

開口截面彈性薄壁桿件的穩定性*

胡海昌

(中國科學院數學研究所)

一. 引言

本文的目的是應用作者^[1]最近提出的顧及二級小量的開口截面彈性薄壁桿件的實用理論,來研究這類桿件的穩定性。開口截面彈性薄壁桿件的各種穩定問題,受到力學家和工程師的普遍注意。早在 1899 年, L. 普郎多^[2]和 A. G. M. 米恰爾^[3]就研究了狹矩形截面桿件的側向穩定性。之後, S. 鐵木辛柯^[4,5]研究了工字形截面桿件的側向穩定性。到 1929 年, H. 華格納爾^[6,7]首先企圖建立開口截面彈性薄壁桿件的一般穩定理論。但是由於他錯誤地以為桿件失去穩定後的旋轉中心與截面的扭轉中心相重,因此他的理論實際上只適用於截面具有兩個對稱軸的情況。目前通用的一般理論是由 B. 3. 符拉索夫^[8,9]在 1936 年獨立地建立的。由於 B. 3. 符拉索夫和他的同事的努力,他的理論在實際中已獲得廣泛的應用。在薄壁桿件穩定問題方面的研究,還需要提到下列諸人的工作: 匈牙利的 P. 邱卡^[10,11,12]和 E. 沃爾茨基^[13],他們研究了狹矩形截面桿件在均佈載荷作用下的若干穩定問題; 波蘭的 J. 盧脫茨基^[14],他考慮到截面形狀的可變性。

本文先將文獻 [1] 中的基本方程加以線性化。這樣得到的穩定問題的基本方程和 B. 3. 符拉索夫的基本方程不同。在桿件承受均勻中心壓縮的情況,不同的原因是本文增加了一個新的廣義縱向位移 ρ 。數字計算表明, ρ 對於臨界載荷的影響不大。因此本文在考慮偏心壓縮的穩定性時,為了簡便起見便忽略了 ρ 。在忽略 ρ 的情況下,本文的方程和 B. 3. 符拉索夫的方程還不相同。不同的原因主要是本文考慮到桿件失去穩定前的彎曲狀態,而在 B. 3. 符拉索夫的理論中,係假定桿件在失去穩定前是平直的。由於這個原因,本文的臨界載荷比依照 B. 3. 符拉索夫理論得到的大。Г. М. 邱維金^[15]也曾注意到這種效應。對於十字形截面桿件和工字形截面桿件承受

*1955 年 10 月 30 日收到。

力矩作用的情況，計算表明只有在截面狹而高時才可能失去穩定，而在截面寬而扁時便不可能失去穩定。這就質的方面說來是符合實際情況的。

二. 在任意載荷作用下穩定問題的一般方程

考慮一開口截面彈性薄壁桿件在某種載荷 $q_{x0}, q_{y0}, q_{z0}, m_{x0}, m_{y0}, m_{z0}, b_0, d_0, m_0$ 作用下處於平衡狀態。設在此種載荷作用下桿件的廣義位移是 $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \theta_0, \rho_0$ ，廣義內力是 $N_0, M_{x0}, M_{y0}, B_0, R_0$ 。根據文獻 [1] 公式 (9), (11) 和方程 (27), $\xi_0, \eta_0, \dots, B_0, R_0$ 等適合下列方程和適當的邊界條件：

$$\frac{N_0}{E} = F(\zeta'_0 + \frac{1}{2} \xi_0'^2 + \frac{1}{2} \eta_0'^2 + b\xi'_0 \theta'_0 - a\eta'_0 \theta'_0) + S_r(\rho'_0 + \frac{1}{2} \theta_0'^2), \quad (1a)$$

$$\frac{M_{x0}}{E} = -J_{yy}(\eta_0'' + \xi'_0 \theta'_0) + J_{yr}(\rho'_0 + \frac{1}{2} \theta_0'^2), \quad (1b)$$

$$\frac{M_{y0}}{E} = J_{xx}(\xi_0'' - \eta'_0 \theta'_0) - J_{xr}(\rho'_0 + \frac{1}{2} \theta_0'^2), \quad (1c)$$

$$\frac{B_0}{E} = -J_{\omega\omega} \theta_0'' + J_{\omega r}(\rho'_0 + \frac{1}{2} \theta_0'^2), \quad (1d)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_0}{E} = & \frac{S_r}{EF} N_0 - J_{xr}(\xi_0'' - \eta'_0 \theta'_0) - J_{yr}(\eta_0'' + \xi'_0 \theta'_0) - J_{\omega r} \theta_0'' + \\ & + (J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}) (\rho'_0 + \frac{1}{2} \theta_0'^2); \end{aligned} \quad (1e)$$

$$N'_0 = -q_{x0}, \quad (2a)$$

$$M''_{y0} - [(\xi'_0 + b\theta'_0) N_0 - \theta'_0 M_{x0}]' = q_{x0} - m'_{y0}, \quad (2b)$$

$$-M''_{x0} - [(\eta'_0 - a\theta'_0) N_0 - \theta'_0 M_{y0}]' = q_{y0} + m'_{x0}, \quad (2c)$$

$$\begin{aligned} -B'_0 - [(b\xi'_0 - a\eta'_0) N_0 + (R_0 + G J_d) \theta'_0 - \xi'_0 M_{x0} - \eta'_0 M_{y0}]' + \\ + m_0 \theta_0 = m_{x0} + b'_0, \end{aligned} \quad (2d)$$

$$R'_0 - G J_r \rho_0 = -d_0. \quad (2e)$$

我們假定外載荷的大小依賴於某一參數 λ ，並且 λ 小時載荷也小， λ 大時載荷也大。在 λ 足夠小時，載荷很小，因而桿件的平衡狀態是唯一的並且是穩定的。當 λ 頗大時，桿件的平衡狀態不再是唯一的，並且上列解答不一定相應於穩定的平衡狀態。

現在我們要決定 λ 的這樣的臨界值 λ_{cr} , 它相應於平衡狀態從唯一的一個過渡到有若干個。

在 λ 接近 λ_{cr} 時, 如果可能有幾個平衡狀態的話, 那末它們都接近於上列平衡狀態 $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \theta_0, \rho_0$. 因此我們把桿件的廣義位移表示為:

$$\xi_0 + \xi, \quad \eta_0 + \eta, \quad \zeta_0 + \zeta, \quad \theta_0 + \theta, \quad \rho_0 + \rho; \quad (3)$$

而把廣義內力表示為

$$M_{x0} + M_x, \quad M_{y0} + M_y, \quad N_0 + N, \quad B_0 + B, \quad R_0 + R. \quad (4)$$

由於 λ 接近於 λ_{cr} 時幾個平衡狀態都相接近, 所以 $\xi, \eta, \zeta, \theta, \rho, M_x, M_y, N, B, R$ 都是小量, 並且當 λ 趨近於 λ_{cr} 時它們都趨近於零。

