)式，將 $\ddot{a}$ 消去時，我們用了含有 $\ddot{a}$ 的運動方程。) 現在令

$$\begin{aligned}
I' &= I - \int (4\pi c^2)^{-1} a_{3,-\mathbf{k}} \dot{a}_{3\mathbf{k}} d^3\mathbf{k}, \\
\mathbf{p}^{*i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} - \frac{e^{(i)}}{c} \mathbf{A}^{\text{long}}(\xi^i), \quad (46)
\end{aligned}$$

便獲得了

$$\begin{aligned}
\delta I' &= \{ L - \mathbf{p}^{*i} \dot{\xi}^{(i)} - \sum_{a=1,2} \int d^3\mathbf{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{a\mathbf{k}}} \dot{a}_{a\mathbf{k}} - \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3\mathbf{k} \dot{a}_{3,-\mathbf{k}} \dot{a}_{3\mathbf{k}} \\
& + \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{k} a_{3,-\mathbf{k}} [\hbar^2 a_{3\mathbf{k}} \\
& + i4\pi(2\pi)^{-3/2} c^{-1} \sum e^{(i)} (\mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{k})/\hbar \exp(-i\mathbf{k}\xi^{(i)})] \} Dt \\
& + \sum \mathbf{p}^{*(i)} D\xi^{(i)} + \sum_{a=1,2} \int d^3\mathbf{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{a\mathbf{k}}} D a_{a\mathbf{k}}. \quad (47)
\end{aligned}$$

將上式右方 Dt 的係數寫爲 $-H'$ ，得

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{p}^{*(i)} &= \partial I' / \partial \dot{\xi}^i, \\
p_{a\mathbf{k}} &= \partial L / \partial \dot{a}_{a\mathbf{k}} = \delta I' / \delta \dot{a}_{a\mathbf{k}}, \quad a = 1, 2, \\
I' &= I'(\mathbf{t}, \xi^i, a_{1\mathbf{k}}, a_{2\mathbf{k}}), \\
\frac{\partial I'}{\partial \mathbf{t}} + H' &= 0.
\end{aligned} \right\} \quad (48)$$

因 I' 爲 t, ξ^i, a_{1k}, a_{2k} 的函數, H' 也必然是它們的函數,

$$H' = H'(t, \xi^i, a_{1k}, a_{2k}). \quad (49)$$

另一方面, 自 (47) 右方 Dt 的係數, 知 H' 乃是

$$(\xi^{(i)}, p^{(i)*}, a_{\alpha k}, \dot{a}_{\alpha k}) \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

的函數. 利用 (21) (22), 可以將它改爲

$$(\xi^i, p^{i*}, a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, a_{0k}, \dot{a}_{1k}, \dot{a}_{2k})$$

的函數. 與以上的 (48), (49) 合併考慮, 得

$$H' = H'(\xi^i, p^{i*}, a_{1k}, a_{2k}, p_{1k}, p_{2k}). \quad (50)$$

因此 (49) 成爲

$$\frac{\partial I'}{\partial t} + H' \left(\xi^i, \frac{\partial I'}{\partial \xi^i}, a_{\alpha k}, \frac{\delta I'}{\delta a_{\alpha k}} \right) = 0. \quad (\alpha = 1, 2) \quad (51)$$

事實上, 直接計算 (47) 右方 Dt 的係數, 用 (21), (22) 來簡化, 便證實了 (50).

由這樣的計算, 我們獲得

$$\begin{aligned} H' = & -c \sum_i \{m^{(i)2} c^2 + (p^{*i} - e^{(i)} \mathbf{A}^i(\xi^i)/c)^2\}^{1/2} + U_{es} \\ & + \sum_{\alpha=1,2} \int d^3\mathbf{k} \{2\pi c^2 p_{\alpha k} p_{\alpha, -k} + (8\pi)^{-1} k^2 a_{\alpha k} a_{\alpha, -k}\}, \end{aligned} \quad (52)$$

與 (10) 完全相同.

