

顧及二級小量的開口截面彈性 薄壁桿件的實用理論*

胡海昌

(中國科學院數學研究所)

一. 引言

開口截面彈性薄壁桿件的實用理論，經 B. 3. 符拉索夫^[1]及其同事的充分探討，已在實用上獲得了廣泛的應用。爲了推廣 B. 3. 符拉索夫的理論以求更準確地反映彈性薄壁桿件的性能，可朝兩個方向努力。一個努力的方向是放棄 B. 3. 符拉索夫所作的某些假定。本文作者與解伯民^[2]曾放棄“中曲面無剪應變”的假定而研究了彈性薄壁桿件的平衡與穩定的一般理論。另一個努力的方向是稍稍修改 B. 3. 符拉索夫的假定，以便考慮到形變的二級小量。本文的目的便在建立顧及二級小量的開口截面彈性薄壁桿件的實用理論。這個非線性理論的建立，大有助於解決一系列在理論及實用上有重要義意的問題。其中值得特別指出的有：1) 拉伸、彎曲和扭轉的交互作用；2) 有系統的穩定理論。本文不可能對這些問題立即作全面的探討，它們將是以後一系列文章討論的對象。

二. 基本假定. 應變和應力

考慮一開口截面彈性薄壁桿件。取一直角坐標系 x, y, z ，使 z 軸通過截面的重心，並使 x, y 軸爲截面的重心主軸。設截面的扭轉中心（依照 B. 3. 符拉索夫的理論）是 $A(x = a, y = b)$ 。我們假定截面的周線剛硬不可變形。這樣截面在其平面內的運動可由扭轉中心沿 x, y 方向的撓度 ξ, η 以及截面繞扭轉中心的轉角 θ 來規定。截面周線上任一點 (x, y)

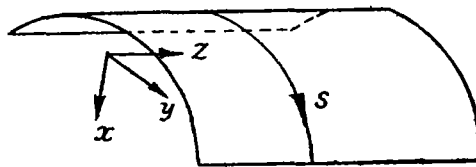


圖 1

*1955 年 10 月 30 日收到。

沿 x, y 方向的位移 u, v 爲:

$$u = \xi - (y - b)\theta - \frac{1}{2}(x - a)\theta^2, \quad v = \eta + (x - a)\theta - \frac{1}{2}(y - b)\theta^2. \quad (1)$$

我們再假定中曲面上各點的縱向位移 w 與 ξ, η, θ 有如下的關係¹⁾:

$$w = \zeta - x\xi' - y\eta' - \omega\theta' + r\rho, \quad (2)$$

其中 ζ, ρ 是坐標 z 的函數, ω 是扇性面積,

$$r = (x - a)^2 + (y - b)^2. \quad (3)$$

r 代表某點到扭轉中心的距離的平方, ζ 代表截面的平均縱向位移, $y\eta'$ 和 $x\xi'$ 代表由於截面繞 x 軸和 y 軸轉動而使各點所產生的縱向位移, $\omega\theta'$ 代表截面的扭曲, 最後一項 $r\rho$ 乃是在顧及二級小量的情況下所必須引進的 (後面的分析表明 ρ' 常與 $\frac{1}{2}\theta'^2$ 聯系在一起, 並且沒有 ρ 便不能滿足各種邊界條件). 如果略去這最後一項, 那末假定 (2) 便與 B. 3. 符拉索夫所採用的“中曲面無剪應變”的假定等效.