將算式 (3), (4) 代入文獻 [1] 的公式 (9), (11) 和方程 (27), 然後令 λ 趨近於 λ_{cr} , 即令 ξ, \dots, M_x, \dots 等趨近於零, 注意到公式 (1) 和 (2), 我們得到:

$$\begin{aligned} -\frac{N}{E} = & F [\zeta' + \xi'_0 \xi' + \eta'_0 \eta' + b(\theta'_0 \xi' + \xi'_0 \theta') - a(\theta'_0 \eta' + \eta'_0 \theta')] + \\ & + S_r(\rho' + \theta'_0 \theta'), \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\frac{M_x}{E} = -J_{yy}(\eta'' + \theta'_0 \xi' + \xi'_0 \theta') + J_{yr}(\rho' + \theta'_0 \theta'), \quad (5b)$$

$$\frac{M_y}{E} = J_{xx}(\xi'' - \theta'_0 \eta' - \eta'_0 \theta') - J_{xr}(\rho' + \theta'_0 \theta'), \quad (5c)$$

$$\frac{B}{E} = -J_{\omega\omega}\theta'' + J_{\omega r}(\rho' + \theta'_0 \theta'), \quad (5d)$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{E} = & \frac{S_r}{EF} N - J_{xr}(\xi'' - \theta'_0 \eta' - \eta'_0 \theta') - J_{yr}(\eta'' + \theta'_0 \xi' + \xi'_0 \theta') - \\ & - J_{\omega r}\theta'' + (J_{rr} - \frac{S_r^2}{F})(\rho' + \theta'_0 \theta'); \end{aligned} \quad (5e)$$

$$N' = 0, \quad (6a)$$

$$M_y'' - [(\xi'_0 + b\theta'_0)N + N_0(\xi' + b\theta') - \theta'_0 M_x - M_{x0}\theta']' = 0, \quad (6b)$$

$$-M_x'' - [(\eta'_0 - a\theta'_0)N + N_0(\eta' - a\theta') - \theta'_0 M_y - M_{y0}\theta']' = 0, \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} -B'' - [(b\xi'_0 - a\eta'_0)N + N_0(b\xi' - a\eta') + (R_0 + GJ_d)\theta' + \theta'_0 R - \\ - \xi'_0 M_x - M_{x0}\xi' - \eta'_0 M_y - M_{y0}\eta']' + m_0\theta = 0, \end{aligned} \quad (6d)$$

$$R' - GJ_r\rho = 0. \quad (6e)$$

從方程 (6a) 立刻可得到

$$N = \text{const.} \quad (7)$$

如果桿件在失去穩定後保持縱向力不變, 那末便可取 $N = 0$.

公式 (5) 是穩定問題中廣義位移和廣義內力 (都是指增量) 之間的一般關係. 方程 (6) 是穩定問題中的一般平衡方程. 它會同適當的邊界條件後便可決定臨界值 λ_{cr} 和決定桿件失去穩定後的彎扭形式.

由於方程 (1), (2) 是非線性的, 使人難於找到原始的平衡狀態, 這樣便大大地限制了能夠求解的穩定問題的種類. 為了避免這一困難, 我們認為可以把方程 (1), (2) 中的非線性項全部忽略.

略去方程 (1), (2) 中的二級小量後, 它們便變為

$$\left. \begin{aligned} \frac{N_0}{E} &= F \zeta'_0 + S_r \rho'_0, \quad \frac{M_{x0}}{E} = -J_{yy} \eta''_0 + J_{yr} \rho'_0, \quad \frac{M_{y0}}{E} = J_{xx} \xi''_0 - J_{xr} \rho'_0, \\ \frac{B_0}{E} &= -J_{\omega\omega} \theta''_0 + J_{\omega r} \rho'_0, \quad \frac{R_0}{E} = \frac{S_r}{EF} N_0 - J_{xr} \xi''_0 - J_{yr} \eta''_0 - J_{\omega r} \theta''_0 + \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right) \rho'_0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$N'_0 = -q_{x0}, \quad (9a)$$

$$E J_{xx} \xi_0^{IV} - E J_{xr} \rho_0''' = q_{x0} - m'_{y0}, \quad (9b)$$

$$E J_{yy} \eta_0^{IV} - E J_{yr} \rho_0''' = q_{y0} + m'_{x0}, \quad (9c)$$

$$E J_{\omega\omega} \theta_0^{IV} - G J_d \theta_0'' - E J_{\omega r} \rho_0''' = m_{z0} + b'_0, \quad (9d)$$

$$-E J_{xr} \xi_0''' - E J_{yr} \eta_0''' - E J_{\omega r} \theta_0''' + E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}\right) \rho_0'' - G J_r \rho_0 = \frac{S_r}{F} q_{z0} - d_0. \quad (9e)$$

把方程 (1), (2) 簡化為方程 (8), (9), 使得 ζ_0, ξ_0, \dots 等有了二級小量的更動, 結果使得方程 (5), (6) 有了三級小量的更動. 由此可知, 在只顧及二級小量的範圍內, 把方程 (1), (2) 簡化為 (8), (9), 並不影響 ξ, η, \dots 等的數值, 因而在同樣的範圍內, 也不影響臨界載荷的數值. 本文以後就應用方程 (8), (9) 而不用 (1), (2).

還有一個可用的簡化是假定 $\rho_0 = \rho = 0$, 而把相應於 ρ_0 和 ρ 的方程 [如方程 (2e), (6e), (9e)] 忽略不管, 這個假定是與公認的實用理論相符的. 本文以後也將用到這個假定.

如果桿件在失去穩定前的平衡狀態是無扭轉的彎曲, 即 $\theta_0 = 0$, 同時在失去穩定後又保持縱向內力 N 不變, 那末上列公式可以得到很大的簡化.

這時公式 (5a) 可以不管, 而公式 (5b)—(5e) 簡化為:

$$\frac{M_x}{E} = -J_{yy}(\eta'' + \xi'_0 \theta') + J_{yr} \rho', \quad (10a)$$

$$\frac{M_y}{E} = J_{xx}(\xi'' - \eta'_0 \theta') - J_{xr} \rho', \quad (10b)$$

$$\frac{B}{E} = -J_{\omega\omega} \theta'' + J_{\omega r} \rho', \quad (10c)$$

$$\frac{R}{E} = -J_{xr}(\xi'' - \eta'_0 \theta') - J_{yr}(\eta'' + \xi'_0 \theta') - J_{\omega r} \theta'' + (J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}) \rho'. \quad (10d)$$

在方程 (6) 中命 $N = \theta_0 = 0$, 然後將公式 (10) 代入, 略去三級小量後我們得到:

$$E J_{xx} \xi^{IV} - E J_{xr} \rho''' - [N_0(\xi' + b\theta')]' + (M_{x0} \theta')' - E J_{xx}(\eta'_0 \theta')'' = 0, \quad (11a)$$

$$E J_{yy} \eta^{IV} - E J_{yr} \rho''' - [N_0(\eta' - a\theta')]' + (M_{y0} \theta')' + E J_{yy}(\xi'_0 \theta')'' = 0, \quad (11b)$$

$$E J_{\omega\omega} \theta^{IV} - E J_{\omega r} \rho''' - [(R_0 + G J_d) \theta']' + m_0 \theta + [(M_{x0} - bN_0) \xi' + (M_{y0} + aN_0) \eta']' + E[J_{xx} \eta'_0 \xi'' - J_{yy} \xi'_0 \eta'' + (J_{yr} \xi'_0 - J_{xr} \eta'_0) \rho']' = 0, \quad (11c)$$

$$- E J_{xr}(\xi'' - \eta'_0 \theta')' - E J_{yr}(\eta'' + \xi'_0 \theta')' - E J_{\omega r} \theta''' + E(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}) \rho'' - G J_r \rho = 0. \quad (11d)$$

B. 3. 符拉索夫也曾建立了開口截面彈性薄壁桿件的無扭轉的彎曲平衡狀態的穩定理論¹⁾. 他的方程與本文的方程 (10), (11) 不同. 不同的原因除了本文引進一個新的廣義位移 ρ 之外, 還在於對若干數量的大小估計上不同. 因此值得指出如何從本文的方程 (10), (11) 導出 B. 3. 符拉索夫的方程.

