

彈性薄壁桿件的大扭轉*

胡 海 昌

(中國科學院數學研究所)

一. 引 言

本文根據作者以前提出的非線性實用理論^[1]來研究開口截面彈性薄壁桿件的大扭轉問題。J. C. 白克萊^[5]和 M. S. G. 刻里摩爾^[6]曾討論過彈性薄壁桿件大扭轉的別個問題。軸向力對於在小扭轉角情況下桿件的抗扭剛度的影響，曾經不少學者研究過。這個問題常和桿件的扭轉屈曲問題聯繫在一起。例如用 B. Z. 符拉索夫^[2,3]的理論便可研究軸向力和撓矩對於抗扭剛度的影響。但是現在還很少有人對彈性薄壁桿件的大扭轉問題做一般地研究。本文就具有兩個對稱軸的和心對稱的截面的桿件，簡化了以前的基本方程，並提出一種攝動法近似地求解所得到的非線性方程。從個別具體問題的計算可以看到，即使在扭轉角不大的情況下，軸向力的效應已相當顯著。對於具有非對稱截面的桿件，根據前文 [1] 的理論，無彎曲的扭轉一般是不可能的。

二. 平衡問題的基本方程。線性理論

我們來考慮具有兩個對稱軸的和心對稱的截面的桿件。設作用在桿件上的只有扭載荷 m_z , m 和均勻的壓力或拉力。正如前文 [1] 所指出的，從對稱關係容易看到在這種場合無彎曲的扭轉 ($\xi = \eta = 0$) 是一種可能的平衡狀態。

由於 $a = b = 0$, $\xi = \eta = 0$, 桿件中曲面上各點的位移為：

$$u = -\gamma\theta - \frac{1}{2}x\theta^2, \quad v = x\theta - \frac{1}{2}y\theta^2, \quad (1a)$$

$$w = \zeta - \omega\theta' + (x^2 + y^2)\rho. \quad (1b)$$

桿件橫截面上的法應力是

$$\frac{\sigma}{E} = \zeta' - \omega\theta'' + (x^2 + y^2)(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2). \quad (2)$$

* 1955 年 10 月 30 日收到。

根據前文 [1] 的公式 (46), 構件中的廣義內力是

$$\frac{N}{E} = F \zeta' + S_r (\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2), \quad (3a)$$

$$\frac{B}{E} = - J_{\omega\omega} \theta'' + J_{\omega r} (\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2), \quad (3b)$$

$$\frac{R}{E} = \frac{S_r}{EF} N - J_{\omega r} \theta'' + \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \left(\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2 \right). \quad (3c)$$

構件的平衡方程是(見前文 [1] 的方程 (47), 在那些方程中應命 $q_z = d = 0$):

$$N' = 0 \quad (4a)$$

$$E J_{\omega\omega} \theta''' - E J_{\omega r} \rho''' - \left\{ \left[\frac{S_r}{F} N + G J_d + E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \left(\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2 \right) \right] \theta' \right\}' + m \theta = m_z, \quad (4b)$$

$$- E J_{\omega r} \theta'' + E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \left(\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2 \right)' - G J_r \rho = 0. \quad (4c)$$

從方程 (4a) 立刻得到

$$N = \text{const.} \quad (5)$$

構件的邊界條件可能有種種組合, 最常遇到的基本情況有如下幾種: 如果在構件端面上沒有法應力, 那末邊界條件為

$$N = 0, \quad \theta'' = 0, \quad \rho' + \frac{1}{2} \theta'^2 = 0; \quad (6)$$

如果構件端面在變形後仍為平面, 並且沒有軸向移動, 那末邊界條件為

$$\zeta = 0, \quad \theta' = 0, \quad \rho = 0; \quad (7)$$

如果構件端面在變形後仍為平面, 但可有自由的軸向移動, 那末邊界條件為

$$\theta' = 0, \quad \rho = 0, \quad N = \text{已知值}; \quad (8)$$

如果構件端面不能轉動, 那末邊界條件為

$$\theta = 0; \quad (9)$$

如果在構件端面上有一個已知的扭力矩 M_z , 那末邊界條件為

$$- E J_{\omega\omega} \theta''' + E J_{\omega r} \rho'' + \left[\frac{S_r}{F} N + G J_d + E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \left(\rho' + \frac{1}{2} \theta'^2 \right) \right] \theta' = M_z. \quad (10)$$

