

懸樑的大撓度問題*

陳鳳初**

(清華大學)

引言

樑的初等彎曲理論(小撓度理論)假設樑在外力作用下變形很小即假設樑的撓度和斜率很小,以致

- (1) 樑未變形前的狀態可以認為是樑在外力作用下的平衡狀態;
- (2) 樑曲率公式中斜率的平方項可以忽略不計。

結果使得樑斷面撓矩的計算以及撓曲方程的積分運算大為簡化。

解決樑的大撓度問題時,由於樑的撓度和斜率並不小,樑本身變形所引起的外力作用的改變極為顯著;因此必須以樑在外力作用下真正的平衡狀態作為計算的根據,並把曲率公式中斜率的平方項考慮在內。由此可見,小撓度理論中藉以簡化的假設在大撓度問題中恰恰成為不能忽略的重要因素。

樑的大撓度問題實質上就是“細桿的平面彎曲問題”^[1],這方面蘇聯學者波波夫^[2]做過總結的工作,指出在某些比較特殊的載荷情況下可以得到橢圓積分的精確解,如

- (1) 端點受載荷;
- (2) 非端點處受集中載荷;
- (3) 除端點受載荷外,非端點處同時受法向均佈載荷等。

可惜波波夫文中所提到的有關參考文獻目前幾乎全找不到。

本文處理“懸樑在各式載荷作用下的大撓度問題”,用的是“攝動法”。此法錢偉長教授曾用來解過“薄圓板的大撓度問題”^[3],結果甚為圓滿。

* 1954 年 9 月 2 日收到。

** 現在北京石油學院。

近二十年來捷夫考特^[4]，潑秀^[5]，格羅斯及萊爾^[6]等人用近似法解過“懸樑自由端受集中載荷的大撓度問題”；另外，拜爾吞^[7]，碧斯霍普及朱拉克^[8]等人也用橢圓積分法解過同樣的問題。前一種近似法嫌計算瑣碎，不夠系統；後一種橢圓積分法結果雖然精確，可是並非簡單、明確的設計公式，很難適用於工程設計，並且遇到分佈載荷的情況解有困難。

攝動法比起上述兩種方法有下列優點：

- (1) 較其他近似法計算方便，系統性強；
- (2) 所得結果較橢圓積分的形式簡單；
- (3) 一般能解各式載荷作用下樑的大撓度問題。

本文以均等懸樑受鉛直方向均佈載荷作用為例來具體說明攝動法的應用，並將懸樑受各式載荷時計算所得結果列成一表供工程設計參考。應該指出，表中所載第 II 種載荷情況——懸樑自由端受鉛直方向集中載荷作用——的結果與潑秀^[5]所得一致。

一. 懸樑的基本假設及一般方程

在懸樑的大撓度問題中一般作下列四個基本假設：

- (1) 樑在縱向有一對稱平面，外力作用在此平面內；
- (2) 樑撓曲後斷面仍保持為平面；
- (3) 樑在大撓度情況下應變還是很小，應力應變關係仍服從虎克定律；
- (4) 樑撓曲後中心軸的長度不變。

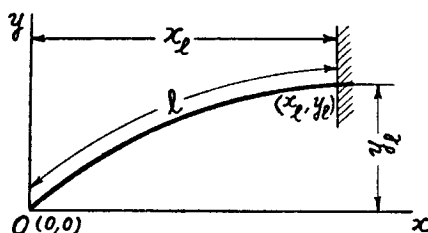


圖 1

根據上述基本假設可得懸樑中心軸的一般撓曲方程，長度不變條件及邊界條件如下(參閱圖 1)：

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M}{EI}, \quad (1)$$

$$\int_0^{x_l} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx = l, \quad (2)$$