首先應假定 $\rho = 0$ 而把方程 (10d), (11d) 忽略不管. 其次在不顧方程 (8) 的情況下假定原始撓度 ξ_0 和 η_0 都等於零. 這樣我們得到:

$$M_x = -E J_{yy} \eta'', \quad M_y = E J_{xx} \xi'', \quad B = -E J_{\omega\omega} \theta'', \quad (12)$$

$$E J_{xx} \xi^{IV} - [N_0(\xi' + b\theta')]' + (M_{x0} \theta')' = 0, \quad (13a)$$

$$E J_{yy} \eta^{IV} - [N_0(\eta' - a\theta')]' + (M_{y0} \theta')' = 0, \quad (13b)$$

$$E J_{\omega\omega} \theta^{IV} - [(R_0 + G J_d) \theta']' + m_0 \theta + [(M_{x0} - bN_0) \xi' + (M_{y0} + aN_0) \eta']' = 0. \quad (13c)$$

最後應在方程 (13a) - (13c) 的左端各加上下列三項:

$$(M'_{x0} \theta)', \quad (M'_{y0} \theta)', \quad - (M'_{x0} \xi' + M'_{y0} \eta').$$

1) 見文獻 [8] 第五章.

這樣它們變為

$$EJ_{xx} \xi^{IV} - [N_0 (\xi' + b\theta')] + (M_{x0} \theta')' = 0, \quad (14a)$$

$$EJ_{yy} \eta^{IV} - [N_0 (\eta' - a\theta')] + (M_{y0} \theta')' = 0, \quad (14b)$$

$$EJ_{\omega\omega} \theta^{IV} - [(R_0 + GJ_d) \theta'] + m_0 \theta - b(N_0 \xi')' + a(N_0 \eta')' + M_{x0} \xi'' + M_{y0} \eta'' = 0. \quad (14c)$$

這便是 B. 3. 符拉索夫理論的基本方程¹⁾。

在方程 (13) 的左端是否應當加入上面所指出的三項是值得作進一步的研究的。在 M_{x0} 和 M_{y0} 都是常數的場合，這三項都等於零，因此加或不加都不起作用。這裏已可發現的是假定 $\xi_0 = \eta_0 = 0$ 一般是不妥當的，因為

$$EJ_{xx} (\eta'_0 \theta')'' \text{ 和 } (M_{x0} \theta')', \quad EJ_{yy} (\xi'_0 \theta')'' \text{ 和 } (M_{y0} \theta')',$$

$$EJ_{xx} \eta'_0 \xi'' \text{ 和 } M_{x0} \xi', \quad EJ_{yy} \xi'_0 \eta'' \text{ 和 } M_{y0} \eta'$$

都是同級大小的數量，因此依照本文的理論看來，不應當忽略第一個而保留第二個，而應當將兩個都保留。

由此可知 B. 3. 符拉索夫的理論適用於研究桿件的平直狀態（即 $\xi_0 = \eta_0 = \theta_0 = 0$ ）的穩定性。這種平直狀態可以是均勻壓縮、也可以是桿件本來是彎的而在加上載荷後它恰恰變為平直的。仔細分析 B. 3. 符拉索夫的推理，可以發現不知不覺地應用到“桿件的原始狀態是平直的”這一假定。

三. 均勻壓縮的穩定性

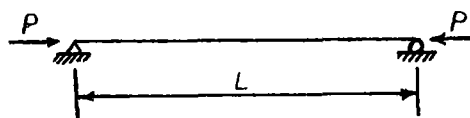


圖 1

最簡單最常遇的一種情況是桿件在均勻壓縮下的穩定性。設有一桿件，它的長度為 L ，在兩端承受壓力 P 而被均勻壓縮，如圖 1 所示。桿件在失去穩定前的廣義位移

顯然是：

$$\zeta_0 = -\frac{P}{EF} z, \quad \xi_0 = \eta_0 = \theta_0 = \rho_0 = 0. \quad (15)$$

將此代入公式 (8)，我們得到失去穩定前的廣義內力：

$$N_0 = -P, \quad M_{x0} = M_{y0} = B_0 = 0, \quad R_0 = -\frac{S_r}{F} P. \quad (16)$$

1) 見文獻 [8] 第 209 頁方程 (37)。符號稍有不同。

假定桿件失去穩定後縱向內力的大小不變。將 (15), (16) 代入方程 (11), 我們得到

$$EJ_{xx} \xi^{IV} - EJ_{xr} \rho''' + P\xi'' + bP\theta'' = 0, \quad (17a)$$

$$EJ_{yy} \eta^{IV} - EJ_{yr} \rho''' + P\eta'' - aP\theta'' = 0, \quad (17b)$$

$$EJ_{\omega\omega} \theta^{IV} - EJ_{\omega r} \rho''' - (GJ_d - \frac{S_r}{F} P) \theta'' + bP\xi'' - aP\eta'' = 0, \quad (17c)$$

$$-EJ_{xr} \xi''' - EJ_{yr} \eta''' - EJ_{\omega r} \theta''' + (J_{rr} - \frac{S_r^2}{F}) \rho'' - GJ_r \rho = 0. \quad (17d)$$

這便是在均勻壓縮下穩定問題的一般方程。方程 (17) 會同適當的邊界條件後, 便可決定臨界載荷 P 和桿件失去穩定後的彎曲扭轉形式。

方程 (17) 與 B. 3. 符拉索夫理論中相當的方程的差別在於、並且僅僅在於這裏引進了一個新的廣義位移 ρ 。由此可知根據本文的理論所得到的臨界載荷, 不會比根據 B. 3. 符拉索夫的理論得到的大。

如果桿件的兩端是簡支的, 即在端面上:

$$\xi = \eta = \theta = 0, \quad M_x = M_y = B = R = 0, \quad (18)$$

那末邊界條件為

在 $z = 0$ 和 $z = L$ 處,

$$\xi = \eta = \theta = 0, \quad \xi'' = \eta'' = \theta'' = \rho' = 0. \quad (19)$$