方程 (4) 在一般的載荷及一般的邊界條件下的準確解很難找到。因此通常不得不求諸近似解法。下面我們將提出一種攝動法。

現在我們先來看看線性理論。如果在方程 (4) 中略去 θ, ρ 的二級小量、但保留 $N\theta''$ 和 $m\theta$ 兩項, 我們便得到線性理論中的基本方程:

$$EJ_{\omega\omega}\theta'''' - EJ_{\omega r}\rho''' - \left(\frac{S_r}{F}N + GJ_d\right)\theta'' + m\theta = m_z, \quad (11a)$$

$$- EJ_{\omega r}\theta''' + E\left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right)\rho'' - GJ_r\rho = 0. \quad (11b)$$

方程 (11) 和 B. 3. 符拉索夫理論中的方程不一樣。這是因為在本文的理論中考慮到一部分中曲面的剪應變，同時又考慮到一個新的廣義載荷 m 的作用。如果假定 $m = 0$, $\rho = 0$, 並且拋棄方程 (11b) 不管，我們便得到 B. 3. 符拉索夫理論中的基本方程

$$EJ_{\omega\omega}\theta'''' - \left(\frac{S_r}{F}N + GJ_d\right)\theta'' = m_z. \quad (12)$$

方程 (11) 比方程 (12) 複雜許多，因此方程 (11) 的一般解法也比較困難。在桿件的兩端是簡支同時 $m = \text{const}$ 的場合，可以方便地利用富氏級數法。在這種場合桿件的邊界條件是：

$$\text{在 } z = 0 \text{ 和 } z = L \text{ 處}, \quad \theta = \theta'' = \rho' = 0. \quad (13)$$

因此 θ 和 ρ 適宜於展成如下的級數：

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad \rho = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} B_n \cos \frac{n\pi z}{L}. \quad (14)$$

係數 A_n 和 B_n 由下列聯立方程決定：

$$\left. \begin{aligned} & \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 E J_{\omega\omega} + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{S_r}{F} N + G J_d \right) + m \right] A_n - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 E J_{\omega r} B_n = m_z^n, \\ & - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 E J_{\omega r} A_n + \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) + G J_r \right] B_n = 0; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中

$$m_z^n = \frac{2}{L} \int_0^L m_z \sin \frac{n\pi z}{L} dz. \quad (16)$$

三. 十字形截面的桿件

考慮一具有對稱的十字形截面的桿件。我們所以把十字形截面特別提出來，是因為它的扇形面積 ω 恒等於零，同時又有一個簡單問題的準確解可以找到。

設截面兩肢的長度為 $2a$ 和 $2b$ ，它們的厚度各為 h 和 t 如圖 1 所示。由於 $\omega \equiv 0$ ，所以

$$J_{\omega\omega} = J_{\omega r} = 0. \quad (17)$$

其他的幾何特徵的公式如下：

$$\left. \begin{aligned} F &= 2(ah + bt), \quad S_r = \frac{2}{3}(a^3 h + b^3 t), \quad J_{rr} = \frac{2}{5}(a^5 h + b^5 t), \\ J_r &= \frac{8}{3}(a^3 h + b^3 t), \quad J_d = \frac{2}{3}(ah^3 + bt^3). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

由於 $J_{\omega\omega} = J_{\omega r} = 0$, 基本方程 (4) 化為:

$$-\left(\frac{S_r}{F}N + GJ_d\right)\theta'' - E\left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right)\left[\left(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2\right)\theta'\right]' + m\theta = m_z, \quad (19a)$$

$$E\left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right)\left(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2\right)' - GJ_r\rho = 0. \quad (19b)$$

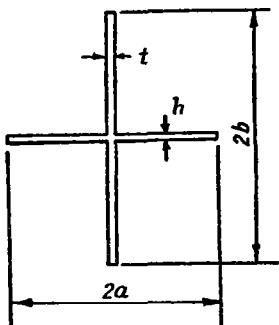


圖 1

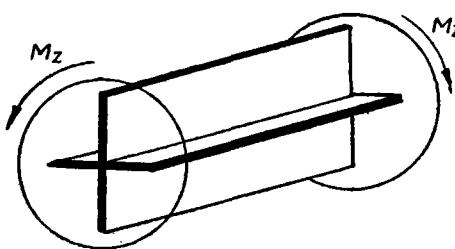


圖 2

在一般的支承情況及載荷情況下, 方程 (19) 的準確解依然很難找到。這裏值得指出, 有一個具有實際意義的簡單問題的準確解可以找到。

設桿件的兩端面鉸接於兩塊剛硬的填板上, 而在這兩塊填板上作用一對扭力矩 M_z 而使桿件扭轉, 如圖 2 所示。桿件的兩端面在扭轉後仍為平面。由於在這個問題中 $m = m_z = 0$, 所以我們可以設

$$\theta' = \varphi = \text{const}, \quad \rho = 0. \quad (20)$$

方程 (19) 和端面保持為平面的條件都已經滿足。而邊界條件 (10) 規定了 φ 與 M_z 的關係:

$$\left(\frac{S_r}{F}N + GJ_d\right)\varphi + \frac{1}{2}E\left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right)\varphi^3 = M_z. \quad (21)$$