現在我們來求縱向伸縮應變 ϵ 的公式. 設 $P(x, y, z), Q(x, y, z + dz)$ 是桿件同一母線上的某兩點, 其間的距離原爲 dz . 設形變後這兩點移至 P', Q' . 線段 $P'Q'$ 在 x, y, z 軸上的投影分別爲

$$\frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad \frac{\partial v}{\partial z} dz, \quad dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

因此軸向應變 ϵ 爲:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} dz\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} dz\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right)^2} - dz}{dz} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} - 1. \end{aligned}$$

展開此式, 並略去二級以上的小量, 得到

$$\epsilon = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right]. \quad (4)$$

將 u, v, w 的算式 (1) 和 (2) 代入 (4) 式, 加以整理後我們得到:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \zeta' + \frac{1}{2}\xi'^2 + \frac{1}{2}\eta'^2 + b\xi'\theta' - a\eta'\theta' - x(\xi'' - \eta'\theta') - \\ &\quad - y(\eta'' + \xi'\theta') - \omega\theta'' + r(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2). \end{aligned} \quad (5)$$

1) 爲了書寫方便起見, 我們在外文字母上加一撇以表示該量對坐標 z 的微分.

由此可知軸向法應力 σ 為：

$$\frac{\sigma}{E} = \zeta' + \frac{1}{2} \xi'^2 + \frac{1}{2} \eta'^2 + b \xi' \theta' - a \eta' \theta' - x(\xi'' - \eta' \theta') - y(\eta'' + \xi' \theta') - \omega \theta'' + r(\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2). \quad (6)$$

公式 (5) 和 (6) 是軸向應變和軸向法應力的一般公式。在公式 (2), (5), (6) 中, $\zeta, \xi, \eta, \theta, \rho$ 是坐標 z 的函數, 另一些量是坐標 x, y 的函數。對於一個任意的開口截面, 在這些公式中出現的線性無關的 x, y 的函數共有五個, 即：

$$1, x, y, \omega, r = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

這五個函數兩兩相乘的乘積在全部截面上的積分共有 15 個。如果取 x, y 軸為截面的重心主軸, ω 為主扇性面積, 那末便有六個積分為零。這 15 個積分如下：

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_0^l h \, ds, & S_x &= \int_0^l xh \, ds = 0, & S_y &= \int_0^l yh \, ds = 0, \\ J_{xx} &= \int_0^l x^2 h \, ds, & J_{xy} &= \int_0^l xyh \, ds = 0, & J_{yy} &= \int_0^l y^2 h \, ds, \\ S_\omega &= \int_0^l \omega h \, ds = 0, & J_{x\omega} &= \int_0^l x\omega h \, ds = 0, & J_{y\omega} &= \int_0^l y\omega h \, ds = 0, \\ J_{\omega\omega} &= \int_0^l \omega^2 h \, ds, & S_r &= \int_0^l rh \, ds, & J_{xr} &= \int_0^l xrh \, ds, \\ J_{yr} &= \int_0^l yrh \, ds, & J_{\omega r} &= \int_0^l \omega rh \, ds, & J_{rr} &= \int_0^l r^2 h \, ds. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 s 是截面周線的弧長, 從周線的一端算起; h 是截面的厚度; l 是截面周線的全長。從定義 (7) 容易看到：

$$S_r = J_{xx} + J_{yy} + (a^2 + b^2) F. \quad (8)$$

根據公式 (6) 我們引進五個廣義縱向內力 $N(z), M_x(z), M_y(z), B(z), R(z)$ 如下：

$$\frac{N}{E} = \int_0^l \varepsilon h \, ds = F(\zeta' + \frac{1}{2} \xi'^2 + \frac{1}{2} \eta'^2 + b \xi' \theta' - a \eta' \theta') + S_r(\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2), \quad (9a)$$

$$\frac{M_x}{E} = \int_0^l y \varepsilon h \, ds = -J_{yy}(\eta'' + \xi' \theta') + J_{yr}(\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2), \quad (9b)$$

$$\frac{M_y}{E} = -\int_0^l x \varepsilon h \, ds = J_{xx}(\xi'' - \eta' \theta') - J_{xr}(\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2), \quad (9c)$$

$$\frac{B}{E} = \int_0^l \omega \varepsilon h \, ds = -J_{\omega\omega} \theta'' + J_{\omega r}(\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2), \quad (9d)$$

$$\frac{R}{E} = \int_0^l r \varepsilon h \, ds = S_r(\zeta' + \frac{1}{2} \xi'^2 + \frac{1}{2} \eta'^2 + b \xi' \theta' - a \eta' \theta') - J_{xr}(\xi'' - \eta' \theta') -$$

$$-J_{yr}(\eta'' + \xi' \theta') - J_{\omega r} \theta'' + J_{rr}(\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2). \quad (9c)$$