$$\text{當 } x = 0 \text{ 時, } y = 0, \quad (3)$$

$$\text{當 } x = x_l \text{ 時, } \frac{dy}{dx} = 0, \quad (4)$$

$$\text{當 } x = x_l \text{ 時, } y = y_l; \quad (5)$$

其中

y 為懸樑撓曲後中心軸上各點的縱坐標，一般意義上可瞭解作撓度；

x 為懸樑撓曲後中心軸上各點的橫坐標；

$\frac{dy}{dx}$ 為懸樑撓曲後中心軸上各點的斜率；

M 為懸樑各斷面的撓矩；

E 為懸樑的彈性係數；

I 為懸樑斷面的慣性矩；

l 為懸樑中心軸的長度；

y_l 為懸樑撓曲後中心軸的最大撓度；

x_l 為懸樑撓曲後中心軸的最大跨度。

二、均等懸樑受鉛直均佈載荷作用的撓曲方程及其解法

鉛直均佈載荷作用下的均等懸樑 x 斷面的撓矩為(參閱圖 2)。

$$M = \int_0^s (x - \xi) \cdot q \, ds; \quad (6)$$

其中

M 為懸樑 x 斷面的撓矩；

q 為懸樑單位長度上鉛直方向的均佈載荷；

x 爲懸樑撓曲後中心軸上某一點的橫坐標；

ξ 爲懸樑中心軸 x 區域內替代 x 的變數；

S 爲懸樑自由端到 x 斷面的中心軸長度；

s 爲懸樑中心軸 x 區域內替代 S 的變數。

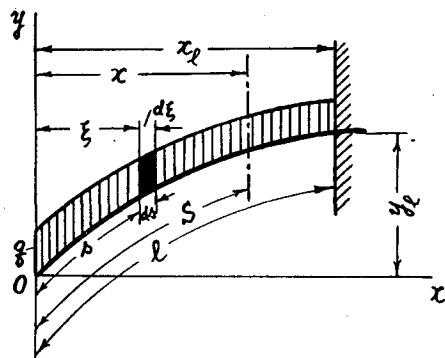


圖 2

(6) 式中的撓矩可寫成 x 的函數：

$$M = q \int_0^x (x - \xi) \left[1 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} d\xi. \quad (7)$$

將 (7) 代入撓曲方程 (1)，得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q}{EI} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \cdot \int_0^x (x - \xi) \left[1 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} d\xi. \quad (8)$$

引入下列新變數：

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{y}{l}, & z &= \frac{x}{l}, & \zeta &= \frac{\xi}{l}, \\ \epsilon &= \frac{y_l}{l}, & \lambda &= \frac{x_l}{l}, \\ p &= \frac{ql^3}{EI}, & m &= \frac{Ml}{EI}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

使受鉛直均佈載荷作用的均等懸樑中心軸的撓曲方程 (8)，長度不變條件 (2)，以及邊界條件 (3)，(4)，(5) 等式轉換成無量綱形式：

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -p \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \dots \right] \cdot \int_0^z (z - \zeta) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\zeta} \right)^2 + \dots \right] d\zeta; \quad (10)$$

$$\int_0^\lambda \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \dots \right] dz = 1; \quad (11)$$

$$\text{當 } z = 0 \text{ 時, } w = 0; \quad (12)$$

$$\text{當 } z = \lambda \text{ 時, } \frac{dw}{dz} = 0; \quad (13)$$

$$\text{當 } z = \lambda \text{ 時, } w = \epsilon; \quad (14)$$

其中

- w 為懸樑中心軸各點的無量綱撓度;
- z 為懸樑中心軸各點的無量綱橫坐標;
- ζ 為懸樑中心軸 z 區域內替代 z 的變數;
- ϵ 為懸樑中心軸的無量綱最大撓度;
- λ 為懸樑中心軸的無量綱最大跨度;
- p 為懸樑所受無量綱均佈載荷;
- m 為懸樑各斷面的無量綱撓矩。

現在我們在長度不變條件 (11) 及已知邊界條件 (12), (13), (14) 等式下應用攝動法來解撓曲方程 (10)。

根據攝動法的理論第一步是在所處理的問題中適當覓選一在物理意義上可以趨近於零的小量作為攝動參變數 (如本問題中的最大撓度 ϵ 或均佈載荷 p)，當所選參變數之值趨近於零時，問題中其他的一些量 (如本問題中的撓度 w 、最大跨度 λ 等) 之值也都能趨近於零或趨近於有限值。這樣，就有可能把這些量都展成攝動參變數的級數形式，使原有的非綫性微分方程簡化成為一系列的綫性微分方程，從而得到它的近似結果。

本文選擇均等懸樑的最大撓度 ϵ 為攝動參變數，並將它的撓度 w ，均佈載荷 p 及最大跨度 λ 都展成 ϵ 的升幂級數：

$$\left. \begin{aligned} w(z, \epsilon) &= w_0(z) \epsilon + w_1(z) \epsilon^2 + \dots, \\ p(\epsilon) &= p_0 \epsilon + p_1 \epsilon^2 + \dots, \\ \lambda(\epsilon) &= \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon^2 + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中

$w_0, w_1, \dots$ 爲 z 的待定函數;

$p_0, p_1, \dots$ 及 $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ 等爲待定常數.