軸向力 N 應由邊界條件 (7) 或 (8) 決定。如果兩個端面可以自由接近, 那末 $N = 0$, 因而方程 (21) 化為

$$GJ_d\varphi + \frac{1}{2}E\left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right)\varphi^3 = M_z. \quad (22)$$

如果兩個端面不能接近, 那末 N 由下列條件決定:

$$\int_0^L \zeta' dz = 0. \quad (23)$$

利用公式 (3a), 從條件 (23) 便得到

$$N = \frac{1}{2} E S_r \varphi^2. \quad (24)$$

將此代入方程 (21), 我們得到 φ 和 M_z 的關係如下：

$$G J_d \varphi + \frac{1}{2} E J_{rr} \varphi^3 = M_z. \quad (25)$$

方程 (25) 中 φ^3 的係數大於零。對於一個任意的截面，可以證明

$$J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} = \int_0^l \left(r - \frac{S_r}{F} \right)^2 h ds. \quad (26)$$

因此對於任一個截面，

$$J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} > 0. \quad (27)$$

所以方程 (22) 中 φ^3 的係數也大於零。由此可知在這兩種支承情況下非線性效應恆使桿件抵抗扭轉的能力增加。

從公式 (24) 可以看到，在兩個端面不能接近的場合，桿件中的軸向拉力與單位長度的扭轉角的平方成正比。

作為一個數字例子，設

$$a = b = 5 \text{ cm}, \quad h = t = 0.5 \text{ cm}.$$

$$E = 21 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \quad G = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

根據公式 (18) 計算得到

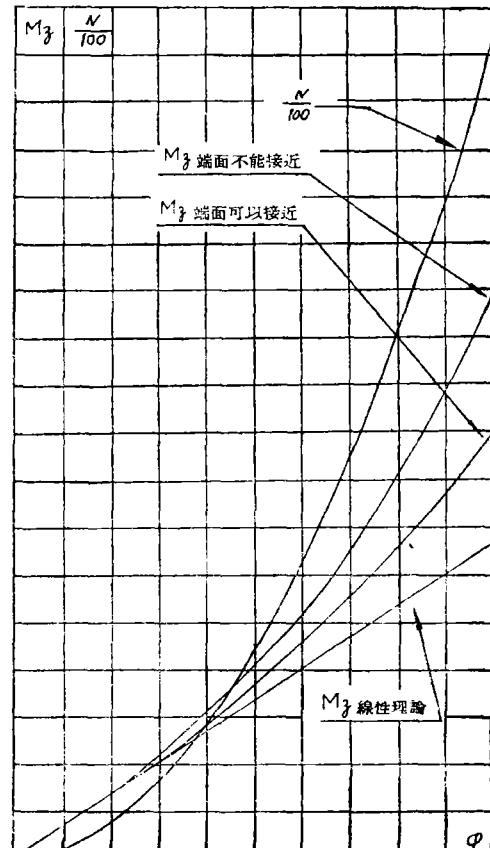


圖 3

$$F = 10 \text{ cm}^2, \quad S_r = 83.33 \text{ cm}^4, \quad J_{rr} = 1250 \text{ cm}^6,$$

$$J_r = 333.3 \text{ cm}^4, \quad J_d = 0.8333 \text{ cm}^4.$$

因此在兩端可以自由接近的場合 (φ 的單位是 $1/m$, M_z 的單位是 $\text{kg} \cdot \text{m}$)：

$$66.67 \varphi + 5.833 \varphi^3 = M_z. \quad (28)$$

在兩個端面不能接近的場合 (φ , M_z 的單位同上, N 的單位為 kg)：

$$N = 8750 \varphi^2, \quad 66.67 \varphi + 13.12 \varphi^3 = M_z. \quad (29)$$

在這兩種支承場合下 M_z 以及 N 隨 φ 而變的曲線如圖 3 所示。從這個圖可以得到如下兩點結論：1) 當 $\varphi \geq \frac{\pi}{4}$ (即一米長的桿件的兩端面的相對轉角等於或大於 45°) 時， M_z 中的非線性部分不能忽略；2) 軸向拉力 N 增加得很快，在 φ 不大時 N 已達到相當大的數值。

四. 一般載荷及支承情況下的攝動法

在一般的載荷及支承情況下，方程 (4) 的準確解很難找到，因而不得不求諸近似解法。在幾種目前通用的非線性方程的近似解法中，作者以為攝動法常常是最適用的。和薄板大撓度問題的攝動法一樣^[7]，本問題中的攝動法也可以分為載荷參數法和位移參數法兩種。其中載荷參數法的計算比較方便，而位移參數法的結果比較良好。