在這五個廣義內力中，前四個是所熟知的： N 是縱向力， M_x 和 M_y 是撓矩， B 是雙力矩。最後一個廣義內力 R 是新引進的；後面將要證明，它代表由於軸向法應力使桿件自由扭轉剛度所得之增量。

從公式 (9a) 得到

$$\zeta' + \frac{1}{2} \xi'^2 + \frac{1}{2} \eta'^2 + b \xi' \theta' - a \eta' \theta' = \frac{N}{EF} - \frac{S_r}{F} (\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2). \quad (10)$$

將此代入公式 (9c)，我們得到 R 的另一種表示法：

$$\begin{aligned} \frac{R}{E} = & \frac{S_r}{EF} N - J_{xr}(\xi'' - \eta' \theta') - J_{yr}(\eta'' + \xi' \theta') - J_{\omega r} \theta'' + \\ & + \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) (\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2). \end{aligned} \quad (11)$$

中曲面的剪應變在 B. 3. 符拉索夫的理论中是完全被忽略的，而剪應力由平衡條件決定。許多作者（例如見文獻 [3]）認為開口截面薄壁桿件中的剪應變是二級小量，因此在線性的實用理論中可以略去不計。本文作者也同意這種看法。由於剪應變本來就是二級小量，因此我們假定在本文的理論中剪應變的公式在形式上只取一級小量便可以了。桿件中曲面上各點沿截面周線切線方向的位移 v_s 是

$$v_s = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{dx} = \xi \frac{dx}{ds} + \eta \frac{dy}{ds} + \left[(x-a) \frac{dy}{ds} - (y-b) \frac{dx}{ds} \right] \theta. \quad (12)$$

所以中曲面的剪應變 γ 為

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial x} = \rho \frac{dr}{ds}. \quad (13)$$

我們雖然考慮到中曲面的剪應變，但是中曲面的剪應力還是應當根據平衡條件來決定 [見公式 (29)]。

為了後面的需要，我們再引進一個積分如下：

$$J_r = \int_0^l \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 h ds. \quad (14)$$

三. 桿件的勢能. 平衡方程

設 U 為桿件單位長度的應變能。如果把桿件自由扭轉的應變能也考慮在內，那末 U 的公式為：

$$2U = E \int_0^l \epsilon^2 h ds + G \int_0^l r^2 h ds + G J_d \theta'^2, \quad (15)$$

其中 GJ_d 是小扭轉情況下的自由扭轉剛度。將 ε 和 γ 的算式 (5) 和 (13) 代入 (15) 式，並算出積分，得到：

$$\begin{aligned} \frac{2U}{E} = & F(\zeta' + \frac{1}{2}\xi'^2 + \frac{1}{2}\eta'^2 + b\xi'\theta' - a\eta'\theta')^2 + \\ & + 2S_r(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2)(\zeta' + \frac{1}{2}\xi'^2 + \frac{1}{2}\eta'^2 + b\xi'\theta' - a\eta'\theta') + \\ & + J_{xx}(\xi'' - \eta'\theta')^2 + J_{yy}(\eta'' + \xi'\theta')^2 + J_{\omega\omega}\theta''^2 - \\ & - 2J_{xr}(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2)(\xi'' - \eta'\theta') - 2J_{yr}(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2)(\eta'' + \xi'\theta') - \\ & - 2J_{\omega r}\theta''(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2) + J_{rr}(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2)^2 + \frac{G}{E}J_r\rho^2 + \frac{G}{E}J_d\theta'^2. \quad (16) \end{aligned}$$