討論 (42) 中像

$$-Wt + I^*(\xi, a_{\alpha k}) \quad (53)$$

的解. 對於這樣的解, 得

$$W = H \left(\xi, \frac{\partial I^*}{\partial \xi}, a_{\alpha k}, \frac{\delta I^*}{\delta a_{\alpha k}} \right), \quad \alpha = 1, 2, 3, 0. \quad (54)$$

當 I 成爲 (53) 時, I' 成爲

$$-Wt + I^{*'},$$

而 $I^{*'}$ 滿足

$$W = H' \left(\xi, \frac{\partial I^{*'}}{\partial \xi}, a_{\alpha k}, \frac{\delta I^{*'}}{\delta a_{\alpha k}} \right), \quad \alpha = 1, 2. \quad (55)$$

現在討論以上計算的意義. 上面所證明的乃是如果在 $I^*, a_{\alpha k}$ ($\alpha=1, 2, 3, 0$), ξ^i 所組成的空間中, 有一個曲面 f ,

$$I^* = I^*(\xi^i, a_{\alpha k}), \quad (56)$$

滿足 (54) 式, 而又如果 (21), (22) 受到了滿足, 那末由 f 面上的點的 $I^*, a_{\alpha k}$,

($\alpha = 1, 2, 3, 0$), ξ^i 的值所計算出來的 $I^{*'} , a_{\alpha k} (\alpha = 1, 2)$, ξ^i 構成了在 $I^{*'} , a_{\alpha k} (\alpha = 1, 2)$, ξ^i 的空間中的一個面 f' , 而 f' 滿足 (55) 式. 爲簡單起見, 我們說 f' 與 f 相應. 我們知道, 在前一個空間中二個如此的面 f_1, f_2 , 如果很鄰近, 它們的交線是微分方程 (54) 的特徵線. 由這條線上的 $I^*, a_{\alpha k} (\alpha = 1, 2, 3, 0)$, ξ^i 所計算出的 $I^{*'} , a_{\alpha k} (\alpha = 1, 2)$, ξ^i 顯然是與 f_1, f_2 相應的面 f'_1, f'_2 的交線, 因而是微分方程 (55) 的特徵線. 因此, 由 (54) 的特徵線上的 $I^*, \dots$ 等所算出 $I^{*'}, \dots$ 成爲 (55) 的特徵線. 但特徵線的微分方程即是正則方程, 因而證明了 (19) 式中 $a_{\alpha k} (\alpha = 1, 2)$, ξ^i 滿足 (12), (13) 式.

這個證明帶有普遍性, 可以用來討論任何有運動積分的正則方程的簡化. ((21), (22) 事實上可以認爲是運動積分.)

§4. 多 時 理 論

在經典電動力學的多時理論中, 運動方程爲

$$\left. \begin{aligned} d\xi_{\mu}^{(i)}/ds^{(i)} &= [\xi_{\mu}^{(i)}, H^{(i)}], \\ dp_{\mu}^{(i)}/ds^{(i)} &= [p_{\mu}^{(i)}, H^{(i)}], \\ \partial A_{\mu}(\mathbf{x}, t, s^1, s^2, \dots)/\partial s^{(i)} &= [A_{\mu}, H^{(i)}], \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$H^1, H^2, \dots$ 等爲

$$\begin{aligned} H^{(i)} &= (2m^{(i)})^{-1} \{ (p_{\rho}^{(i)} - e^{(i)} A_{\rho}^{(i)}/c) (p_{\rho}^{(i)} - e^{(i)} A_{\rho}^{(i)}/c) + m^{(i)2} c^2 \}, \\ A_{\rho}^{(i)} &\equiv A_{\rho}(\xi_{\mu}^{(i)}). \end{aligned} \quad (58)$$

各種不同的泊松括號爲:

$$\begin{aligned} [\xi_{\mu}^{(i)}, p_{\nu}^{(i)}] &= \delta_{\mu\nu}^{ij}, \quad [\xi, A] = [p, A] = 0, \\ [A_{\mu}(\mathbf{x}, t; s^1, s^2, \dots), A_{\nu}(\mathbf{x}', t'; s^1, s^2, \dots)] &= c \delta_{\mu\nu} D(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t'), \\ D(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{r} [\delta(ct + r) - \delta(ct - r)]. \end{aligned} \quad (59)$$

此外, A_{μ} 滿足

$$\begin{aligned} \partial^2 A_{\mu} / \partial x_{\nu} \partial x_{\nu} &= 0, \\ (\partial A_{\mu} / \partial x_{\mu}) - \sum e^i D(\mathbf{x} - \xi^i, t - t^i) &= 0. \end{aligned} \quad (60)$$

這些公式見 Dirac, Fock, Podolsky 所著論文^[2], 但此處符號略有不同. 在 Dirac

另一篇論文中^[3]，他用了一個切觸變換消去了縱場。在那裏他先將任何力學量 Q 認為是某一個量 τ 的函數，滿足

$$\frac{\partial Q^{(\tau)}}{\partial \tau} = [Q^{(\tau)}, G^{(\tau)}], \quad (61)$$

$$G^{(\tau)} = - \sum_i e^{(i)} c \int_0^{\tau^{(i)}} i A_4(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)}, t) dt,$$