1. 載荷參數法 設載荷 $m = 0$ ，設載荷 m_z 可以用一個參數 M 規定如下：

$$m_z = M f(z). \quad (30)$$

其中 $f(z)$ 是已定的函數。這樣，最後得到的解答 θ, ρ, N 也必定是參數 M 的函數。我們假定它們都可以展成 M 的幕級數如下：

$$\theta(z, M) = \theta_1(z) M + \theta_2(z) M^2 + \theta_3(z) M^3 + \dots, \quad (31a)$$

$$\rho(z, M) = \rho_1(z) M + \rho_2(z) M^2 + \rho_3(z) M^3 + \dots, \quad (31b)$$

$$N(M) = N_1 M + N_2 M^2 + N_3 M^3 + \dots. \quad (31c)$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \rho_1, \rho_2, \dots$ 是坐標 z 的函數， N_1, N_2, \dots 是常數。將算式 (31) 代入方程 (4) 以及相關的邊界條件，然後命 M 的各次幕的係數都等於零，我們便得到一系列的方程和相應的邊界條件。這一系列方程是：

$$E J_{\omega\omega} \theta_1'' - G J_d \theta_1'' - E J_{\omega r} \rho_1''' = f(z), \quad (32a)$$

$$E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \rho_1'' - G J_r \rho_1 - E J_{\omega r} \theta_1''' = 0; \quad (32b)$$

$$E J_{\omega\omega} \theta_2'' - G J_d \theta_2'' - E J_{\omega r} \rho_2''' = \frac{S_r}{F} N_1 \theta_1'' + E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) (\rho_1' \theta_1'), \quad (33a)$$

$$E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \rho_2'' - G J_r \rho_2 - E J_{\omega r} \theta_2''' = -E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \theta_1' \theta_1''; \quad (33b)$$

$$E J_{\omega\omega} \theta_3'' - G J_d \theta_3'' - E J_{\omega r} \rho_3''' = \frac{S_r}{F} (N_1 \theta_2'' + N_2 \theta_1'') + \\ + E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \left(\rho_1' \theta_2' + \rho_2' \theta_1' + \frac{1}{2} \theta_1'^3 \right)', \quad (34a)$$

$$E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \rho_3'' - G J_r \rho_3 - E J_{\omega r} \theta_3''' =$$

$$= -E\left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right)(\theta'_1\theta''_2 + \theta'_2\theta''_1); \quad (34b)$$

方程 (31) 的右端是已知的，因此從方程 (31) 及相應的邊界條件便可決定 θ_1, ρ_1, N_1 。決定了 θ_1, ρ_1, N_1 後，方程 (33) 的右端便成為已知的，因此方程 (33) 可以用來決定 θ_2, ρ_2, N_2 。這樣依次類推；我們可決定 $\theta_3, \rho_3, N_3; \theta_4, \rho_4, N_4; \dots$ 實際上算到 M^3 已够應用，因此若略去 M^4 以上的各項，我們近似地得到：

$$\left. \begin{array}{l} \theta = \theta_1 M + \theta_2 M^2 + \theta_3 M^3, \\ \rho = \rho_1 M + \rho_2 M^2 + \rho_3 M^3, \\ N = N_1 M + N_2 M^2 + N_3 M^3. \end{array} \right\} \quad (35)$$

2. 位移參數法 上面從載荷參數法得到了近似結果 (35)，有時會給出不合理的結果：載荷超過某一數值後，扭轉角反而隨載荷的增加而減小（實例見下節）。這個現象的真正原因是當載荷較大時，取級數 (31) 的前三項已不能得近似的結果。為了化費同樣多的勞力而得到較好的結果，可採用位移參數法。

與載荷 M 對應的廣義位移 β 是：

$$\beta = \int_0^L f(z) \theta dz. \quad (36)$$

β 與 M 的關係是：如果把 M 看作是 β 的函數，那末

$$U = \int_0^\beta M(\beta) d\beta \quad (37)$$

是外載荷所作的功，也即是桿件的應變能。

將算式 (31a) 代入 (37) 式，我們得到 β 對於 M 的展開式：

$$\beta = \beta_1 M + \beta_2 M^2 + \beta_3 M^3 + \dots, \quad (38)$$

其中

$$\beta_i = \int_0^L f(z) \theta_i(z) dz, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (39)$$