爲了滿足這些邊界條件, 我們可設 ξ, η, θ, ρ 有如下的形式:

$$\xi = A \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \eta = B \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \theta = C \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \rho = D \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi z}{L}; \quad (20)$$

其中 A, B, C, D 爲常數。將這些算式代入方程 (17), 約去公因子後, 我們得到 A, B, C, D 的四個齊次方程如下:

$$\left. \begin{aligned} (P_x - P) A - bPC - p_{xr} D &= 0, \\ (P_y - P) B + aPC - p_{yr} D &= 0, \\ -bPA + aPB + \frac{S_r}{F} (P_\omega - P) C - p_{\omega r} D &= 0, \\ -p_{xr} A - p_{yr} B - p_{\omega r} C + p_{rr} D &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{EJ_{xx}\pi^2}{L^2}, \quad P_y = \frac{EJ_{yy}\pi^2}{L^2}, \quad P_\omega = -\frac{F}{S_r} \left(\frac{EJ_{\omega\omega}\pi^2}{L^2} + GJ_d \right), \quad p_{xr} = \frac{EJ_{xr}\pi^2}{L^2}, \\ p_{yr} &= \frac{EJ_{yr}\pi^2}{L^2}, \quad p_{\omega r} = \frac{EJ_{\omega r}\pi^2}{L^2}, \quad p_{rr} = E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \frac{\pi^2}{L^2} + GJ_r. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

要方程 (21) 有不全為零的解，必須它的行列式為零：

$$\begin{vmatrix} P_x - P, & 0, & -bP, & -p_{xr} \\ 0, & P_y - P, & aP, & -p_{yr} \\ -bP, & aP, & \frac{S_r}{F}(P_\omega - P), & -p_{\omega r} \\ -p_{xr}, & -p_{yr}, & -p_{\omega r}, & p_{rr} \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

這是 P 的一個三次方程，因此 P 有三個根。其中最小的一個便是所求的臨界壓力。

如果桿件的截面具有對稱性質，那末方程 (23) 可有很大的簡化。

如果 x 軸是截面的對稱軸，那末

$$b = 0, \quad J_{yr} = J_{\omega r} = 0, \quad p_{yr} = p_{\omega r} = 0. \quad (24)$$

於是方程 (21) 化為：

$$(P_x - P)A - p_{xr}D = 0, \quad -p_{xr}A + p_{rr}D = 0. \quad (25a)$$

$$(P_y - P)B + aPC = 0, \quad aPB + \frac{S_r}{F}(P_\omega - P)C = 0. \quad (25b)$$

方程 (25a) 只涉及到 A, D ，而方程 (25b) 只涉及到 B, C ，因此它們是彼此無關的。由此我們知道臨界載荷適合下列兩個方程之一：

$$\frac{S_r}{F}(P_y - P)(P_\omega - P) - a^2P^2 = 0, \quad (26a)$$

$$p_{rr}(P_x - P) - p_{xr}^2 = 0. \quad (26b)$$

方程 (26a) 和根據 B. 3. 符拉索夫理論得到的方程相同。這個方程的兩個根是（其中 $\mu = a^2F/S_r$ ）：

$$P = \frac{P_y + P_\omega \pm \sqrt{(P_y + P_\omega)^2 - 4(1 - \mu)P_yP_\omega}}{2(1 - \mu)}. \quad (27)$$

方程 (26b) 與 B. 3. 符拉索夫的不同。由此我們得到：

$$P = P_x - \frac{p_{xr}^2}{p_{rr}}, \quad (28a)$$

即

$$P = \frac{EJ_{xx}\pi^2}{L^2} \left\{ 1 - \frac{J_{xr}^2}{J_{xx} \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} + \frac{GJ_r L^2}{E\pi^2} \right)} \right\}. \quad (28b)$$

這個臨界壓力比 B. 3. 符拉索夫的小，並且 L 愈小，它就小得愈多。

如果 x 軸和 y 軸都是截面的對稱軸，那末除 (24) 式外還有：

$$a = 0, \quad J_{xr} = 0, \quad p_{xr} = 0. \quad (29)$$

因而 P 的三個根是：

$$P = P_x, \quad P = P_y, \quad P = P_\omega. \quad (30)$$

這個結果與根據 B. 3. 符拉索夫理論得到的相同。

如果桿件截面是心對稱，那末

$$a = b = 0, \quad J_{xr} = J_{yr} = 0, \quad p_{xr} = p_{yr} = 0. \quad (31)$$

於是 P 的三個根是：

$$P = P_x, \quad P = P_y, \quad P = P_\omega - \frac{F}{S_r} \cdot \frac{p_{\omega r}^2}{p_{rr}}. \quad (32)$$

前兩個是歐拉臨界值，後面一個比 B. 3. 符拉索夫理論中相應的臨界值小，並且可以證明， L 愈小，則它小得愈多。

如果桿件的兩端是夾住的，那末邊界條件為：

在 $z = 0$ 和 $z = L$ 處，

$$\xi = \eta = \theta = \rho = 0, \quad \xi' = \eta' = \theta' = 0. \quad (33)$$

為了滿足這些邊界條件，我們可設 ξ, η, θ, ρ 有如下的形式：

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right), & \eta &= B \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right), \\ \theta &= C \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right), & \rho &= D \frac{2\pi}{L} \sin \frac{2\pi z}{L}; \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

其中 A, B, C, D 為常數。將此式代入方程 (17)，約去公因子後我們得到：

$$\left. \begin{aligned} (P_x - P) A - b P C - p_{xr} D &= 0, \\ (P_y - P) B + a P C - p_{yr} D &= 0, \\ -b P A + a P B + \frac{S_r}{F} (P_\omega - P) - p_{\omega r} D &= 0, \\ -p_{xr} A - p_{yr} B - p_{\omega r} C + p_{rr} D &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{E J_{xx} \pi^2}{(L/2)^2}, & P_y &= \frac{E J_{yy} \pi^2}{(L/2)^2}, & P_\omega &= \frac{F}{S_r} \left(\frac{E J_{\omega\omega} \pi^2}{(L/2)^2} + G J_d \right), & p_{xr} &= \frac{E J_{xr} \pi^2}{(L/2)^2}, \\ p_{yr} &= \frac{E J_{yr} \pi^2}{(L/2)^2}, & p_{\omega r} &= \frac{E J_{\omega r} \pi^2}{(L/2)^2}, & p_{rr} &= E \left(J_{rr} - \frac{S_r^2}{F} \right) \frac{\pi^2}{(L/2)^2} + G J_r. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