利用廣義內力的公式 (9) 可以證明單位長度的應變能 U 也可表示為

$$\begin{aligned} 2U = & N(\zeta' + \frac{1}{2}\xi'^2 + \frac{1}{2}\eta'^2 + b\xi'\theta' - a\eta'\theta') - M_x(\eta'' + \xi'\theta') + \\ & + M_y(\xi'' - \eta'\theta') - B\theta'' + R(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2) + GJ_r\rho^2 + GJ_d\theta'^2. \quad (17) \end{aligned}$$

從 U 的算式 (16) 我們還可得到如下的關係：

$$N = \frac{\partial U}{\partial \zeta'}, M_x = -\frac{\partial U}{\partial \eta''}, M_y = \frac{\partial U}{\partial \xi''}, B = -\frac{\partial U}{\partial \theta''}, R = \frac{\partial U}{\partial \rho'}, \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi'} &= (\xi' + b\theta') \frac{\partial U}{\partial \zeta'} + \theta' \frac{\partial U}{\partial \eta''} = (\xi' + b\theta') N - \theta' M_x, \\ \frac{\partial U}{\partial \eta'} &= (\eta' - a\theta') \frac{\partial U}{\partial \zeta'} - \theta' \frac{\partial U}{\partial \xi''} = (\eta' - a\theta') N - \theta' M_y, \\ \frac{\partial U}{\partial \theta'} &= (b\xi' - a\eta') \frac{\partial U}{\partial \zeta'} + \xi' \frac{\partial U}{\partial \eta''} - \eta' \frac{\partial U}{\partial \xi''} + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho'} + GJ_d \right) \theta' = \\ &= (b\xi' - a\eta') N - \xi' M_x - \eta' M_y + (R + GJ_d) \theta'. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

設 $p_x(z, s)$, $p_y(z, s)$, $p_z(z, s)$ 為作用在中曲面的單位面積上的載荷。桿件變形後，載荷的作用點有了位移。桿件變形後單位長度內載荷勢能的增加 V 為：

$$V = - \int_0^l (p_x u + p_y v + p_z w) ds. \quad (20)$$

將 u, v, w 的算式 (1) 和 (2) 代入 (20) 式，然後算出積分，得到：

$$V = -q_x \xi - q_y \eta - m_z \theta - q_z \zeta - m_y \xi' + m_x \eta' + b\theta' - d\rho + \frac{1}{2} m \theta^2, \quad (21)$$

式中 $q_x(z)$, $q_y(z)$, $\dots m(z)$ 等是九個廣義載荷，它們的算式如下：

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \int_0^l p_x ds, & q_y &= \int_0^l p_y ds, & m_z &= \int_0^l [(x-a)p_y - (y-b)p_x] ds, \\ q_z &= \int_0^l p_z ds, & m_x &= \int_0^l y p_z ds, & m_y &= - \int_0^l x p_z ds, \\ b &= \int_0^l \omega p_z ds, & d &= \int_0^l r p_z ds, & m &= \int_0^l [(x-a)p_x + (y-b)p_y] ds. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

在這九個廣義載荷中, q_x, q_y, q_z 是單位長度的力, m_x, m_y, m_z 是單位長度的力矩, b 是單位長度的雙力矩, d 和 m 是新引進的廣義載荷, 其中 m 是由於顧及二級小量才出現的。