而將 $Q^{(0)}$ 認為是原來的變數，將 $Q^{(1)}$ 認為是切觸變換後的變數。在 Dirac 的這篇論文中，在應用 (61) 去計算如何自原來的變數 p_r ($r = 1, 2, 3$) 變至新變數 p_r^* 的過程中，他曾用到了 (60) 式。但因為 (60) 式與一些變量如 p_r 所構成的泊松括號不等於零，變換便不再完完全全地是一個切觸變換。例如在變換前 i 質點的動量 $\mathbf{p}^i$ 與 j 質點的動量 $\mathbf{p}^j$ 滿足

$$[\mathbf{p}^i, \mathbf{p}^j] = 0, \quad (62)$$

它們的 r, s 分量滿足

$$[p_r^i, p_s^j] = 0,$$

但變換後的 p^* 適合

$$[p_r^{(i)*}, p_s^{(j)*}] \neq 0. \quad (63)$$

(這可以由 p^* 與 p 的關係直接證實)。注意即使我們藉助於 (60)，也不能使 (63) 左方等於零。

這一點的影響是：令 H^i 等表為新變數 $\xi^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{A}^*$ 的函數後，當我們假定 (59) 前二式對於新變數依然有效而又假定一個空間性向量兩端的 $\mathbf{A}^*$ 的泊松括號等於零，我們發現了當質點們相互在各個質點的光錐面之外時，

$$[H^i, H^j] \neq 0 \quad (64)$$

因而使新的 (57) 式沒有解。

可以簡單地證明：在多時理論中消去縱波幾乎是不可能的。由於在 $t_1 = t_2 = t_3 = \dots = t$ 時，哈密頓取 (10) 式，運動方程取 (12)，(13) 式，那末我們可以猜想在消去縱波的多時理論中

$$\begin{aligned} d\xi^{(i)}/dt^{(i)} &= [\xi^{(i)}, H^{(i)}], \\ d\mathbf{p}^{(i)}/dt^{(i)} &= [\mathbf{p}^{(i)}, H^{(i)}], \\ \partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t, t^1 t^2 \dots) / \partial t^i &= [\mathbf{A}, H^{(i)}] \end{aligned} \quad (65)$$

(注意符號 $\mathbf{A}$ 上本應有一“ i ”字，表示這個 $\mathbf{A}$ 為一橫場，但現在我們不將這個“ i ”寫出，以免符號上的誤會)，而 $H^{(i)}$ 為

$$c \{ m^{(i)2} c^2 + [\mathbf{p}^{(i)} - e^{(i)} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})/c + \sum_k \mathbf{f}^{ik}]^2 + \sum_k g^{ik} \}^{1/2} \\ + \frac{1}{2} e^{(i)} \sum_k e^{(k)} / r_{ik} + \sum_k h^{ik}; \quad (66)$$

式中 f^{ik} , g^{ik} , h^{ik} 爲某些 $\mathbf{x}^i$, t^i , $\mathbf{x}^k$, t^k 的函數, 而在 $t^i = t^k$ 時變爲零. 由此, 可以設想

$$\mathbf{f}^{ik} = \mathbf{f}_1^{ik}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^k)(t^i - t^k) + \mathbf{f}_2^{ik}(\dots)(t^i - t^k)^2 + \dots, \\ g^{ik} = g_1^{ik}(t^i - t^k) + \dots, h^{ik} = h_1^{ik}(t^i - t^k) + \dots \quad (67)$$

等式. (65) 有解的條件爲

$$\frac{\partial H^{(i)}}{\partial t^{(i)}} - \frac{\partial H^{(i)}}{\partial t^{(i)}} + [H^{(i)}, H^{(i)}] = 0. \quad (68)$$

以 (67) 代入 (66), 再以此代入 (68), 再令 $t^1 = t^2 = \dots$, 再稱 (66) 的曲括號中的項爲 Λ_i , 得

$$c \frac{1}{\Lambda_i} \{ [\mathbf{p}^i - e^{(i)} \frac{1}{c} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})] (-\mathbf{f}_1^{ij}) - g_1^{ij} \} \\ + c \frac{1}{\Lambda_i} \{ [\mathbf{p}^i - e^{(i)} \frac{1}{c} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}^{(i)})] \frac{1}{2} e^{(i)} e^{(j)} \frac{(-)(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)}{r_{ij}^3} \\ - h_1^{ij} + c \frac{1}{\Lambda_j} \{ \dots \} + \dots = 0; \quad 1)$$

由此求出

$$\mathbf{f}_1^{ij} = \frac{1}{2} e^i e^j \frac{\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j}{r_{ij}^3}, \quad g_1^{ij} = h_1^{ij} = 0. \quad (69)$$