將 (15) 式的 w 及 p 值代入撓曲方程 (10). 整理等號兩邊 ϵ 的同次項並列爲等式得一系列的綫性微分方程:

$$\frac{d^2 w_0}{dz^2} = -\frac{p_0}{2} z^2, \quad (16)$$

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} = -\left[\frac{p_1}{2} z^2 + \frac{3p_0}{4} z^2 \left(\frac{dw_0}{dz} \right)^2 + \frac{p_0}{2} \cdot \int_0^z (z-\zeta) \left(\frac{dw_0}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \right], \quad (17)$$

.....
.....

對於上列的撓曲方程 (16), (17), 有共同的長度不變條件及邊界條件.

將 (15) 式代入 (11), (12), (13), (14) 等式後得到這些條件爲

$$\int_0^{\lambda_0 + \lambda_1 \epsilon^2 + \dots} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dz} \right)^2 \epsilon^2 + \dots \right] dz = 1; \quad (18)$$

$$\text{當 } z = 0 \text{ 時,} \quad w = w_0 \epsilon + w_1 \epsilon^3 + \dots = 0; \quad (19)$$

$$\text{當 } z = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon^2 + \dots \text{ 時,} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{dw_0}{dz} \epsilon + \frac{dw_1}{dz} \epsilon^3 + \dots = 0; \quad (20)$$

$$\text{當 } z = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon^2 + \dots \text{ 時,} \quad w = w_0 \epsilon + w_1 \epsilon^3 + \dots = \epsilon. \quad (21)$$

積分撓曲方程 (16), 應用條件 (18), (19), (20), (21) 等式, 並歸併各式中 ϵ 的同次項即 (18) 式中的 ϵ^0 項, (19), (20), (21) 式中的 ϵ^1 項, 得到第一次近似結果爲:

$$\lambda_0 = 1, \quad (22)$$

$$p_0 = 8, \quad (23)$$

$$\frac{dw_0}{dz} = \frac{4}{3} (1 - z^3), \quad (24)$$

$$w_0 = \frac{1}{3} (4z - z^4). \quad (25)$$

將 (23) 式的 p_0 值及 (24) 式代入撓曲方程 (17)，積分兩次得

$$w_1 = - \left[\frac{p_1}{24} z^4 + \frac{32}{9} \left(\frac{1}{3} z^4 - \frac{31}{210} z^7 + \frac{85}{2520} z^{10} \right) \right] + C_1 z + C_2; \quad (26)$$

式中 C_1, C_2 為積分常數，由邊界條件 (19)，(20) 兩式決定。

將 (22) 式的 λ_0 值以及 (25)，(26) 式分別代入條件 (18)，(19)，(20)，(21) 式中，並歸併各式中 ϵ 的同次項即 (18) 式中的 ϵ^2 項，(19)，(20)，(21) 式中的 ϵ^3 項得到第二次近似結果為：

$$\lambda_1 = -\frac{4}{7}, \quad (27)$$

$$p_1 = \frac{32}{5}, \quad (28)$$

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{8}{2835} (371 - 2058 z^3 + 1302 z^6 - 425 z^9), \quad (29)$$

$$w_1 = \frac{4}{2835} (742 z - 1029 z^4 + 372 z^7 - 85 z^{10}). \quad (30)$$

綜合兩次近似結果得：

$$\frac{dw}{dz} = \frac{4}{3} (1 - z^3) \epsilon + \frac{8}{2835} (371 - 2058 z^3 + 1302 z^6 - 425 z^9) \epsilon^3 + \dots, \quad (31)$$

$$w = \frac{1}{3} (4z - z^4) \epsilon + \frac{4}{2835} (742 z - 1029 z^4 + 372 z^7 - 85 z^{10}) \epsilon^3 + \dots, \quad (32)$$

$$p = 8\epsilon + \frac{32}{5} \epsilon^3 + \dots, \quad (33)$$

$$\lambda = 1 - \frac{4}{7} \epsilon^2 + \dots, \quad (34)$$

三． 屈服應力與彈性極限載荷

懸樑的最大撓矩出現在固定端的斷面上，其值為

$$M_{max} = -EI \left[\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2}} \right]_{x=x_l}, \quad (35)$$

$$\text{當 } x = x_l \text{ 時, } \frac{dy}{dx} = 0.$$

因此,

$$M_{\max} = -EI \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right]_{x=x_l}. \quad (36)$$

該斷面上的最大正應力為

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = -\frac{EI}{W} \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right]_{x=x_l}; \quad (37)$$

式中 W 為懸樑的斷面係數.