這樣桿件單位長度的總勢能為

$$\text{單位長度的總勢能} = U + V. \quad (23)$$

根據最小勢能原理, 桿件的總勢能應取最小值, 所以

$$\int_0^L (U + V) dz = \min. \quad (24)$$

其中 L 是桿件的全長。條件 (24) 可以作為近似解法的根據。如果用歐拉·拉格朗日方程將變分式 (24) 化為微分方程, 那末我們便得到五個平衡方程如下:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial(U+V)}{\partial \zeta'} - \frac{\partial(U+V)}{\partial \zeta} = 0, \quad (25a)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial(U+V)}{\partial \xi''} - \frac{d}{dz} \frac{\partial(U+V)}{\partial \xi'} + \frac{\partial(U+V)}{\partial \xi} = 0, \quad (25b)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial(U+V)}{\partial \eta''} - \frac{d}{dz} \frac{\partial(U+V)}{\partial \eta'} + \frac{\partial(U+V)}{\partial \eta} = 0, \quad (25c)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial(U+V)}{\partial \theta''} - \frac{d}{dz} \frac{\partial(U+V)}{\partial \theta'} + \frac{\partial(U+V)}{\partial \theta} = 0, \quad (25d)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial(U+V)}{\partial \rho'} - \frac{\partial(U+V)}{\partial \rho} = 0. \quad (25e)$$

注意到 U 與 ζ, ξ, η, θ 無關, 並將 V 的算式 (21) 代入方程 (25), 我們得到簡化的平衡方程:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial U}{\partial \zeta'} + q_x = 0, \quad (26a)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial U}{\partial \xi''} - \frac{d}{dz} \frac{\partial U}{\partial \xi'} + m'_y - q_x = 0, \quad (26b)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial U}{\partial \eta''} - \frac{d}{dz} \frac{\partial U}{\partial \eta'} - m'_x - q_y = 0, \quad (26c)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial U}{\partial \theta''} - \frac{d}{dz} \frac{\partial U}{\partial \theta'} - b' - m_z + m\theta = 0, \quad (26d)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial U}{\partial \rho'} - \frac{\partial U}{\partial \rho} + d = 0. \quad (26e)$$

如果再將 U 的微分公式 (18) 和 (19) 代入 (26), 我們便得到用廣義內力表示的平衡方程如下:

$$N' = -q_z, \quad (27a)$$

$$M_y'' - [(\xi' + b\theta')N - \theta' M_x]' = q_z - m_y', \quad (27b)$$

$$-M_x'' - [(\eta' - a\theta')N - \theta' M_y]' = q_y + m_x', \quad (27c)$$

$$-B'' - [(b\xi' - a\eta')N + (R + GJ_d)\theta' - \xi' M_x - \eta' M_y]' + m\theta = m_z + b', \quad (27d)$$

$$R' - GJ_r \rho = -d. \quad (27e)$$

所以總起來說, 我們得到的基本方程可以分為兩組。一組是應力和位移的關係式 (6) 和 (9), 另一組是平衡方程 (27)。與平衡方程等效的是變分式 (24)。觀察平衡方程 (27) 可以看到, 把 $N, \xi, \eta, \theta, \rho$ 當作基本未知量是比較方便的。這時內力的公式應該用 (9b)–(9d) 和 (11)。

在方程 (27d) 中 R 與 GJ_d 結合在一起而作為 θ' 的係數。由此可知 R 代表由於軸向法應力使桿件的自由扭轉剛度所得的增量。

求得軸向法應力 σ 之後, 剪應力 τ 便可根據平衡方程

$$h \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial(\tau h)}{\partial s} = -p_z \quad (28)$$

來決定:

$$\tau h = - \int_0^s (h \frac{\partial \sigma}{\partial z} + p_z) ds. \quad (29)$$

桿件的邊界條件可有種種情況。如果是關於位移的, 那末可立即寫出; 如果是關於廣義內力的, 那末可從公式 (9) 得到。這裏值得特別指出, 如果桿件的端面上沒有法應力, 那末邊界條件為:

$$\left. \begin{aligned} \zeta' + \frac{1}{2} \xi'^2 + \frac{1}{2} \eta'^2 + b \xi' \theta' - a \eta' \theta' &= 0, & \xi'' - \eta' \theta' &= 0, \\ \eta'' + \xi' \theta' &= 0, & \theta'' &= 0, & \rho' + \frac{1}{2} \theta'^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