方程 (35) 在形式上與方程 (21) 完全一樣。比較公式 (22) 和 (36) 可以看到，對於臨界載荷而言，兩端夾住的桿件相當於一半長度的兩端簡支的桿件。

作為本節理論的一個例子，我們來考慮一個角形截面的桿件，如圖 2 所示。設截面是等厚度的（厚度為 h ），兩肢長度的比為 3 : 5。這個截面的重心與兩肢的距離

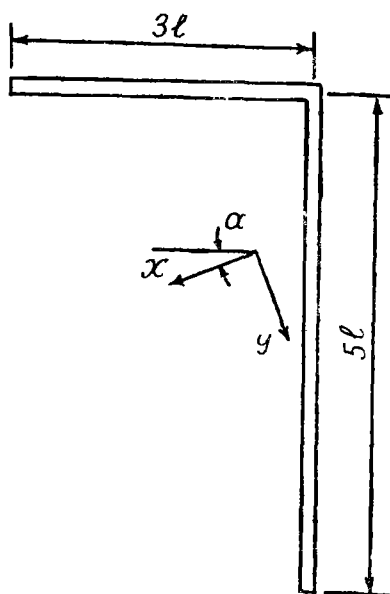


圖 2

為 $0.56l$ 和 $1.56l$ ，而主坐標 x 軸與一肢的夾角為 $\alpha = 20^\circ 57'$ 。扭轉中心顯然在兩肢的交點。由於 $\omega \equiv 0$ ，所以 $J_{\omega\omega} = J_{\omega x} = J_{\omega y} = J_{\omega r} = 0$ 。其他的幾何特徵如下：

$$\left. \begin{aligned} a &= -1.084l, & b &= -1.258l, \\ F &= 8lh, & S_r &= 50.67hl^3, \\ J_{rr} &= 641.2hl^5, & J_{xx} &= 3.776hl^3, \\ J_{yy} &= 20.305hl^3, & J_{xr} &= 7.249hl^4, \\ J_{yr} &= 64.21hl^4, & J_r &= 202.6hl^3, \\ J_d &= 2.667h^3l. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

設桿件的兩端是簡支的，並假定 $G = 0.4E$ ，我們從 (23) 得到特徵方程如下：

$$\begin{vmatrix} 37.27 - \bar{P}, & 0, & 1.258\bar{P}, & -71.54 \\ 0 & 200.40 - \bar{P}, & -1.084\bar{P}, & -633.7 \\ 1.258\bar{P}, & -1.084\bar{P}, & 6.333(0.1684\lambda - \bar{P}), & 0 \\ -71.54, & -633.7, & 0, & 3161 + 81.07\mu \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

其中

$$\bar{P} = \frac{PL^2}{Ehl^3}, \quad \lambda = \frac{h^2L^2}{l^4}, \quad \mu = \frac{L^2}{l^2}. \quad (39)$$

今設 $\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$ (即 $\lambda = \frac{1}{25}\mu$)。展開行列式 (38)，我們得到

$$\mu^2(3.459\bar{P}^2 - 822.0\bar{P} + 25830) - \mu(289.9\bar{P}^3 - 9290\bar{P}^2 + 384900\bar{P} - 325000) - 11300\bar{P}^3 + 1807000\bar{P}^2 - 48250000\bar{P} = 0. \quad (40)$$

根據這個方程我們得到 P 與 L 的關係如圖 3 中的曲線 I 所示。

如果根據 B. 3. 符拉索夫的理论，那末得到特徵方程：

$$\mu(3.459\bar{P}^2 - 822.0\bar{P} + 25830) - 290.0\bar{P}^3 + 92760\bar{P}^2 - 3834000\bar{P} = 0.$$

由這個方程規定的 P 與 L 的關係，在圖 3 中幾乎與由本文理論得到的曲線沒有區別。在圖 3 中還畫出了根據歐拉理論得到的曲線 II。

從這個例子可以得到如下的結論：略去廣義位移 ρ 對臨界力沒有很大的影響。因此以後為了簡便起見我們就略去 ρ 。

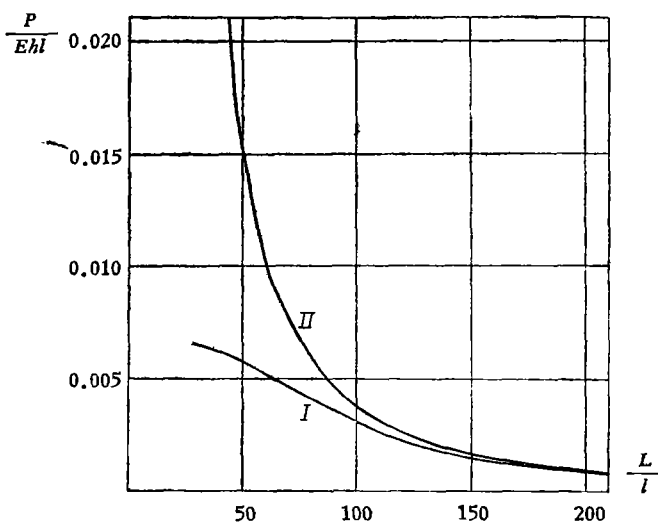


圖 3

四. 偏 心 壓 縮 的 穩 定 性

設有一兩端簡支的桿件，在兩端承受撓矩 M_{x0} , M_{y0} 和壓力 $N_0 = -P$ 的作用。現在需要決定這個桿件的穩定性。為了計算簡便起見，我們將採用近似方法。首先我們忽略 ρ_0 和 ρ ，這樣本節的理論與 B. 3. 符拉索夫理論的差別僅僅在於這裏我們考慮到桿件的原始彎曲狀態。

桿件的原始撓度是：

$$\xi_0 = -\frac{M_{y0}}{2EJ_{xx}} z(L-z), \quad \eta_0 = \frac{M_{x0}}{2EJ_{yy}} z(L-z). \quad (41)$$

桿中的原始內力是：

$$N_0 = -P, \quad M_{x0}, \quad M_{y0}, \quad B_0 = 0, \quad R_0 = -\frac{S_r}{F} P - \frac{J_{xr}}{J_{xx}} M_{y0} + \frac{J_{yr}}{J_{yy}} M_{x0}. \quad (42)$$

在忽略 ρ 的條件下，方程 (11) 化爲：

$$EJ_{xx} \xi^{IV} + P(\xi'' + b\theta'') + M_{x0} \theta'' - \frac{J_{xx} M_{x0}}{2J_{yy}} [(L-2z) \theta']'' = 0, \quad (43a)$$

$$EJ_{yy} \eta^{IV} + P(\eta'' - a\theta'') + M_{y0} \theta'' - \frac{J_{yy} M_{y0}}{2J_{xx}} [(L-2z) \theta']'' = 0, \quad (43b)$$

$$EJ_{\omega\omega} \theta^{IV} - (R_0 + GJ_d) \theta'' + (M_{x0} + bP) \xi'' + (M_{y0} - aP) \eta'' + \frac{J_{yy} M_{y0}}{2J_{xx}} [(L-2z) \eta']'' + \frac{J_{xx} M_{x0}}{2J_{yy}} [(L-2z) \xi']'' = 0. \quad (43c)$$

設桿件的兩端是簡支的，即在失去穩定後桿端沒有撓度和扭轉角，同時力矩保持不變，那末根據公式 (10) 邊界條件爲

$$\xi = \eta = 0, \quad \xi'' - \frac{M_{x0}}{2E J_{yy}} (L - 2z) \theta' = 0, \quad \eta'' - \frac{M_{y0}}{2E J_{xx}} (L - 2z) \theta' = 0, \quad (44a)$$

$$\theta = \theta'' = 0. \quad (44b)$$

由於在方程 (43) 和邊界條件 (44) 中出現了帶有變係數的幾項，它的準確解很難找到。因此本節我們將用伽遼金方法（在下面敘述的伽遼金方法就是能量法）來找尋近似解。