令 $\zeta = \frac{Wl\sigma_{\max}}{EI}$ 為樑內最大正應力的無量綱式, 將 (37) 式轉換成無量綱形式為

$$\zeta = - \left[\frac{d^2w}{dz^2} \right]_{z=1}. \quad (38)$$

將 (32) 及 (34) 式先後代入 (38) 式得最大正應力與最大撓度的關係式為

$$\zeta = 4\epsilon + \frac{8}{5}\epsilon^3 + \dots \quad (39)$$

從實驗確定樑的屈服應力後就能根據 (39) 及 (33) 式求出樑的最大許可撓度 $\epsilon_{\max}$ 及彈性極限載荷 $p_{\max}$.

四. 均等懸樑在各式載荷作用下的近似結果

“均等懸樑的大撓度問題”本文總共計算了下列六種載荷情況:

- I. 懸樑在自由端受一力偶作用;
- II. 懸樑在自由端受鉛直方向集中載荷作用;
- III. 懸樑在自由端受法向集中載荷作用;
- IV. 懸樑受鉛直方向均佈載荷作用;
- V. 懸樑受鉛直方向偏重固定端的三角分佈載荷作用;
- VI. 懸樑受鉛直方向偏重自由端的三角分佈載荷作用.

現將六種載荷情況分別計算所得的結果列成一表, 表中符號所代表的物理量除無量綱載荷 p 隨不同載荷情況有變化以外, 其他均如前所規定:

M 為懸樑各斷面的撓矩；

$w = \frac{y}{l}$ ，為懸樑中心軸的無量綱撓度；

$\epsilon = \frac{y_l}{l}$ ，為懸樑中心軸的無量綱最大撓度；

$\lambda = \frac{x_l}{l}$ ，為懸樑中心軸的無量綱最大跨度；

$\zeta = \frac{Wl \sigma_{\max}}{EI}$ ，為懸樑斷面上的無量綱最大正應力；

$m = \frac{Ml}{EI}$ ，為懸樑各斷面的無量綱撓矩。

表 1

I. 懸樑在自由端受一力偶 M_0 作用

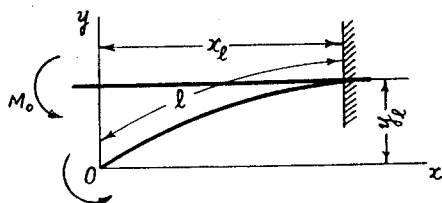


圖 3

$$M = M_0$$

$$p = \frac{M_0 l}{EI}$$

$$\frac{dw}{dz} = 2(1-z)\epsilon + \frac{2}{3}(5-19z+18z^2-6z^3)\epsilon^3 + \dots$$

$$w = (2z-z^2)\epsilon + \frac{1}{3}(10z-19z^2+12z^3-3z^4)\epsilon^3 + \dots$$

$$p = 2\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon^3 + \dots$$

$$\lambda = 1 - \frac{2}{3}\epsilon^2 + \dots$$

$$\zeta = 2\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon^3 + \dots$$

$$m = 2\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon^3 + \dots$$

II. 懸樑在自由端受鉛直方向集中載荷 P 作用

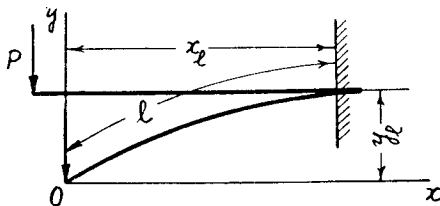


圖 4

$$M = Px$$

$$p = \frac{Pl^2}{EI}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{3}{2} (1 - z^2) \varepsilon + \frac{9}{560} (89 - 411z^2 + 315z^4 - 105z^6) \varepsilon^3 + \dots$$

$$w = \frac{1}{2} (3z - z^3) \varepsilon + \frac{9}{560} (89z - 137z^3 + 63z^5 - 15z^7) \varepsilon^3 + \dots$$