由此可以看到, 如果不在 w 的算式 (2) 中引進有關 ρ 的一項 (即假定 $\rho=0$), 那末條件 (30) 的最後一個一般便不能滿足。

四. 桿件的運動方程

上面我們求得了桿件的平衡方程。從平衡方程出發，根據達朗伯原理把慣性力當作外載荷，我們便可得到桿件的運動方程。

由於慣性力所產生的相當單位面積的分佈載荷 p_x^* , p_y^* , p_z^* 是

$$p_x^* = -\frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad p_y^* = -\frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad p_z^* = -\frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (31)$$

其中 γ 是桿件的單位體積重量， g 是重力加速度。將 u, v, w 的算式 (1) 和 (2) 代入 (31)，我們得到：

$$\left. \begin{aligned} p_x^* &= -\frac{\gamma h}{g} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - (y-b) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{1}{2} (x-a) \frac{\partial^2 (\theta^2)}{\partial t^2} \right], \\ p_y^* &= -\frac{\gamma h}{g} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + (x-a) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{1}{2} (y-b) \frac{\partial^2 (\theta^2)}{\partial t^2} \right], \\ p_z^* &= -\frac{\gamma h}{g} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - x \frac{\partial^3 \xi}{\partial z \partial t^2} - y \frac{\partial^3 \eta}{\partial z \partial t^2} - \omega \frac{\partial^3 \theta}{\partial z \partial t^2} + r \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

將 (32) 式代入公式 (22) 中，我們便得到由於慣性力所產生的相當廣義載荷為：

$$\left. \begin{aligned} q_x^* &= -\frac{\gamma}{g} F \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 (\theta^2)}{\partial t^2} \right), \\ q_y^* &= -\frac{\gamma}{g} F \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 (\theta^2)}{\partial t^2} \right), \\ m_x^* &= -\frac{\gamma}{g} \left\{ b F \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + S_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\}, \\ q_z^* &= -\frac{\gamma}{g} \left(F \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + S_r \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right), \\ m_x^* &= -\frac{\gamma}{g} \left(-J_{yy} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z \partial t^2} + J_{yr} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right), \\ m_y^* &= -\frac{\gamma}{g} \left(J_{xx} \frac{\partial^3 \xi}{\partial z \partial t^2} - J_{xr} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right), \\ b^* &= -\frac{\gamma}{g} \left(-J_{\omega\omega} \frac{\partial^3 \theta}{\partial z \partial t^2} + J_{\omega r} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right), \\ d^* &= -\frac{\gamma}{g} \left(S_r \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - J_{xr} \frac{\partial^3 \xi}{\partial z \partial t^2} - J_{yr} \frac{\partial^3 \eta}{\partial z \partial t^2} - J_{\omega r} \frac{\partial^3 \theta}{\partial z \partial t^2} + J_{rr} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right), \\ m^* &= -\frac{\gamma}{g} \left\{ -a F \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - b F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{1}{2} S_r \frac{\partial^2 (\theta^2)}{\partial t^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