將方程 (43a), (43b) 積分兩次，我們得到

$$E J_{xx} \xi'' + P(\xi + b\theta) + M_{x0} \theta - \frac{J_{xx} M_{x0}}{2J_{yy}} (L - 2z) \theta' = A + Bz, \quad (45a)$$

$$E J_{yy} \eta'' + P(\eta - a\theta) + M_{y0} \theta - \frac{J_{yy} M_{y0}}{2J_{xx}} (L - 2z) \theta' = C + Dz. \quad (45b)$$

利用邊界條件 (44) 容易證明 $A = B = C = D = 0$ ，因而 (45) 化爲：

$$E J_{xx} \xi'' + P\xi + (M_{x0} + bP) \theta - \frac{J_{xx} M_{x0}}{2J_{yy}} (L - 2z) \theta' = 0,$$

$$E J_{yy} \eta'' + P\eta + (M_{y0} - aP) \theta - \frac{J_{yy} M_{y0}}{2J_{xx}} (L - 2z) \theta' = 0. \quad (46)$$

這樣基本方程化爲 (46) 和 (43c)，而相關的邊界條件可取爲：

$$\text{在 } z = 0 \text{ 和 } z = L \text{ 處：} \xi = \eta = \theta = \theta'' = 0. \quad (47)$$

假定 ξ, η, θ 可近似地表示爲下列形式：

$$\xi = A \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \eta = B \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \theta = C \sin \frac{\pi z}{L}. \quad (48)$$

這些算式已滿足了邊界條件 (47)。將它們代入方程 (46) 和 (43c) 的左端，乘以 $\sin \frac{\pi z}{L}$ 後對坐標 z 從 D 到 L 積分，令最後所得的結果爲零，我們得到

$$\left. \begin{aligned} (-P_x + P) A + [(1 - \alpha_x) M_{x0} + bP] C &= 0, \\ (-P_y + P) B + [(1 - \alpha_y) M_{y0} - aP] C &= 0, \\ [(1 - \alpha_x) M_{x0} + bP] A + [(1 - \alpha_y) M_{y0} - aP] B + \\ &+ \left(-\frac{S_r}{F} P_\omega + \frac{S_r}{F} P + 2\beta_x M_{y0} - 2\beta_y M_{x0} \right) C = 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{E J_{xx} \pi^2}{L^2}, \quad P_y = \frac{E J_{yy} \pi^2}{L^2}, \quad P_\omega = \frac{F}{S_r} \left(\frac{E J_{\omega\omega} \pi^2}{L^2} + G J_d \right), \\ \alpha_x &= \frac{J_{xx}}{2J_{yy}}, \quad \alpha_y = \frac{J_{yy}}{2J_{xx}}, \quad \beta_x = \frac{J_{xr}}{2J_{xx}}, \quad \beta_y = \frac{J_{yr}}{2J_{yy}}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

要方程 (49) 有不全等於零的解，必須它的行列式爲零：

$$\begin{vmatrix} P - P_x, & 0, & (1 - \alpha_x) M_{x0} + bP \\ 0, & P - P_y, & (1 - \alpha_y) M_{y0} - aP \\ (1 - \alpha_x) M_{x0} + bP, & (1 - \alpha_y) M_{y0} - aP, & \frac{S_r}{F} (P - P_\omega) + 2\beta_x M_{y0} - 2\beta_y M_{x0} \end{vmatrix} = 0. \quad (51)$$

展開這個行列式我們得到：

$$\begin{aligned} & (P - P_x) (P - P_y) \left[\frac{S_r}{F} (P - P_\omega) + 2\beta_x M_{y0} - 2\beta_y M_{x0} \right] - \\ & - (P - P_y) [(1 - \alpha_x) M_{x0} + bP]^2 - (P - P_x) [(1 - \alpha_y) M_{y0} - aP]^2 = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

這便是在臨界狀態時外力 P , M_{x0} , M_{y0} 所應滿足的條件。

如果根據 B. 3. 符拉索夫的理論，那末我們將得到：

$$\begin{aligned} & (P - P_x) (P - P_y) \left[\frac{S_r}{F} (P - P_\omega) + 2\beta_x M_{y0} - 2\beta_y M_{x0} \right] - \\ & - (P - P_y) (M_{x0} + bP)^2 - (P - P_x) (M_{y0} - aP)^2 = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

這相當於在方程 (52) 中假定 $\alpha_x = \alpha_y = 0$ 。但是從公式 (50) 可以看到， $\alpha_x \alpha_y = \frac{1}{4}$ ，因此它們不可能同時為零。

現在我們來根據方程 (52) 討論幾個重要的特殊情況。

1. 設有一等厚度的對稱的十字形截面的桿件，在 yz 平面內承受撓矩 $M_{x0} = M$ 的作用。要決定 M 的臨界值。

設截面的尺寸如圖 4 所示。由於這個截面的 $\omega \equiv 0$ 和由於對稱關係，

$$a = b = 0, \quad J_{\omega\omega} = J_{xr} = J_{yr} = 0. \quad (54a)$$

其餘的截面的幾何特徵如下：

$$\left. \begin{aligned} F &= 2hl(1 + \alpha), \quad S_r = \frac{2}{3} hl^3 (1 + \alpha^3), \quad J_{rr} = \frac{2}{5} hl^5 (1 + \alpha^5), \\ J_{xx} &= \frac{2}{3} hl^3 \alpha^3, \quad J_{yy} = \frac{2}{3} hl^3, \quad J_d = \frac{2}{3} h^3 l (1 + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (54b)$$

於是根據公式 (50) 得到

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^2 Ehl^3}{L^2} \alpha^3, \quad P_y = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^2 Ehl^3}{L^2}, \quad \frac{S_r}{F} P_\omega = \frac{2}{3} Gh^3 l (1 + \alpha), \\ \alpha_x &= \frac{1}{2} \alpha^3, \quad \alpha_y = \frac{1}{2\alpha^3}, \quad \beta_x = \beta_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

在方程 (52) 中令 $a = b = 0$, $M_{y0} = P = 0$ 和 $M_{x0} = M$ ，我們得到 M 的一個二次方程如下：

$$P_y (1 - \alpha_x)^2 M^2 - \frac{S_r}{F} P_x P_y P_\omega = 0.$$

由此得到 M 的兩個根如下：

$$M = \pm \frac{\sqrt{GJ_d P_x}}{1 - \alpha_x}. \quad (56)$$

將公式 (55) 代入 (56)，整理後得到

$$M = \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha \sqrt{\alpha(1+\alpha)}}{1 - \frac{1}{3}\alpha^3} \cdot \frac{\pi E h^2 l^2}{L} \sqrt{\frac{G}{E}}. \quad (57)$$