$$p = 3\varepsilon + \frac{108}{35} \varepsilon^3 + \dots$$

$$\lambda = 1 - \frac{3}{5} \varepsilon^2 + \dots$$

$$\zeta = 3\varepsilon + \frac{9}{7} \varepsilon^3 + \dots$$

$$m = 3z \cdot \varepsilon + \frac{108}{35} z \cdot \varepsilon^3 + \dots$$

III. 懸樑在自由端受法向集中載荷 P 作用

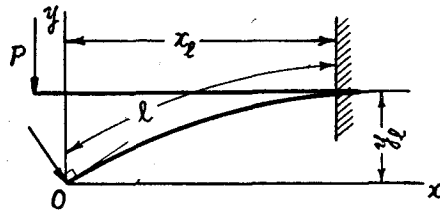


圖 5

$$M = P \left[x + y \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} \right] \cdot \left\{ 1 + \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$p = \frac{Pl^2}{EI}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{3}{2} (1 - z^2) \varepsilon + \frac{9}{560} (96 - 453z^2 + 350z^4 - 105z^6) \varepsilon^3 + \dots$$

$$w = \frac{1}{2} (3z - z^3) \varepsilon + \frac{9}{560} (96z - 151z^3 + 70z^5 - 15z^7) \varepsilon^3 + \dots$$

$$p = 3\varepsilon + \frac{297}{280} \varepsilon^3 + \dots$$

$$\lambda = 1 - \frac{3}{5} \varepsilon^2 + \dots$$

$$\zeta = 3\varepsilon + \frac{27}{70} \varepsilon^3 + \dots$$

$$m = 3z \cdot \varepsilon + \frac{9}{140} (69z - 35z^3) \varepsilon^3 + \dots$$

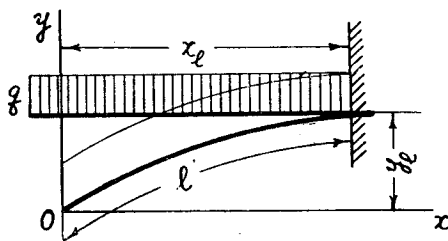
IV. 懸樑受鉛直方向均佈載荷 q 作用

圖 6

$$M = \int_0^x q(x-\xi) \left[1 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi$$

$$p = \frac{ql^3}{EI}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{4}{3} (1 - z^3) \epsilon + \frac{8}{2835} (371 - 2058z^3 + 1302z^6 - 425z^9) \epsilon^3 + \dots$$

$$w = \frac{1}{3} (4z - z^4) \epsilon + \frac{4}{2835} (742z - 1029z^4 + 372z^7 - 85z^{10}) \epsilon^3 + \dots$$

$$p = 8\epsilon + \frac{32}{5} \epsilon^3 + \dots$$

$$\lambda = 1 - \frac{4}{7} \epsilon^2 + \dots$$

$$\zeta = 4\epsilon + \frac{8}{5} \epsilon^3 + \dots$$

$$m = 4z \cdot \epsilon + \frac{8}{945} (798z^2 - 84z^5 + 15z^8) \epsilon^3 + \dots$$

V. 懸樑受鉛直方向偏重固定端的三角分佈載荷作用

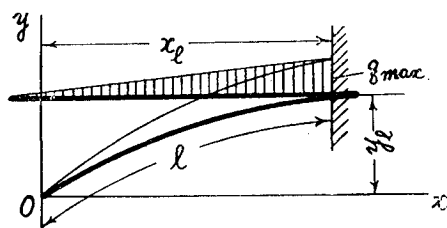


圖 7

$$M = \frac{q_{\max}}{l} \int_0^x \left\{ (x-\xi) \left[1 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^\xi \left[1 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi \right] \right\} d\xi$$

$$p = \frac{q_{\max} l^3}{EI}$$

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= \frac{5}{4} (1 - z^4) \varepsilon + \frac{3 \cdot 5^3}{2 \cdot 8^3} \left(\frac{8167}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} - \frac{53173}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} z^4 + \frac{37}{5 \cdot 7} z^8 \right. \\ &\quad \left. - \frac{101}{3 \cdot 9 \cdot 11} z^{12} \right) \varepsilon^3 + \dots \\ w &= \frac{1}{4} (5z - z^5) \varepsilon + \frac{3 \cdot 5^3}{2 \cdot 8^3} \left(\frac{8167}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} z - \frac{53173}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} z^5 + \frac{37}{5 \cdot 7 \cdot 9} z^9 \right. \\ &\quad \left. - \frac{101}{3 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} z^{13} \right) \varepsilon^3 + \dots \\ p &= 30\varepsilon + \frac{5^3 \cdot 4 \cdot 127}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \varepsilon^3 + \dots = 30\varepsilon + 21.15\varepsilon^3 + \dots \\ \lambda &= 1 - \frac{5}{9} \varepsilon^2 + \dots \\ \zeta &= 5\varepsilon + \frac{5^3 \cdot 137}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} \varepsilon^3 + \dots = 5\varepsilon + 1.9\varepsilon^3 + \dots \\ m &= 5z^3 \cdot \varepsilon + \frac{3 \cdot 5^3}{2 \cdot 8} \left(\frac{13073}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} z^3 - \frac{2}{5 \cdot 7} z^7 + \frac{1}{9 \cdot 11} z^{11} \right) \varepsilon^3 + \dots\end{aligned}$$

