

## 原子核內電荷分佈與各種相關實驗的比較\*

劉漢昭

(南開大學物理系)

### NUCLEAR CHARGE DISTRIBUTIONS AND COMPARISON WITH RELATED EXPERIMENTS

LIU HAN-CHAO

(Department of Physics, Nan-kai University)

近來有許多實驗<sup>[1]</sup>可直接考驗原子核內電荷的分佈，如高能及中能電子與原子核的散射， $\mu$  介原子的 X 射線，核庫侖能，同位素光譜位移等。不少作者<sup>[3,4]</sup>曾假定了各種類型的電荷分佈  $\rho(r)$ ，然後從比較計算結果與實驗結果中來判定哪些  $\rho(r)$  與實驗是較符合的。在這些測定  $\rho(r)$  的實驗中，前兩個實驗的靈敏度較高，後兩個則較低<sup>[1]</sup>。此外，通過另一種考慮<sup>[1,5,6]</sup>——利用殼層結構理論與湯費模型——也可以近似地決定  $\rho(r)$ ，除掉其中尚有一常數未定。這個常數相當於核中心電荷密度或電荷分佈的平均半徑，它可以用中能電子散射實驗數據來決定。本文目的在比較從各種不同出發點找到的  $\rho(r)$ 。首先是看由上述第一類方式（主要是電子散射與  $\mu$  介原子光譜實驗）所決定的各種  $\rho(r)$  是否一致，從而判定湯、費模型應用於原子核時的近似程度，並且通過各種比較，也嘗試地找出了目前與各種相關實驗符合得最好的  $\rho(r)$ 。

#### 一. 高能電子與原子核的散射

荷夫斯塔特爾<sup>[2]</sup>等對  $Au^{197}$  作了高能 ( $>50$  Mev) 電子的散射實驗。目前這個實驗被認為探測核內電荷分佈的最有力的工具。洛芬號爾<sup>[3]</sup>等的計算結果指出，對  $Au^{197}$  而言，質子數密度分佈模型<sup>[1]</sup>

$$\rho(r) = \rho_0 \left[ 1 + e^{K(r-c)} \right]^{-1} \quad (1)$$

當  $K = 2.20$ ,  $c = 6.63$  時與高能電子散射的實驗結果符合得很好。我們利用歸一化

\* 1955 年 12 月 21 日收到。

1) 通過頗冗長的計算，得知本文圖 1b 中各曲線均能滿足後兩種實驗結果。

條件<sup>1)</sup>

$$\int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr = Z \text{ (核內質子數)}, \quad (2)$$

對  $\text{Au}^{197}$  求得 (1) 中  $\rho_0 = 6.2 \times 10^{37} \text{ cm}^{-3}$ ; 代入 (1), 便得圖 1a 的曲線 III.

布朗和埃爾吞<sup>[4]</sup> 最近的計算指出, 對  $\text{Hg}^{201}$  而言, 電荷密度分佈模型

$$\rho(r) = K \left[ 1 + \exp\left(\frac{r^2 - \alpha^2}{\beta^2}\right) \right]^{-1} \quad (3)$$

當  $\beta^2/\alpha^2$  之值介於  $\frac{1}{8}$  和  $\frac{1}{4}$  之間時均與高能及中能電子的散射實驗結果符合。將他們的單位轉換<sup>2)</sup>成我們的單位, 便得到圖 1 中的曲線 I ( $\beta^2/\alpha^2 = \frac{1}{8}$ ,  $K = 0.00171$ ) 及曲線 II ( $\beta^2/\alpha^2 = \frac{1}{4}$ ,  $K = 0.00216$ ).