將級數 (38) 反過來，即將 M 表示為 β 的幕級數，我們得到：

$$M = M_1 \beta + M_2 \beta^2 + M_3 \beta^3 + \dots, \quad (40)$$

其中

$$M_1 = \frac{1}{\beta_1}, \quad M_2 = -\frac{\beta_2}{\beta_1^3}, \quad M_3 = -\frac{\beta_1 \beta_3 - 2\beta_2^2}{\beta_1^5}, \dots. \quad (41)$$

將算式 (40) 代入 (31)，然後歸併 β 的同次項，我們得到 θ, ρ, N 對於位移參數 β

的展開式如下：

$$\left. \begin{aligned} \theta &= M_1 \theta_1 \beta + (M_2 \theta_1 + M_1^2 \theta_2) \beta^2 + (M_3 \theta_1 + 2M_1 M_2 \theta_2 + M_1^3 \theta_3) \beta^3 + \dots, \\ \rho &= M_1 \rho_1 \beta + (M_2 \rho_1 + M_1^2 \rho_2) \beta^2 + (M_3 \rho_1 + 2M_1 M_2 \rho_2 + M_1^3 \rho_3) \beta^3 + \dots, \\ N &= M_1 N_1 \beta + (M_2 N_1 + M_1^2 N_2) \beta^2 + (M_3 N_1 + 2M_1 M_2 N_2 + M_1^3 N_3) \beta^3 + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

如果只取這些級數的前三項，我們便近似地得到：

$$\left. \begin{aligned} \theta &= M_1 \theta_1 \beta + (M_2 \theta_1 + M_1^2 \theta_2) \beta^2 + (M_3 \theta_1 + 2M_1 M_2 \theta_2 + M_1^3 \theta_3) \beta^3, \\ \rho &= M_1 \rho_1 \beta + (M_2 \rho_1 + M_1^2 \rho_2) \beta^2 + (M_3 \rho_1 + 2M_1 M_2 \rho_2 + M_1^3 \rho_3) \beta^3, \\ N &= M_1 N_1 \beta + (M_2 N_1 + M_1^2 N_2) \beta^2 + (M_3 N_1 + 2M_1 M_2 N_2 + M_1^3 N_3) \beta^3. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

五. 工字形截面桿件的扭轉

考慮一長度為 $2L$ 的工字形截面桿件。桿件的兩端鉗接於兩塊剛硬的填板上，而在這兩塊填板上作用一對扭轉力矩 M 而使桿件扭轉，如圖 4 所示。設截面的尺寸如

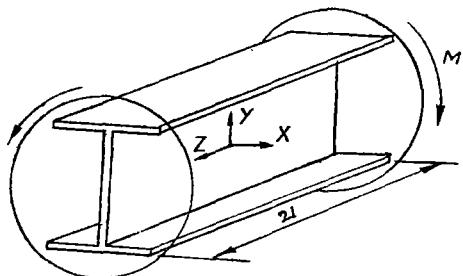


圖 4

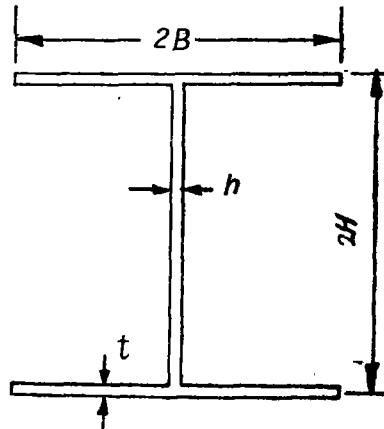


圖 5

圖 5 所示。這個截面的幾何特徵如下：

$$\left. \begin{aligned} F &= 2(Hh + 2Bt), \quad J_{\omega\omega} = \frac{4}{3} B^3 H^2 t, \quad J_{\omega r} = 0, \\ S_r &= \frac{2}{3} H^3 h + 4BH^2 t + \frac{4}{3} B^3 t, \\ J_{rr} &= \frac{2}{5} H^5 h + 4BH^4 t + \frac{8}{3} B^3 H^2 t + \frac{4}{5} B^5 t, \\ J_r &= \frac{8}{3} H^3 h + \frac{16}{3} B^3 t, \quad J_d = \frac{2}{3} (Hh^3 + 2Bt^3). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

由於 $J_{\omega r} = 0$, 再注意到桿件只在兩端負擔一個扭轉力矩 M , 基本方程 (4) 化為

$$EJ_{\omega\omega}\theta'''' - \left(\frac{S_r}{F}N + GJ_d\right)\theta' - E\left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right)\left(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2\right)\theta' = -M, \quad (45a)$$

$$E\left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right)(\rho'' + \theta'\theta'') - GJ_r\rho = 0. \quad (45b)$$

桿件的兩端在扭轉後仍為平面, 所以

$$\text{在 } z = \pm L \text{ 處}, \quad \theta' = 0, \quad \rho = 0. \quad (46a)$$

我們再假定桿件的兩端在扭轉後不能接近, 於是

$$\int_{-L}^L \zeta' dz = \int_{-L}^L \left\{ \frac{N}{EF} - \frac{S_r}{F} \left(\rho' + \frac{1}{2}\theta'^2 \right) \right\} dz = 0,$$

即

$$N = \frac{ES_r}{2L} \int_0^L \theta'^2 dz. \quad (46b)$$

所以總結起來說, 我們的問題是在邊界條件 (46) 下來求解方程 (45).