VI. 懸樑受鉛直方向偏重自由端的三角分佈載荷作用

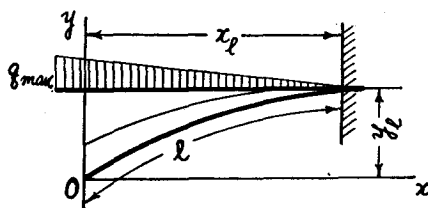


圖 8

$$\begin{aligned}M &= q_{\max} \int_0^x \left\{ (x - \xi) \left[1 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\int_0^\xi \left[1 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi}{l} \right] \right\} d\xi \\ p &= \frac{q_{\max} l^3}{EI} \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{5}{11} (3 - 4z^3 + z^4) \varepsilon + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5^3}{11^3} \left[\frac{3920207}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 11^2} - \frac{730039}{7 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 11^2} z^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1757375}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 11^2} z^4 + \frac{31}{5} z^6 - \frac{111}{5 \cdot 7 \cdot 8} (8z^7 - z^9) - \frac{170}{7 \cdot 9} z^9 + \frac{1283}{7 \cdot 9 \cdot 10} z^{10} \right. \\ &\quad \left. - \frac{101}{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12} (12z^{11} - z^{13}) \right] \varepsilon^3 + \dots \\ w &= \frac{1}{11} (15z - 5z^4 + z^5) \varepsilon + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5^3}{11^3} \left[\frac{3920207}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 11^2} z - \frac{730039}{4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 11^2} z^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{351475}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 11^2} z^5 + \frac{31}{5 \cdot 7} z^7 - \frac{37}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} (9z^8 - z^9) - \frac{17}{7 \cdot 9} z^{10} + \frac{1283}{7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} z^{11} \right. \\ &\quad \left. - \frac{101}{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13} (13z^{12} - z^{13}) \right] \varepsilon^3 + \dots\end{aligned}$$

$$p = \frac{120}{11} \varepsilon + \frac{135445 \cdot 10^3}{7 \cdot 13 \cdot 11^4} \varepsilon^3 + \dots = 10.92\varepsilon + 9.242\varepsilon^3 + \dots$$

$$\lambda = 1 - \frac{8815}{2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11^2} \varepsilon^2 + \dots = 1 - 0.578\varepsilon^2 + \dots$$

$$\zeta = \frac{40}{11} \varepsilon + \frac{202347550}{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11^5} \varepsilon^3 + \dots = 3.636\varepsilon + 4.602\varepsilon^3 + \dots$$

$$m = \frac{20}{11} (3z^2 - z^3) \varepsilon + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5^3}{11^3} \left[\frac{568187}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11^2} z^2 - \frac{432742}{7 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 11^2} z^3 - \frac{6}{5} (z^5 - z^6) \right. \\ \left. - \frac{2}{5 \cdot 7} (3z^7 - 5z^8) - \frac{1}{7 \cdot 9} (23z^9 - 7z^{10}) - \frac{1}{9 \cdot 11} z^{11} \right] \varepsilon^3 + \dots$$

五. 討 論

實際工程問題中，扁長的彈簧在大撓度情況下並不發生屈服現象，原因是彈簧在外力作用下各點的位移雖然很大，但是應變很小，應力並未達到屈服點。

樑是否在大撓度情況下屈服的問題主要決定於它厚度與長度的比值 h/l 。根據理論計算的結果得到下面的結論：

“樑厚度與長度的比值 h/l 非常小是樑發生大撓度而不屈服的必要條件。”

h/l 這一比值不但對樑是否發生大撓度而不屈服的根本問題上有着決定意義，而對樑大撓度問題的計算的簡化也有不小的作用。根據理論計算的結果顯示：

“懸樑撓曲後中心軸綫的伸長以及剪力對撓度和應力的影響都與比值 h/l 的平方或一次方有關”。

因此，只要比值 h/l 小到相當程度，這兩方面的因素就可以忽略不計，結果就使得樑大撓度問題的計算得到很大的簡化。

一般情況下樑發生大撓度而不屈服時它厚度與長度的比值 h/l 一定非常小；因此，我們對懸樑大撓度問題所作的基本假設之一：“樑撓曲後中心軸的長度不變”可以認為是正確的；另一方面，忽略剪力對撓度和應力的影響也是完全被允許的。