## 二. 由湯、費模型及核殼層結構理論定電荷分佈

根據核殼層結構並利用由湯、費模型而得的費米積分方程<sup>[7]</sup>, 除去一常數外可求出核子的密度分佈來<sup>[5,6,8]</sup>。在這一工作中, 從連續角動量分佈過渡到量子化角動量分佈中尚有一些含糊。太依茲<sup>[9]</sup> 合理地利用相空間分區域的方法解決了這一含糊。他然後採用楊<sup>[5]</sup> 所用的質子數密度分佈模型:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_0 & (r < R) \\ &= \rho_0 e^{-\left(\frac{r-R}{b}\right)^2 \ln 2} & (r > R), \end{aligned} \quad (4)$$

並假定

$$\rho_0 = \frac{Z}{\frac{4\pi}{3} r_0^3 A}, \quad r_0 = 1.4 \times 10^{-13} \text{ cm}, \quad (5)$$

經過多次計算, 通過由不同  $b$  值求得的角動量分佈與實驗值的比較得出最好的  $b = 1.2_0 \times 10^{-13} \text{ cm}$ , 且一切原子核都有相同的  $b$  值。 (4) 中的  $R$  值由 (2) 決定。用太依茲法定出的  $\text{Au}^{197}$  的電荷分佈與由高能電子散射實驗定出的電荷分佈相差極遠, 原因在於他所作的假定 (5) 是錯誤的。這個錯誤尚不致使他的計算全局作廢, 因為如前所述,

1) 他們未給出模型 (1) 的  $\rho_0$  之值。將 (1) 代入規一化條件 (2) 即可得

$$\rho_0 = \frac{Z}{4\pi c^3} \left( \frac{1}{3} + \frac{\pi^2}{3(Kc)^2} - \frac{2}{(Kc)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-3} e^{-nKc} \right)$$

2) 利用他們給出的指數型電荷密度分佈。

在這個理論中電荷分佈的平均半徑是未定的。如果不利用(5)而利用中能電子散射的實驗結果，即<sup>1)</sup>

$$\left[ \frac{5}{3Z} \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^4 dr \right]^{1/2} = 1.20 \times 10^{-13} A^{1/3} \quad (A \text{ 表質量數}), \quad (6)$$

則得到<sup>2)</sup>下述正確的結果：

當  $A=58.4$  時， $\beta=1.6_3$ ， $R=3.3_5 \times 10^{-13} \text{ cm}$ ， $b=1.0_{-1} \times 10^{-13} \text{ cm}$ ；

$A=104$  時， $\beta=2.1_0$ ， $R=4.3_{-2} \times 10^{-13} \text{ cm}$ ， $b=1.0_{-2} \times 10^{-13} \text{ cm}$ ；

$A=197$  時， $\beta=2.7_3$ ， $R=5.7_4 \times 10^{-13} \text{ cm}$ ， $b=1.0_1 \times 10^{-13} \text{ cm}$ ，

$$\rho_0=5.8_2 \times 10^{37} \text{ cm}^{-3}.$$

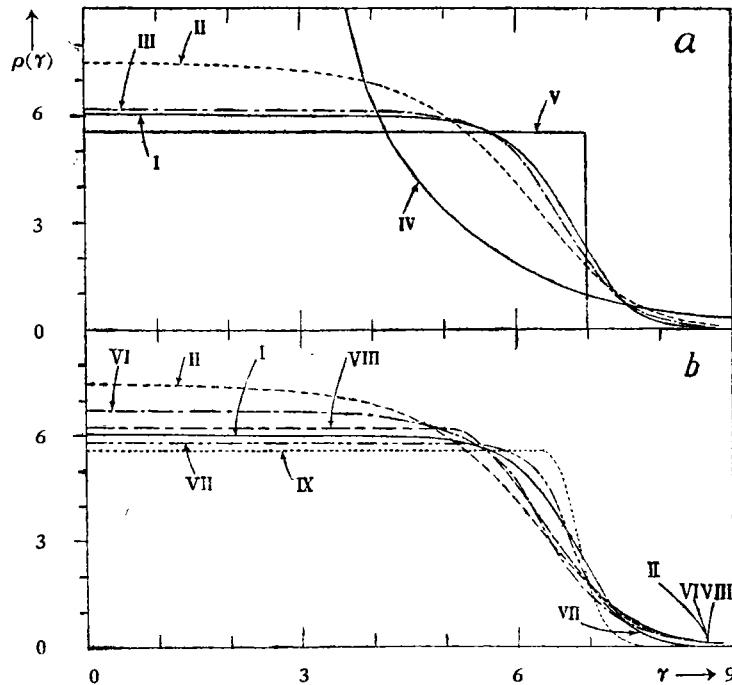


圖 1.  $\text{Au}^{197}$  原子核內電荷分佈的各種曲線圖。圖中橫坐標以  $10^{-13} \text{ cm}$  為單位，縱坐標以  $10^{37} \text{ cm}^{-3}$  為單位。