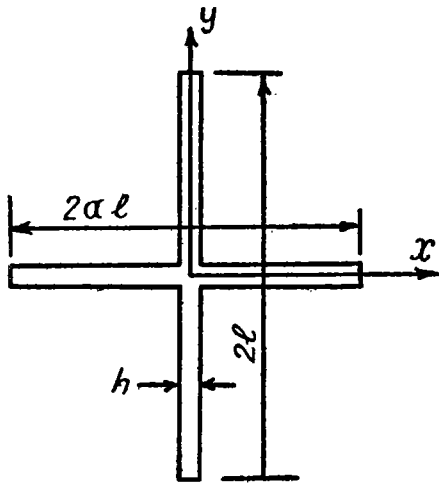


圖 4

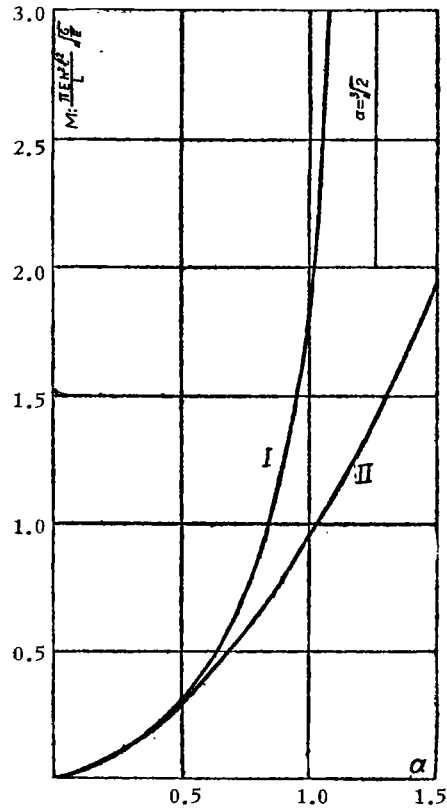


圖 5

根據公式 (57) 我們得到 M 隨 α 而變的關係如圖 5 曲線 I 所示。當 $\alpha > \sqrt[3]{2}$ 時，公式 (57) 雖仍給出一個 M 值，但是這個 M 值隨 α 趨近於無窮大而趨近於零。這顯然是不符合實際情況的，它只能認為是混進特徵方程中去的一個假根，因此它沒有畫在圖 5 中。

如果根據 B. 3. 符拉索夫的理论，那末我們將得到

$$M = \frac{2}{3} \alpha \sqrt{\alpha(1+\alpha)} \cdot \frac{\pi E h^2 l^2}{L} \cdot \sqrt{\frac{G}{E}}. \quad (58)$$

根據公式 (58) 所得到的曲線也畫在圖 5 中 (曲線 II)。圖中的兩條曲線相差頗遠，本文的理论給出較大的臨界值。值得注意的是：如果依照 B. 3. 符拉索夫的理论，那

末對於任一個 α 都有一個臨界值 M ; 但若依照本文的理論, 那末只有在 $\alpha < \sqrt[3]{2}$ 時才有臨界力矩 M , $\alpha \geq \sqrt[3]{2}$ 時桿件不會因撓矩而失去穩定. $\sqrt[3]{2}$ 這一個特殊的數值是否正確, 有待於實驗的證明. 不過就質的方面來說, 本文理論是符合於實際情況的, 因為經驗表明一個寬而扁的桿件是不會失去側向穩定性的.

2. 設有一等厚度的對稱的工字形截面的桿件, 在 yz 平面內承受撓矩 $M_{x0} = M$ 的作用. 要決定 M 的臨界值.

設截面的尺寸如圖 6 所示. 由於對稱關係,

$$a = b = 0, \quad J_{xr} = J_{yr} = 0. \quad (59)$$

其餘的截面的幾何特徵如下:

$$\left. \begin{aligned} F &= 2hH(1+2\alpha), \quad J_{xx} = \frac{4}{3}hH^3\alpha^3, \quad J_{yy} = \frac{2}{3}hH^3(1+6\alpha), \quad S_r = \frac{2}{3}hH^3(1+6\alpha+2\alpha^3), \\ J_{\omega\omega} &= \frac{4}{3}hH^5\alpha^3, \quad J_d = \frac{2}{3}h^3H(1+\alpha), \quad J_{rr} = \frac{2}{15}hH^5(3+30\alpha+20\alpha^3+6\alpha^5). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

於是從公式 (50) 得到

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{4}{3} \frac{\pi^2 EhH^3}{L^2} \alpha^3, \quad P_y = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^2 EhH^3}{L^2} (1+6\alpha), \quad \beta_x = \beta_y = 0, \\ \frac{S_r}{F} P_\omega &= \frac{4}{3} \frac{\pi^2 EhH^5}{L^2} \alpha^3 + \frac{2}{3} \cdot Gh^3H(1+\alpha), \quad \alpha_x = \frac{\alpha^3}{1+6\alpha}, \quad \alpha_y = \frac{1+6\alpha}{4\alpha^3}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

和以前一樣, 我們得到 M 的臨界值如下:

$$M = \frac{1}{1-\alpha_x} \sqrt{\frac{S_r}{F} P_\omega P_x}. \quad (62)$$

還有一個特徵方程的根是

$$M = -\frac{1}{1-\alpha_x} \sqrt{\frac{S_r}{F} P_\omega P_x}.$$

但它當 α_x 趨近於無窮大時趨近於零, 因此是混進特徵方程中去的假根.

將公式 (61) 代入 (62), 我們得到 M 隨 α 而變的關係:

$$M = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha(1+6\alpha)}{1+6\alpha-\alpha^3} \cdot \left\{ \alpha^4 + \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{h^2 L^2}{H^4} \cdot \alpha(1+\alpha) \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi^2 EhH^4}{L^2}. \quad (63)$$

從這個公式我們可以看到當 $\alpha \geq 2.528$ 時這個桿件在撓矩作用下便不會失去側向穩定性.

如果依照 B. 3. 符拉索夫的理論, 那末我們得到:

$$M = \frac{4}{3} \alpha \left\{ \alpha^4 + \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{h^2 L^2}{H^4} \cdot (1+\alpha) \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi^2 EhH^4}{L^2}. \quad (64)$$

取 $\frac{G}{E} = 0.4$, $\frac{h^2 L^2}{H^2} = 4$, 我們根據公式 (63) 和 (64) 畫出兩條曲線如圖 7 所示。