在引言中曾提到大撓度和小撓度理論的區別主要在於大撓度理論考慮了：

- (1) 由於樑本身變形所引起的外力作用的改變；
- (2) 曲率公式中斜率的平方項。

爲了具體說明由於上述兩個因素所造成的大撓度和小撓度理論在結果上的差別,現以懸樑自由端受鉛直方向集中載荷爲例來比較小撓度理論,攝動理論與碧斯霍普^[8]橢圓積分三者的結果:

表 2

I. 小撓度理論	$p' = 3\varepsilon' \quad (40)$ $\lambda' = 1 \quad (41)$ $\zeta' = 3\varepsilon' \quad (42)$	無量網集中載荷 $p' = \frac{Pl^2}{EI}$ 無量網最大跨度 $\lambda' = \frac{x_l}{l}$ 無量網最大正應力 $\zeta' = \frac{Wl\sigma_{\max}}{EI}$ 無量網最大撓度 $\varepsilon' = \frac{y_l}{l}$
II. 攝動理論	$p = 3\varepsilon + \frac{108}{35}\varepsilon^3 \quad (43)$ $\lambda = 1 - \frac{3}{5}\varepsilon^2 \quad (44)$ $\zeta = 3\varepsilon + \frac{9}{7}\varepsilon^3 \quad (45)$	無量網集中載荷 $p = \frac{Pl^2}{EI}$ 無量網最大跨度 $\lambda = \frac{x_l}{l}$ 無量網最大正應力 $\zeta = \frac{Wl\sigma_{\max}}{EI}$ 無量網最大撓度 $\varepsilon = \frac{y_l}{l}$
III. 橢圓積分	$\varepsilon'' = 1 - \frac{2}{p''^{1/2}} [E(k) - E(k, \theta_1)] \quad (46)$ $\lambda'' = \left[\frac{2}{p''} (2k^2 - 1) \right]^{1/2} \quad (47)$ 式中 $k^2 = \frac{1 + \sin \varphi_0}{2} \quad (48)$ $\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2k} \quad (49)$	無量網集中載荷 $p'' = \frac{Pl^2}{EI}$ 無量網最大跨度 $\lambda'' = \frac{x_l}{l}$ 無量網最大撓度 $\varepsilon'' = \frac{y_l}{l}$ [註] $E(k), E(k, \theta_1)$ 爲橢圓積分第二類標準積分; k 爲橢圓積分的模; φ_0 爲集中載荷作用點的傾角.

將表 2 各式繪製成曲綫如圖 9.

從圖 9 中可以看出本文的攝動解較小撓度理論的直綫解爲優越。在 $\varepsilon < 0.5$ 的範圍內,攝動解與橢圓積分解非常接近而直綫解與橢圓積分解却相差懸殊。

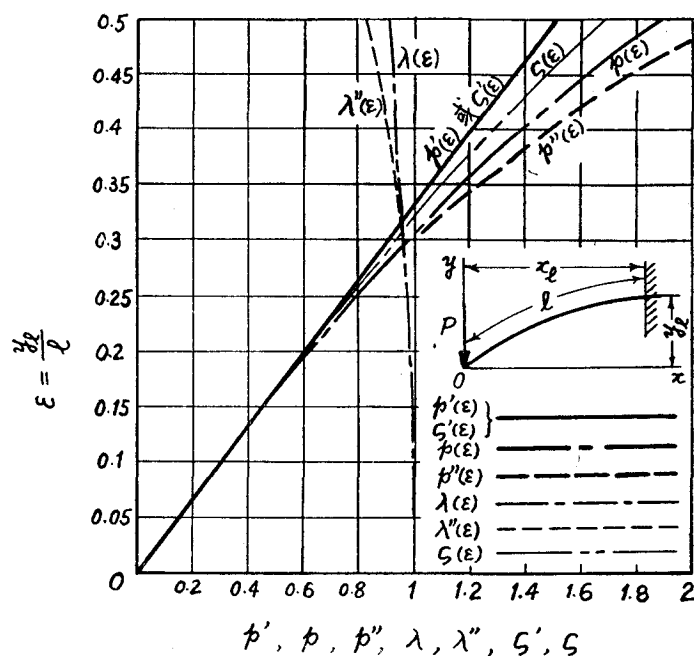


圖 9

從表 1 所載結果顯示：懸樑在發生大撓度情況下不論受那一種載荷作用，應用攝動理論求得的彈性極限載荷總是比由小撓度理論計算所得為大。因此，應用攝動理論來設計計算懸樑的尺寸、大小對於材料的使用方面比起小撓度理論來要經濟合理得多。