為了計算方便起見, 我們引進若干無量綱的量如下:

$$\left. \begin{aligned} z &= L\bar{z}, \quad \varphi = \theta' = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{J_{\omega\omega}}{J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}}} \bar{\varphi}, \quad \rho = \frac{J_{\omega\omega}}{L\left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right)} \bar{\rho}, \\ N &= \frac{EJ_{\omega\omega}F}{S_rL^2} \bar{N}, \quad M = \frac{EJ_{\omega\omega}}{L^3} \sqrt{\frac{J_{\omega\omega}}{J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}}} \bar{M}, \\ k &= \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_{\omega\omega}}} L, \quad \lambda = \sqrt{\frac{GJ_r}{E\left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right)}} L, \quad \mu = \frac{S_r^2}{FJ_{rr} - S_r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

把無量綱的坐標 \bar{z} 當作自變數, 把 $\bar{\varphi}, \bar{\rho}, \bar{N}$ 當作 \bar{z} 的函數, 那末我們有:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}'' - (\bar{N} + k^2)\bar{\varphi} - \left(\bar{\rho}' + \frac{1}{2}\bar{\varphi}^2\right)\bar{\varphi} &= -\bar{M}, \\ \bar{\rho}'' - \lambda^2\bar{\rho} + \bar{\varphi}\bar{\varphi}' &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

式中文字上的一撇代表對 \bar{z} 的微分. 方程 (48) 的邊界條件是

$$\text{在 } \bar{z} = \pm 1 \text{ 處}: \quad \bar{\varphi} = 0, \quad \bar{\rho} = 0. \quad (49a)$$

$$\bar{N} = \frac{1}{2}\mu \int_0^1 \bar{\varphi}^2 d\bar{z}. \quad (49b)$$

在本問題中， \bar{M} 是規定載荷大小的唯一的參數，因此我們把 $\bar{\varphi}$, $\bar{\rho}$, \bar{N} 都展成 \bar{M} 的幕級數。考慮到對稱關係可知 $\bar{\varphi}$ 是 \bar{M} 的奇函數， $\bar{\rho}$ 和 \bar{N} 是 \bar{M} 的偶函數，因此我們設

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi} &= \bar{\varphi}_1 \bar{M} + \bar{\varphi}_3 \bar{M}^3 + \cdots, \\ \bar{\rho} &= \bar{\rho}_2 \bar{M}^2 + \bar{\rho}_4 \bar{M}^4 + \cdots, \\ \bar{N} &= \bar{N}_2 \bar{M}^2 + \bar{N}_4 \bar{M}^4 + \cdots. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

將這些算式代入方程 (48) 和邊界條件 (49)，歸併 \bar{M} 的同次項，然後命 \bar{M} 的各次幕的係數為零，我們得到一系列的方程和相關的邊界條件用以決定 $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_3, \dots, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_4, \dots, \bar{N}_2, \bar{N}_4, \dots$ 決定 $\bar{\varphi}_1$ 的方程和邊界條件是

$$\bar{\varphi}_1'' - k^2 \bar{\varphi}_1 = -1, \quad (51a)$$

$$\text{在 } \bar{z} = \pm 1 \text{ 處}, \bar{\varphi}_1 = 0. \quad (51b)$$

解此方程我們得到

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{k^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh k\bar{z}}{\cosh k} \right\}. \quad (52)$$

許多線性問題的計算表明，在約束扭轉時桿件的自由扭轉剛度可以略去不計。在非線性的問題中，由於增加了非線性的效應，桿件的自由扭轉剛度更可略去不計。如果接受這一簡化，那末我們便近似地得到：

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{2} (1 - \bar{z}^2). \quad (53)$$

為了簡便起見，以後我們應用 (53) 式。

將 (53) 代入 (49b)，我們得到

$$\bar{N}_2 = \frac{\mu}{15}. \quad (54)$$

決定 $\bar{\rho}_2$ 的方程和邊界條件是

$$\bar{\rho}_2'' - \lambda^2 \bar{\rho}_2 = -\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_1', \quad (55a)$$

$$\text{在 } \bar{z} = \pm 1 \text{ 處}, \bar{\rho}_2 = 0. \quad (55b)$$

將 (53) 式代入方程 (55a)，得到

$$\bar{\rho}_2'' - \lambda^2 \bar{\rho}_2 = \frac{1}{2} (\bar{z} - \bar{z}^3). \quad (56)$$