I 和 II 二曲線間的同類型的曲線均符合高能及中能電子與原子核的散射實驗。III 表滿足這個要求的電荷分佈(1)式的一根曲線。

IV 表僅符合中能電子與原子核的散射實驗的指數型曲線。V 表僅符合這個實驗的均勻型曲線。

VI 表符合  $\mu$  介原子 X 射線及中能電子與原子核的散射實驗的一根曲線。

VII 表符合湯、費模型、核殼層結構及中能電子與原子核的散射實驗的電荷分佈(4)式的最好的曲線。VIII 和 IX 表滿足這些要求的同類型的曲線的上限和下限。

1) 圖 1a 中的曲線 I, II, III, IV 均滿足(6)式，曲線 V 代表滿足(6)式的均勻電荷分佈模型。

2) 首先從太依茲用的費米積分方程可以看出， $N_1$  僅僅是  $I$ ,  $Z$ ，和  $\beta$  ( $= \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \frac{R}{b}$ ) 的函數，而  $\beta$  又僅僅是  $A$  的函數。這個結論使我們能够對每個  $A$  值利用太依茲的計算結果（即利用他的  $b$  值和  $R$  值）先求出正確的  $\beta$  值來，然後再由  $\beta = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \frac{R}{b}$ ，(2) 及 (6) 三式解出正確的  $\rho_0$ ,  $R$  及  $b$  之值來。

由此知,如果太依茲的其他計算是正確的,則一切原子核的  $b$  值(相當於核邊緣層厚度)均接近於  $1.0_0 \times 10^{-13}$  cm. 對  $\text{Au}^{197}$  言, 將上述數據代入模型 (4) 得圖 1b 中的曲線 VII. 太依茲文 [9] 中除了給出上述最好的  $b$  值外, 尚給出相鄰兩值, 可作為  $b$  值的上下限的估計; 與此相對應的電荷密度分佈分別相當於圖 1b 中的 IX, VIII 兩曲線. 由圖 1 知符合高能電子散射實驗的曲線 I, III 均位於 IX, VIII 二曲線之間, 且與曲線 VII 也相去不遠. 這說明用湯、費模型定出的電荷分佈與高能電子散射的實驗結果是基本上符合的, 雖然這兩種決定電荷分佈的出發點是如此不同. 這一事實給予核結構的湯、費模型的近似正確性以一定的支持.

在太依茲之前, 楊<sup>[11]</sup> 曾利用費米積分方程求出核子軌道角動量分佈的各次平均值和核子密度的關係式, 並利用核殼層結構理論給出的各次平均值的數據及模型 (4) 定出  $\text{Au}^{197}$  的  $\beta \approx 1.3$ , 再由 (2)、(6) 兩式可得  $R = 4.7$ ,  $\rho_0 = 6.5$ , 代入 (4) 所得的電荷密度分佈曲線比圖 1b 的曲線 VIII 略高一點. 這個結果雖與太依茲的結果不很符合, 但仍符合於高能電子散射實驗. 與太依茲的結果發生差別, 可能是由於相空間中屬於各種不同軌道角動量量子數的區域的劃分的不同所致.