懸樑在自由端受一力偶作用時(表 1 中第 I 種載荷情況)，根據曲率與撓矩成正比的關係，樑的中心軸被彎成一圓弧，由圓弧得到的載荷與最大撓度的無量綱關係式為

$$p = 2\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon^3 + \frac{26}{45}\epsilon^5 + \dots; \quad (50)$$

式中前兩項就是本文的攝動解。

懸樑受下列兩種載荷作用時

- (1) 自由端受一力偶(表 1 中第 I 種載荷情況)；
- (2) 自由端受一法向集中載荷(表 1 中第 III 種載荷情況)。

撓曲一旦過於厲害，則撓度會產生複值，此時撓度將無法用攝動參變數的級數表示或者所表級數將無法收斂，因此，攝動法在這種情況下就受到一定的限制。

本文的結果僅做到第二次近似,原因是我們前面對懸樑所作的基本假設:“樑撓曲後斷面仍保持為平面”與實際情況並不符合。因此,在與實際情況不符的假設上多做幾次近似不會有更多的實際意義。

本文的攝動理論同樣可以應用於其他支座和載荷情況的樑的大撓度問題。同時這方面還須要配合做一些實驗來檢驗攝動理論的正確程度和應用範圍。

本文是在導師錢偉長教授耐心指導下以及中國科學院數學研究所胡海昌同志大力幫助下完成的。

參 考 文 獻

- [1] Love, A. E. H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, pp. 401-405.
- [2] Попов, Е. П., Нелинейные задачи статки тонких стержней,
- [3] Wei-Zang Chien (錢偉長), Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese Journal of Physics*, Vol. 7, No. 2, Dec., 1947.
- [4] Jeffcott, H. H., The more accurate calculation of the deflection of beams and struts, *Phil. Mag.*, Vol. 13, pp. 310-322, Feb., 1932.
- [5] Th. Pöschl, Remarks on the more accurate calculation of the deflexion of beams and struts, *Phil. Mag.*, Vol. 25, pp. 678-682, April, 1938.
- [6] Gross und Lehr, Large deflection of cantilever beams carrying a vertical concentrated load at its free end by approximation method, 1938, (未查到)
- [7] Barten, H. J., On the deflection of a cantilever beam, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 2, pp. 168-171, July, 1944 and Vol. 3, pp. 275-276, Oct., 1945.
- [8] Bisshopp, K. E. and Drucker, D. C., Large deflection of cantilever beams, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 3, pp. 272-275, Oct., 1945.

BEITRAG ZUR THEORIE DES FREITRÄGERS MIT GROSSER DURCHBIEGUNG

CHEN FUNG-CHU
(Tsing Hua University)

ZUSAMMENFASSUNG

In der Theorie des Balkens mit grosser Durchbiegung kommen folgende zwei Gesichtspunkte in Betracht:

1. der wirkliche Gleichgewichtszustand des Balkens nach der Formänderung;
2. das quadratische Glied der Neigung der elastischen Linie in der Krümmungsformel.

Diese sind in der elementaren Balkentheorie vernachlässigt worden.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M}{EI},$$

wobei M das Biegemoment des Balkens im wirklichen Gleichgewichtszustande bedeutet.

Es wird in dieser Arbeit das Problem des Freitragers mit grosser Durchbiegung für verschiedene Belastungsfälle mit der Methode der asymptotischen Entwicklung (auf englisch "Perturbation Method" genant) behandelt, wobei das Verhältnis der grössten Durchbiegung des Freitragers zur Balkenlänge als "Parameter" gewählt wird.

Es handelt sich um die folgenden Belastungsfälle:

1. Kräftepaar am Freieinde;
2. lotrechte Einzelkraft am Freieinde;
3. Einzelkraft, senkrecht zur Stabachse am Freieinde wirkend;
4. gleichmässig verteilte Last;
5. dreieckig verteilte Last.

Im zweiten Falle geben die Ergebnisse durch die Methode der asymptotischen Entwicklung gute Übereinstimmung mit exakten Lösungen der elliptischen Integralen, wenn dieser Parameter kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.