在邊界條件 (55b) 下解此方程，我們得到：

$$\bar{\rho}_2 = \frac{1}{2\lambda^4} \left\{ -\lambda^2(\bar{z} - \bar{z}^3) + 6\bar{z} - \frac{6 \sinh \lambda\bar{z}}{\sinh \lambda} \right\}. \quad (57)$$

決定 $\bar{\varphi}_3$ 的方程(略去自由扭轉剛度)和邊界條件是

$$\bar{\varphi}_3'' = \bar{N}_2 \bar{\varphi}_1 + \bar{\rho}_2' \bar{\varphi}_1 + \frac{1}{2} \bar{\varphi}_3^3, \quad (58a)$$

$$\text{在 } \bar{z} = \pm 1 \text{ 處}, \quad \bar{\varphi}_3 = 0. \quad (58b)$$

將 (53), (57) 代入 (58a), 整理後得到:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_3'' = & \frac{1}{16} (1 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z}^4 - \bar{z}^6) + \left(\frac{\bar{N}_2}{2} + \frac{3}{2\lambda^4} \right) (1 - \bar{z}^2) - \\ & - \frac{1}{4\lambda^2} (1 - 4\bar{z}^2 + 3\bar{z}^4) - \frac{3}{2\lambda^3} \cdot \frac{(1-\bar{z}^2) \cosh \lambda \bar{z}}{\sinh \lambda}. \end{aligned} \quad (59)$$

在邊界條件 (58b) 下解此方程, 我們得到:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_3 = & -\frac{1}{16} \left(\frac{93}{280} - \frac{1}{2} \bar{z}^2 + \frac{1}{4} \bar{z}^4 - \frac{1}{10} \bar{z}^6 + \frac{1}{56} \bar{z}^8 \right) - \\ & - \left(\frac{\bar{N}_2}{2} + \frac{3}{2\lambda^4} \right) \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{2} \bar{z}^2 + \frac{1}{12} \bar{z}^4 \right) + \frac{1}{4\lambda^2} \left(\frac{4}{15} - \frac{1}{2} \bar{z}^2 + \frac{1}{3} \bar{z}^4 - \frac{1}{10} \bar{z}^6 \right) - \\ & - \frac{3}{2\lambda^7 \sinh \lambda} \left\{ \lambda^2 (1-\bar{z}^2) \cosh \lambda \bar{z} + 6(\cosh \lambda - \cosh \lambda \bar{z}) - 4\lambda (\sinh \lambda - \bar{z} \sinh \lambda \bar{z}) \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

我們不再繼續進行計算, 因而近似地得到

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 \bar{M} + \bar{\varphi}_3 \bar{M}^3, \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_2 \bar{M}^2, \quad \bar{N} = \bar{N}_2 \bar{M}^2. \quad (61)$$

與外載荷 \bar{M} 對應的廣義位移 $\bar{\beta}$ 是無量綱的桿件兩端的相對扭轉角:

$$\bar{\beta} = \int_{-1}^1 \bar{\varphi} d\bar{z} = 2 \int_0^1 \bar{\varphi} d\bar{z}. \quad (62)$$

$\bar{\beta}$ 與真正的桿件兩端的相對扭轉角 β 的關係是

$$\beta = \sqrt{\frac{J_{\omega\omega}}{J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}}} \bar{\beta}. \quad (63)$$

將 (61) 式代入 (62) 式, 然後根據 (53), (60) 算出積分, 我們得到

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}_1 \bar{M} + \bar{\beta}_3 \bar{M}^3; \quad (64)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \bar{\beta}_1 &= 2 \int_0^1 \bar{\varphi}_1 d\bar{z} = \frac{2}{3}, \\ \bar{\beta}_3 &= 2 \int_0^1 \bar{\varphi}_3 d\bar{z} = -\frac{4}{15} N_2 - \frac{349}{20160} + \frac{8}{105} \frac{1}{\lambda^2} - \frac{4}{5} \frac{1}{\lambda^4} - \\ &\quad - \frac{4}{\lambda^7} \left\{ 3 \coth \lambda - \left(\lambda + \frac{3}{\lambda} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

如果桿件的兩端可以自由接近，那末 $N = 0$ 。因此這個問題的解答可在上列公式中命 $\bar{N}_2 = 0$ 得到。

作為一個數字例子，設桿件各部的尺寸如下（參考圖 4, 5）：

$$L = 50 \text{ cm}, \quad B = 3 \text{ cm}, \quad H = 5 \text{ cm}, \quad h = t = 0.5 \text{ cm}, \\ E = 21 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \quad G = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2,$$