以此代入 (67), 再代入 (66), 再代入 (68), 而令 $t^1, t^2, \dots$ 幾乎相等, 使我們可以忽略 $(t^1 - t^2)^2, (t^2 - t^3)^2, \dots$ 等等. (68) 的左方含有一項

$$c^2 \frac{1}{\Lambda_i \Lambda_j} [p_r^i - \frac{e^i}{c} A_r(\boldsymbol{\xi}^i)] [p_r^j - \frac{e^j}{c} A_r(\boldsymbol{\xi}^j)] \{ - \frac{\partial}{\partial x_r^i} (f_1^{ij})_s (t^j - t^i) \\ + \frac{\partial}{\partial x_r^j} (f_1^{ij})_s (t^i - t^j) \}.$$

因

$$\frac{\partial}{\partial x_r^i} (f_1^{ij})_s + \frac{\partial}{\partial x_r^j} (f_1^{ij})_s = e^i e^j \left\{ - \frac{\delta_{rs}}{r_{ij}^3} + 3 \frac{(x^i - x^j)_r (x^i - x^j)_s}{r_{ij}^5} \right\},$$

這一項不等於零, 也不同其他項抵消. 由此我們證明 (68) 不能被滿足, 亦即用

1) $[\Lambda_\mu, \Lambda_\nu]$ 對於我們所注意的 $t^1, t^2, \dots$ 而言是等於零的.

(66) 作為 $H^{(i)}$ 的 (65) 無解, 亦即我們沒有一個簡單的消去縱波的多時理論。

當然, H^i 可以不取 (66) 的形式, 但很難想像其他的形式。當我們只有一個質點 $(\mathbf{x}^{(1)}, t^{(1)})$, 那末 $f = g = h = 0$ 的 (66) 的確可以作為 $H^{(1)}$ 。由此可以猜想在許多質點在場時 H^i 也應取 (66) 的形式。因此, (66) 的使 (65) 無解幾乎可以令人相信消去縱波的多時理論的不存在。由於多時理論在量子電動力學中理論上的重要性, 這一點是值得注意的。

結 論

我們在此短文中嚴格地證明了在經典電動力學的正則方程中, 縱波的消除是可能的。第一個證明與 Heitler 的證明相類似, 但我們避免了他的切觸變換的奇異性。另一個是利用洛倫茲條件將原來的哈密頓-雅谷比方程簡化, 比較原來的雅谷比方程與簡化後的雅谷比方程, 因而證明了原來的正則方程所決定的運動即是一個新正則方程所決定的運動。這個方法的威力是較大的, 因為它可以用來簡化任何帶有運動積分的正則方程。

最後我們指出: 關於經典或量子電動力學中消去縱波的多時理論, 已有的理論有些缺點。自“解的存在”的討論, 我們說明了要建立一個簡單的這樣的理論是困難的。

參 考 文 獻

- [1] Heitler, W., Quantum theory of Radiation. 3rd ed. §6.
- [2] Dirac, P. A. M., В. Фок и Б. Подольский, *Sov. Phys.* 2, 468, (1932)
- [3] ———, Communication of Dublin Institute for advanced studies, Series A. No. 1.

ИСКЛЮЧЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ПОЛЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Чжан Цзун-суй

(Педагогический институт, пекин)

Известно, что в квантовой электродинамике можно исключить продольные составляющие поля. При этом используется тот факт, что волновая функция удовлетворяет условию Лорентца. Поэтому можно представить себе, что в классической электродинамике трудно исключить продольные составляющие поля прямым применением обычного контактного преобразования. В самом деле, контактное преобразование, с помощью которого Гайтлер пытался исключить продольные составляющие, оказалось особенным. В его вычислении некоторые из тех уравнений, в которых должна была выражена связь между исходными и новыми переменными, содержали только исходные переменные, а другие-только новые.

Нам кажется, что правильное доказательство должно заключаться в том, чтобы было исследовано, как упростить исходное уравнение Гамильтона-Якоби с помощью условия Лорентца. Продольные составляющие поля естественно исчезают из канонических уравнения, когда они выпадают из уравнения Гамильтона - Якоби.

Этим методом нами исключены продольные части из канонических уравнений электромагнитного поля (ниже §3). С другой стороны, можно усовершенствовать метод Гайтлера. Таким путем нами получено другое доказательство (§ 2).

Наконец, в § 4 рассмотрена попытка исключить продольные части поля в многовременной теории, и показано, что имеющиеся теоретические результаты по этому вопросу не безупречны.