將這些相當廣義載荷加入平衡方程 (27) 中的廣義載荷，我們得到運動方程如下：

$$\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\gamma}{g} \left(F \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + S_r \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right) = -q_z, \quad (34a)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left[N \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + b \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - M_x \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \\
& + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ F(\xi + b\theta + \frac{1}{2} a\theta^2) - J_{xx} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + J_{xr} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} = q_x - \frac{\partial m_y}{\partial z}, \quad (34b) \\
& - \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left[N \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - a \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - M_y \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \\
& + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ F(\eta - a\theta + \frac{1}{2} b\theta^2) - J_{yy} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + J_{yr} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} = q_y + \frac{\partial m_x}{\partial z}, \quad (34c) \\
& - \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left[N \left(b \frac{\partial \xi}{\partial z} - a \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + (R + G J_d) \frac{\partial \theta}{\partial z} - M_x \frac{\partial \xi}{\partial z} - M_y \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] + \\
& + m\theta + \frac{\gamma}{g} \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ F(a\xi + b\eta) + \frac{1}{2} S_r \theta^2 \right\} + \\
& + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ F(b\xi - a\eta) + S_r \theta - J_{\omega\omega} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + J_{\omega r} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} = m_z + \frac{\partial b}{\partial z}, \quad (34d) \\
& \frac{\partial R}{\partial z} - G J_r \rho - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ S_r \zeta - J_{xr} \frac{\partial \xi}{\partial z} - J_{yr} \frac{\partial \eta}{\partial z} - J_{\omega r} \frac{\partial \theta}{\partial z} + J_{rr} \rho \right\} = -d. \quad (34e)
\end{aligned}$$

在這幾個方程中，廣義內力 N, M_y, M_x, B, R 的公式仍如公式 (9) 所示。

五. 幾個簡單可解的特殊情況

上面得到的平衡方程 (27) 和運動方程 (34)，都是非線性的聯立方程，因此在一般的情況下要得到它們的解答是十分困難的。這裏我們指出幾個簡單可解的特殊情況。

1. 均勻壓縮 桿件在兩端面上承受均勻分佈的壓力 P 而被壓縮。這時顯然

$$\zeta = -\frac{P}{EF} z, \quad \xi = \eta = \theta = \rho = 0. \quad (35)$$

桿件中的廣義內力是

$$N = -P, \quad R = -\frac{S_r}{F} P, \quad M_x = M_y = B = 0. \quad (36)$$

2. 軸向振動 桿件在作單純的軸向振動時，

$$\zeta \neq 0, \quad \xi = \eta = \theta = \rho = 0. \quad (37)$$

因此廣義內力的公式化爲

$$N = EF \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad R = E S_r \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad M_x = M_y = B = 0. \quad (38)$$

運動方程 (34b)–(34d) 已經滿足，而 (34a) 和 (34e) 化爲相同的一個方程：

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{\gamma}{Eg} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0. \quad (39)$$

3. 具有對稱截面的桿件的平面彎曲 設 x 軸是截面的對稱軸, 於是

$$b = 0, \quad J_{yr} = J_{\omega r} = 0. \quad (40)$$

再假定載荷的分佈對於 xz 平面對稱, 即

$$q_y = m_z = m_x = b = 0. \quad (41)$$

在這種情況, 桿件在 xz 平面內的彎曲是一種可能的平衡狀態:

$$\eta = \theta = 0. \quad (42)$$

由於 (40)–(42), 廣義內力的公式化為:

$$M_x = B = 0, \quad (43a)$$

$$\frac{N}{E} = F(\zeta' + \frac{1}{2} \xi'^2) + S_r \rho', \quad (43b)$$

$$\frac{M_y}{E} = J_{xx} \xi'' - J_{xr} \rho', \quad (43c)$$

$$\frac{R}{E} = \frac{S_r}{EF} N - J_{xr} \xi'' + \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \rho', \quad (43d)$$

平衡方程化為

$$N' = -q_z, \quad (44a)$$

$$E J_{xx} \xi^{IV} - E J_{xr} \rho''' - (N \xi')' = q_x - m_y', \quad (44b)$$

$$-E J_{xr} \xi''' + E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \rho'' - G J_r \rho = -d + \frac{S_r}{F} q_z. \quad (44c)$$

這組方程雖然是非線性的, 但若先從 (44a) 解出 N , 然後將它代入後面兩個方程, 那末它們便在形式上化為線性的。值得指出, 在 $N = 0$ 的情況, 方程 (44b) 和 (44c) 化為真正線性的方程。