### 三. $\mu$ 介原子的 X 射線

菲奇和雷恩瓦特爾<sup>[10]</sup> 測定  $\text{Pb}^{208}$  的  $\mu$  介原子的  $2p_{3/2} - 1s$  的能量差為 6.0<sub>2</sub> Mev. 赫爾等<sup>[11]</sup> 對下面的質子數密度分佈模型

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 - \frac{1}{2} e^{-n}} \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-n(1 - \frac{r}{r_0})} & (r \leq r_0) \\ \frac{1}{2} e^{-n(\frac{r}{r_0} - 1)} & (r > r_0) \quad (1 \leq n \leq \infty) \end{cases} \quad (7)$$

中的每一個整數的  $n$  值求出與之相應的  $r_0$  之值來以使  $\text{Pb}^{208}$  的  $\mu$  介原子的  $2p_{3/2} - 1s$  的能量差為 6.0<sub>2</sub> Mev. 我們利用福爾德等<sup>[12]</sup> 文中的圖 2<sup>1)</sup> 得知使模型 (7) 符合  $\mu$  介原子 X 射線的實驗結果及中能電子散射的實驗結果的  $n = 8.5_3$ . 代入 (6)<sup>2)</sup> 得  $r_0 = 6.4_{-3} \times 10^{-13}$  cm. 由 (2) 得  $\rho_0 = 6.8_{-4} \times 10^{37}$  cm<sup>-3</sup>. 這樣決定的  $\rho(r)$  即圖 1b 中的曲線 VI. 曲線 VI 恰在曲線 I 和 II 的中部. 這說明符合高能電子散射實驗的電

1) 此圖是對  $\text{Pb}^{208}$  而作的, 但對  $\text{Au}^{197}$  也應該近似地適用.

2) 將 (7) 代入 (6) 並利用 (2), 得

$$r_0 = 1.20 \times 10^{-13} A^{1/8} \left[ \frac{5(12e^{-n} + 24n + 4n^3 + \frac{1}{5}n^5)}{3n^2(e^{-n} + 2n + \frac{1}{3}n^3)} \right]^{-1/2} \text{ cm.}$$

對  $\text{Au}^{197}$  言,  $A = 197$ .

荷分佈均與  $\mu$  介原子的 X 射線實驗符合或大致符合。將圖 1b 的曲線 I、II、VI、VII、VIII、IX 作一比較，可知符合各方面實驗結果的電荷分佈曲線應介於曲線 I 和 VI 之間（高能電子散射的實驗結果最可靠，必須符合這個實驗結果）。

(6) 的右邊數據  $1.20 \times 10^{-13}$  是由中能電子散射的實驗測定的，其誤差約為  $0.03 \times 10^{-13}$ <sup>[4]</sup>。我們曾令圖 1b 中各曲線都滿足 (6)。當 (6) 右邊的數據改變時，圖 1b 中各曲線也會跟着改變，但各曲線間的相對關係不致有明顯的改變。因此，不致影響上述的結論。

最後，作者願向北京大學楊立銘教授致衷心的謝意：他建議了這個工作，並在工作的進行中經常地給予幫助。

### 參 考 文 獻

- [1] 楊立銘，物理學報，9 (1953)，302。
- [2] Hofstadter, R., Hahn, B., Knudsen, A. W. and McIntyre, J. A., *Phys. Rev.*, 95 (1954), 512.
- [3] Ravenhall, D. G. and Yennie, D. R., *Phys. Rev.*, 96 (1954), 239.
- [4] Brown, G. E. and Elton, L. R. B., *Phil. Magazine*, 46 (1955), 164.
- [5] Born, M. and Yang, L. M. (楊立銘), *Nature*, 166 (1950), 399; Yang, L. M. (楊立銘), *Proc. Phys. Soc. (Lon.)*, 64 (1951), 632.
- [6] Иваненко, Д. и Родичев, В., *Дан*, 70 (1950), 605.
- [7] Fermi, E., *Z. Physik*, 48 (1928), 73.
- [8] 楊立銘，劉漢昭，物理學報，11 (1955)，439。
- [9] Theis, W. R., *Z. Physik*, 140 (1955), 1.
- [10] Fitch, V. L. and Rainwater, J. *Phys. Rev.*, 92 (1953), 789.
- [11] Hill, D. L. and Ford, K. W., *Phys. Rev.*, 94 (1954), 1617.
- [12] Ford, K. W. and Hill, D. L., *ibid.*, 1630.