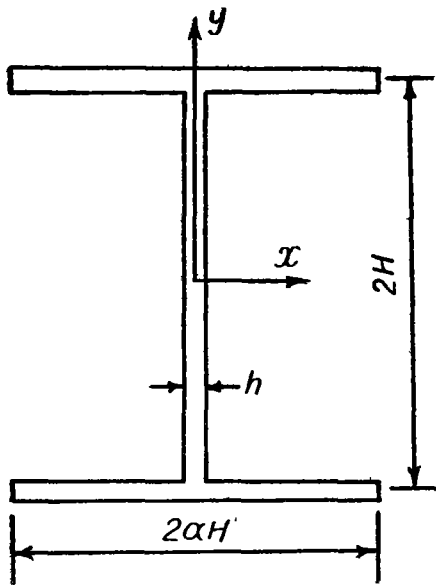


圖 6

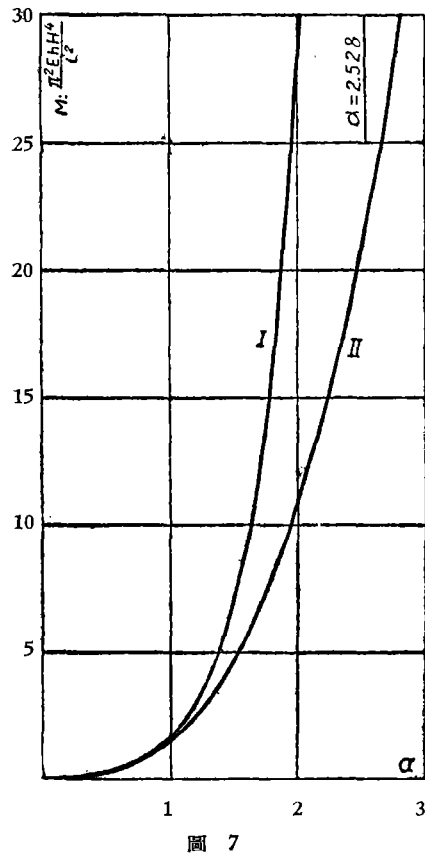


圖 7

上面所討論的係假定桿件的兩端是簡支的, 即在失去穩定後桿端沒有撓度和扭轉角, 同時力矩保持不變。如果桿件的兩端是夾住的, 即在失去穩定後桿端的撓度、傾度和扭轉角等於零, 同時端面又保持為平面, 那末邊界條件為

在 $z = 0$ 和 $z = L$ 處:

$$\xi = \eta = \theta = 0, \quad \xi' = \eta' = \theta' = 0. \quad (65)$$

為了滿足這些邊界條件, 我們可假定 ξ, η, θ 有下列形式:

$$\xi = A \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right), \quad \eta = B \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right), \quad \theta = C \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right). \quad (66)$$

將這些算式代入方程 (43) 的左端, 乘以 $\left(1 - \cos \frac{2\pi z}{L} \right)$ 後對 z 從 0 到 L 積分, 命最後得到的結果為零, 我們得到:

$$\left. \begin{aligned} (P - P_x) A + [(1 - \alpha_x) M_{x0} + bP] C &= 0, \\ (P - P_y) B + [(1 - \alpha_y) M_{y0} - aP] C &= 0, \\ [(1 - \alpha_x) M_{x0} + bP] A + [(1 - \alpha_y) M_{y0} - aP] B + \\ &+ \left[\frac{S_r}{F} (P - P_\omega) + 2\beta_x M_{y0} - 2\beta_y M_{x0} \right] C = 0. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{\pi^2 EJ_{xx}}{(L/2)^2}, & P_y &= \frac{\pi^2 EJ_{yy}}{(L/2)^2}, & P_\omega &= \frac{F}{S_r} \left(\frac{\pi^2 EJ_{\omega\omega}}{(L/2)^2} + GJ_d \right), \\ \alpha_x &= \frac{J_{xx}}{2J_{yy}}, & \alpha_y &= \frac{J_{yy}}{2J_{xx}}, & \beta_x &= \frac{J_{xr}}{2J_{xx}}, & \beta_y &= \frac{J_{yr}}{2J_{yy}}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

方程 (67) 在形式上完全和方程 (49) 一樣, 所不同的只是其中 P_x, P_y, \dots 等的意義. 比較公式 (68) 和 (50) 可以看到, 和中心均勻壓縮的情況相同, 對於臨界載荷而言, 兩端夾住的桿件相當於一半長度的兩端簡支的桿件.

參 考 文 獻

- [1] 胡海昌, 顧及二級小量的開口截面彈性薄壁桿件的實用理論, 物理學報, **12** (1956), 127—138.
- [2] Prandtl, L., Kipperscheinungen, Dissertation Nurenberg, 1899.
- [3] Michell, A. G. M., Elastic stability of long beams under transverse forces, *Phil. Mag.*, **48** (1899), 298—309.
- [4] Timoshenko, S., Lateral buckling of beams, *Bull. Polytech. Inst. St. Peterburg.*, **4** (1905).
- [5] ———, Lateral buckling of beams, *ibid.*, **5** (1906).
- [6] Wagner, H., Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, *Festschrift 25-Jahre Technische Hochschule*, 1929.
- [7] Wagner, H. und Pretscher, W., Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, *Luftfahrtforschung*, **11** (1934), 174—180.
- [8] Власов, В. З., *Тонкостенные упругие стержни*, Гостройиздат, 1940.
- [9] В. З. 符拉索夫, 材料力學、結構力學與彈性力學中的若干問題, 中國科學院出版, 1954 年.
- [10] Csonka, P., Die Stabilität der an ihren Enden aufgehängten prismatischen Stäbe von rechteckigen Querschnitt, *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **8** (1954), 79—90.
- [11] ———, Die Stabilität des an einem Punkte aufgehängten geraden Balkens, *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **8** (1954), 389—397.
- [12] ———, Die Stabilität des an seinem enden aufgehängten, an seinem seitlichen Verschiebung gehinderten Balkens, *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **10** (1955), 31—41.
- [13] Böleskei, E., Die stabilität des an zwei Punkten aufgehängten Geraden Balkens, *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **8** (1954), 243—256.
- [14] Rutecki, J., Instability of thin-walled bars with open cross-sections, their profile deformations being taking into account, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, **3** (1951), 437—460.
- [15] Чувикян, Г. М., Устойчивость плоской деформации внецентренно сжатых стержней при равных главных моментах инерции сечения. *Исследования по теории сооружений. Сб.*, **6**, 135—144, 1954.

ON THE STABILITY OF THIN-WALLED BEAMS OF OPEN CROSS SECTIONS

HU HAI-CHANG

(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper the non-linear theory of thin-walled beams of open cross sections proposed by the author^[1] recently is applied to the investigation of the stability of such beams. Fundamental equations of the previous paper[1] are firstly linearized and simplified for the determination of the critical load and the mode of buckling. In the case of eccentric compression, the fundamental equations of this paper differ from those in the theory of V. Z. Vlasov^[8] in the following two points: 1) A new generalized displacement ρ is introduced, 2) The initial bent state of the beam is taken into account. A numerical example (an angle of unequal legs) shows that in the case of central uniform compression, ρ has little influence on the magnitude of the critical load. Therefore ρ is then neglected in this paper. In the case of beams loaded by pure bending moments, two numerical examples are carried out (a cross beam and an I-beam, see Figs. 4 and 6). Critical moments are plotted against a dimensionless parameter α as shown in Figs. 5 and 7 (curves I), where α is the ratio of width to depth of the cross section of the beam. Our critical moments are greater than those given by V. Z. Vlasov (curves II in Figs. 5 and 7). This is because in this paper the initial bent state of the beam is taken into account. It is interest to point out that according to our theory, beams may lose lateral stability under pure bending moment only when the ratio of width to depth of the cross section is less than a certain critical value. This fact is in agreement with common experience.