在 x 軸是對稱軸的情況, 桿件在 xz 平面內的振動也是一種可能的振動形式。這時 $\eta = \theta = 0$ 。

4. 特種桿件的無彎曲的扭轉 設桿件的截面具有下列性質:

$$a = b = 0, \quad J_{xr} = J_{yr} = 0. \quad (45)$$

那末桿件在扭載荷作用下, 無彎曲的扭轉 (即 $\xi = \eta = 0$) 是一種可能的平衡狀態。這時廣義內力的公式化為:

$$M_x = M_y = 0, \quad (46a)$$

$$\frac{N}{E} = F \zeta' + S_r (\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2), \quad (46b)$$

$$\frac{B}{E} = -J_{\omega\omega} \theta'' + J_{\omega r} (\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2), \quad (46c)$$

$$\frac{R}{E} = \frac{S_r}{EF} N - J_{\omega r} \theta'' + \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) (\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2). \quad (46d)$$

平衡方程化爲

$$N' = -q_z, \quad (47a)$$

$$E J_{\omega \omega} \theta^{IV} - E J_{\omega r} \rho'''' - \left\{ \left[\frac{S_r}{F} N + G J_d + E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) (\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2) \right] \theta' \right\}' + \\ + m \theta = m_z + b', \quad (47b)$$

$$- E J_{\omega r} \theta'''' + E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) (\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2)' - G J_r \rho = -d + \frac{S_r}{F} q_z. \quad (47c)$$

具有兩個對稱軸的截面和心對稱的截面滿足條件 (45)。因此具有這種截面的桿件可能產生無彎曲的扭轉。對於別種桿件，欲產生無彎曲的扭轉一般是不可能的。

在滿足條件 (45) 的情況下，無彎曲的扭轉振動也是可能的。

參 考 文 獻

- [1] B. 3. 符拉索夫, 材料力學、結構力學與彈性力學中的若干問題, 科學譯叢, 理論及應用力學第四種, 中國科學院出版, 1954 年。
- [2] 胡海昌和解伯民, 彈性薄壁桿件平衡與穩定的一般理論, 物理學報, 11 (1955), 339.
- [3] Г. Ю. 詹涅里傑和 Я. Г. 巴諾夫柯, 彈性薄壁桿件的靜力學, 科學出版社出版, 1955 年。

ОБ ОДНОМ ПРИКЛАДНОМ ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ МАЛЫХ ВЕЛИЧИН ВТОРОГО ПОРЯДКИ

Ху ХАЙ-ЧАН

(Институт Математики, Академии Китая)

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье делается попытка построения прикладной теории тонкостенных стержней открытых профилей с учетом малых величин второго порядка. Эта теория основана на следующие предположения. 1) Контур поперечного сечения стержня недеформируема. Из этого предположения следует, что поперечные перемещения u , v по направлению осей x и y можно представить в виде

$$u = \xi - (y - b) \theta - \frac{1}{2} (x - a) \theta^2, \quad (1)$$

$$v = \eta + (x - a) \theta - \frac{1}{2} (y - b) \theta^2,$$

где ξ, η — прогиба по направлению осей x и y , θ — угол поворота вокруг центра кручения, a, b — координаты центра кручения. 2) Продольное перемещение w связывано с ξ, η, θ соотношением

$$w = \zeta - x \xi' - y \eta' - \omega \theta' + [(x - a)^2 + (y - b)^2] \rho, \quad (2)$$

где ω — секториальная площадь, ζ, ρ — функции координаты z . Функция ρ является необходимым для удовлетворения граничных условий в настоящей теории. Если отбрасывается функция ρ , то предположение (2) эквивалентно гипотеза о отсутствии сдвига срединной поверхности стержня. При вычислении относительного продольного удлинения принимается во внимание малые величины второго порядка. Уравнения равновесия мы получаем из принципа потенциальной энергии. А затем получаем уравнения колебания из принципа Даламбера путем введения инерционных членов.