於是根據公式 (44) 和 (47)，桿件的各幾何特徵如下：

$$F = 11 \text{ cm}^2, \quad J_{\omega\omega} = 450 \text{ cm}^6, \quad S_r = 209.3 \text{ cm}^4, \quad J_{rr} = 5372 \text{ cm}^6, \\ J_r = 2387 \text{ cm}^4, \quad \lambda = 12.80, \quad \mu = 2.871.$$

各數量與對應的無量綱參數之間的關係為：

$$\beta = 0.5694 \bar{\beta}, \quad N (\text{kg}) = 19870 \bar{N}, \quad M (\text{kg} \cdot \text{cm}) = 4305 \bar{M}.$$

根據前面的公式我們得到：

1) 桿件兩端面不能接近時

$$\bar{N} = 0.1914 \bar{M}^2, \quad \bar{\beta} = 0.6667 \bar{M} - 0.0679 \bar{M}^3; \quad (66a)$$

2) 桿件兩端可以自由接近時

$$\bar{\beta} = 0.6667 \bar{M} - 0.0169 \bar{M}^3. \quad (66b)$$

從公式 (66) 我們可以看到，當 \bar{M} 超過某一限度後， \bar{M} 增加時 $\bar{\beta}$ 反而減小。這顯然與實際情況不符的。這個事實表明公式的適用範圍頗小。為了化費同樣多的計算以得到較好的結果，我們可根據 (66) 將 \bar{M} 用 $\bar{\beta}$ 的幕級數來表示。這樣我們得到：

1) 桿件兩端面不能接近時，

$$\bar{M} = 1.500 \bar{\beta} + 0.344 \bar{\beta}^3, \quad (67a)$$

2) 桿件兩端面可以自由接近時，

$$\bar{M} = 1.500 \bar{\beta} + 0.085 \bar{\beta}^3. \quad (67b)$$

根據公式 (67)， \bar{M} 和 $\bar{\beta}$ 的關係畫在圖 6 中。

對於別種載荷，我們可用同樣的方法找尋近似解。

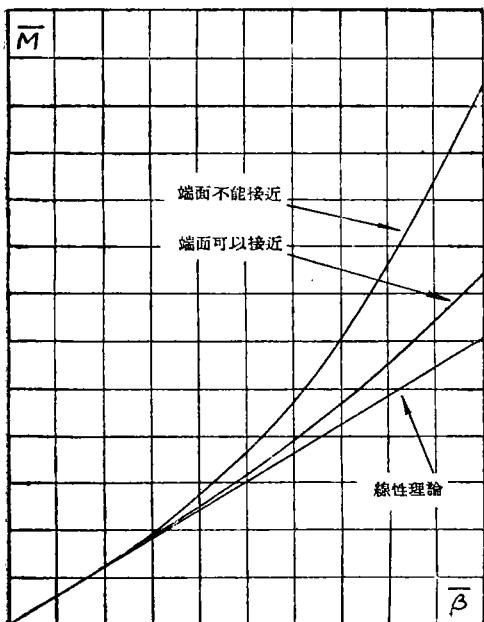


圖 6

參 考 文 獻

- [1] 胡海昌,顧及二級小量的開口截面彈性薄壁桿件的實用理論,物理學報, **12** (1956), 127—138.
- [2] В. З. Глазков, 材料力學、結構力學與彈性力學中的若干問題,中國科學院出版, 1954 年。
- [3] Власов, В. З., Тонкостенные упругие стержни. Госстройиздат, 1940.
- [4] Campbell, A., On vibration galvanometers with unifilar torsional control, *Proc. Phys. Soc., London*, **25** (1913), 203—205.
- [5] Buckley, J. C., Bifilar property of twisted strips, *Phil. Mag.*, **28** (1914), 778—787.
- [6] Cullimore, M. S. G., The shortening effect: a nonlinear feature of pure torsion, Research Engineering structures supplement (1949), 153—164.
- [7] 胡海昌,在均佈及中心集中載荷作用下圓板的大撓度問題,物理學報, **10** (1954), 383—392.

ON THE LARGE TORSION OF ELASTIC THIN-WALLED BARS

HU HAI-CHANG

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The non-linear theory of elastic thin-walled bars of open cross-sections proposed by the author^[1] is applied to the study of large torsion of such bars. The fundamental equations are simplified for the case of bisymmetrical and central symmetrical cross-sections. For non-symmetrical cross-sections, it is generally impossible to obtain pure torsion without bending in the non-linear theory. The problem is solved by a perturbation method. Two specific examples are considered.